Master CFP
Parcours physique quantique
2006-2007

THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Feuille 9

---

1 Quelques formules utiles

L'écriture d'un champ complexe de Klein-Gordon en fonction des opérateur de création et d'anihilation :

$$\phi(t,x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\omega_k} \left(a_k e^{-iq_\mu x^\mu} + a_k^\dagger e^{iq_\mu x^\mu} \right)$$

avec $\omega_k = \sqrt{k^2+m^2}$
Relations de commutation :

$$[a_k, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 2\omega_q \; \delta(q-k)$$

Le propagateur de Feynman

$$\begin{aligned} D_F(x) =& \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle \\ =& \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i \; \exp(-iq_\mu x^\mu)}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

où T ordonne dans l'ordre chronologique les champs.

---

2 Le potentiel de Yukawa

On considère dans cet exercice deux types de particules : des particules lourdes (que l'on appelera nucléons), considérées comme classiques (pas de fluctuations quantiques) et des particules légères (appelées ici mésons, notés π) qui seront représentées par un champ quantique. Pour faire simple ici, les "nucléons" seront des bosons. L'interaction entre nucléons et mésons est représentée, dans le hamiltonien, par un terme d'interaction $H_{\text{int}} = g \int d^3x \;\; J(t,x)\pi(t,x)$. Le but de cet exercice est de calculer l'énergie d'une configuration où deux nucléons sont séparés d'une distance a et d'en déduire la force d'interaction entre ces deux nucléons.
En théorie de perturbation, on obtient l'énergie d'une configuration comme

$$\int dt \; E(t) = \langle 0|T \left(\int d^t \;\; H_{\text{int}}(t) \; e^{(-i \int dt \;\; H_{\text{int}})} \right) |0\rangle$$

1. On considère une configuration des nucléons composée de deux paquets d'onde gaussiens (correctement normalisés) de largeur σ, centrés en $\mathbf{r_1}$ et en $\mathbf{r_2}$, distants de a. Pour régulariser les expressions qui arriveront dans la suite, on considère en outre que les nucléons existent sur un intervalle de temps τ. Ecrivez donc la forme du champ classique $J(x)$.

2. Exprimez l'énergie du fondamental au deuxième ordre en g en fonction du propagateur de Feynman. Si l'on exprime le champ de nucléons comme en **1**, on obtient des termes ne faisant intervenir que la particule centrée en en $\mathbf{r_1}$ (ou en $\mathbf{r_2}$), qui s'interprètent comme une modification (une renormalisation) des propriétés des nucléons (modification de leur masse, par exemple), et un terme d'interaction entre les deux nucléons. Dans la suite on ne retiendra que ce dernier terme.

3. Nous allons maintenant évaluer l'intégrale. La partie temporelle se fait aisément. Dans la limite où τ tend vers l'infini, réécrivez l'intégrale en utilisant le fait que $\lim_{t\to\infty} \sin^2(xt)/(x^2t) = \pi \; \delta(x)$.

4. Pour calculer la partie spatiale de l'intégrale, nous supposerons que l'extension spatiale du paquet d'onde est beaucoup plus petit que la distance entre les deux particules. Nous pouvons donc faire la limite $\sigma \to 0$, ce qui nous permet de remplacer les gaussiennes par des fonctions δ. L'intégrale spatiale se fait alors simplement et donne : $E(a) = -g^2/(2\pi a)\exp(-ma)$.

5. Calculez la force d'interaction et montrez que la portée de cette force est directement reliée à la masse du méson.

---

3 Source classique

Dans ce problème, on considère un champ complexe de Klein-Gordon en interaction avec une source dont on peut négliger les fluctuations quantiques. La source se couple au champ via un terme d'interaction $H_{\text{int}} = \int dt\ \phi(t,x)J(t,x)$. On veut étudier l'influence de la source sur les propriétés du champ quantique. Le formalisme n'a pas été introduit en cours, mais en gros, la seule chose qu'on a besoin de savoir est que l'amplitude de transition entre un état $|\alpha\rangle$ et un état $|\beta\rangle$ est donné par $\mathcal{A}_{\alpha\to\beta} = \langle\alpha|T\exp\left(-i\int dt\ H_{\text{int}}\right)|\beta\rangle$.

1. Calculez l'amplitude de transition entre le vide et le vide à l'ordre J^2. Cette quantité s'exprime facilement en fonction du propagateur de Feynman, ce qui explique pourquoi on introduit cette quantité. Déduisez-en la probabilité de créer zéro particules, et exprimez cette probabilité en fonction de

$$\lambda = \int d^4x d^4y\ D_F(x-y)\ J(x)J(y)$$

2. On veut maintenant pousser le développement à des ordres plus élevés, et en fait resommer le résultat à tous les ordres. Pour cela, calculez le terme à l'ordre J^4 proprement, et conjecturez ce qui se passe pour J^{2n}. Resommez la série et déduisez-en l'amplitude de transition $\mathcal{A}_{|0\rangle\to|0\rangle} = \exp(-\lambda/2)$, puis montrez que la probabilité de ne créer aucune particule pour j quelconque s'écrit $\exp(-\lambda)$.

3. On veut maintenant calculer l'amplitude de transition $\mathcal{A}_{|0\rangle\to|\mathbf{q}\rangle}$ avec $|\mathbf{q}\rangle = \mathbf{a}^\dagger_{\mathbf{q}}|\mathbf{0}\rangle$, puis la probabilité de créer une particule, mais rassurez-vous aucun gros calcul supplémentaire n'est nécessaire. Pour cela, écrivez H_{int} et λ comme une intégrale en impulsion, en fonction de $J^{\pm}(p) = \int d^4x J(x)\exp(\mp ip_\mu x^\mu)$. Remarquez que la dérivée fonctionnelle de $\mathcal{A}_{|0\rangle\to|0\rangle}$ par rapport à $J^{\pm}(x)$ vous donne (presque) ce que vous voulez. Déduisez-en la probabilité de créer une particule que vous exprimerez uniquement en fonction de λ. Remarquez que la relation de fermeture s'écrit ici $1 = \int d^3k/(2\pi)^3/(2\omega_k)|k\rangle\langle k|$, et que par conséquent la probabilité s'écrit $\int d^3k/(2\pi)^3/(2\omega_k)|\mathcal{A}_{|0\rangle\to|\mathbf{k}\rangle}|^2$.

4. Généralisez le calcul précédent et calculez la probabilité de produire n particules. Cette probabilité suit une loi de Poisson : $P_n = \lambda^n/n!\ \exp(-\lambda)$.

5. Montrez que cette loi de probabilité est bien normée. Calculez $\langle n\rangle$ et $\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2$.