Master CFP
Parcours physique quantique
2005-2006

# THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Feuille 6

---

## 1 Champ complexe

On considère un champ scalaire complexe $\phi$ dont le lagrangien est donné par

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\star)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\star \phi \tag{1}$$

$\phi$ et $\phi^\star$ seront considérés comme deux variables indépendantes.

**1.** Montrez que ce lagrangien est invariant sous les transformations du groupe de Poincaré et sous la transformation simultanée $\phi \to exp(i\theta)\phi$, $\phi^\star \to exp(-i\theta)\phi^\star$. Quels autres termes préservant ces symétries pourrait-on mettre dans le lagrangien ?

**2.** Dans la suite on ne considère que le lagrangien (1). Donnez les équations du mouvement pour le champ. Voyez-vous pourquoi $m$ représente la masse du champ ?

**3.** Calculez le courant de Nœther associé au changement de phase du champ.

**4.** Vérifiez que ce courant satisfait une équation de conservation (vous utiliserez les équations du mouvement pour le champ).

**5.** Calculez le courant de Nœther associé à une translation $\delta x^\mu = a^\mu$. Le tenseur énergie-impulsion[1] est défini par $J^\mu = -a_\nu T^{\mu\nu}$. Donnez l'expression de ce tenseur.

**6.** En utilisant les équations du mouvement, vérifiez que l'équation de continuité pour $T$ est satisfaite.

**7.** Calculez $T^{00}$ et $T^{0i}$ qui s'interprètent comme des densité d'énergie et d'impulsion respectivement.

---

## 2 Dirac

On considère un spineur de Dirac $\psi$. Le lagrangien de la particule libre est :

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial_\mu}\psi - m\overline{\psi}\psi \tag{2}$$

avec $A\overleftrightarrow{\partial_\mu}B = A(\partial_\mu B) - (\partial_\mu A)B$

**1.** Donnez les équations du mouvement du champ $\psi$. Que peut-on dire de $\mathcal{L}$ pour un champ solution des équations du mouvement ?

**2.** Calculez le courant de Nœther associé à une translation $\delta x^\mu = a^\mu$. Donnez l'expression du tenseur énergie-impulsion canonique. Vérifiez que les courants satisfont à l'équation de continuité.

**3.** Calculez $T^{00}$ et $T^{0i}$ qui s'interprètent comme des densité d'énergie et d'impulsion respectivement.

---

[1] Lorsqu'il est défini ainsi, $T$ est appelé tenseur énergie-impulsion canonique

## 3 Rayonnement électromagnétique

On veut déterminer le tenseur énergie-impulsion du rayonement électromagnétique dans le vide. Le lagrangien s'exprime en fonction du tenseur de champ électromagnétique : $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

**1.** Rappelez (retrouvez) les équations du mouvement du champ.

**2.** Calculez le courant de Nœther $J^\mu$ associé à une translation $\delta x^\mu = a^\mu$ et déterminez le tenseur énergie-impulsion canonique.

**3.** Ce tenseur n'est pas symétrique (problématique quand on fait de la gravitation) et pas invariant de jauge. On souhaite donc trouver un autre tenseur énergie-impulsion $\widetilde{T}^{\mu\nu}$ ayant ces deux propriétés. Pour cela, montrez que si $\widetilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho X^{\rho\mu\nu}$ avec $X^{\mu\rho\nu} = -X^{\rho\mu\nu}$ alors l'équation de conservation $\partial_\mu \widetilde{T}^{\mu\nu} = 0$ est satisfaite et les charges associées à $T$ et $\widetilde{T}$ sont identiques.

**4.** Montrez que $X^{\rho\mu\nu} = -F^{\rho\mu}A^\nu$ est un choix acceptable, qui nous permet d'obtenir un tenseur $\widetilde{T}$ symétrique et invariant de jauge.

**5.** Calculez $\widetilde{T}^{00}$ et $\widetilde{T}^{0i}$ (on rappelle que $F^{01} = -E_x$ et $F^{12} = -B_z$). Ces quantités s'identifient à la densité d'énergie du rayonnement électromagnétique et au vecteur de Poynting.

## 4 Belinfante

Dans l'exercice précédent, on a réussi à symétriser le tenseur énergie-impulsion canonique en ajoutant une contribution $\partial_\rho X^{\rho\mu\nu}$. Il existe une méthode permettant de systématiser cette procédure, méthode que l'on propose d'étudier dans cet exercice. Considérons un champ scalaire $\phi_a$ à plusieurs composantes, engendrant une représentation du groupe de Poincaré. Lors d'une transformation de Lorentz $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ avec $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu$, la transformation des composantes du champ s'écrit : $\phi'^a = \phi^a - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(\Sigma_{\mu\nu})^{ab}\phi_b$ avec $\Sigma_{\mu\nu}$ antisymétrique.

**1.** Calculez le courant de Nœther associé à la transformation de Lorentz caractérisée plus haut. Écrivez ce courant en terme de $M^{\mu\nu\rho} = x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu\rho}$ avec $\Delta^{\mu\rho\nu} = -\Delta^{\mu\nu\rho}$.

**2.** Quelle équation de conservation pour $M^{\mu\nu\rho}$ pouvez-vous écrire ? Déduisez-en une relation entre la partie antisymétrique de $T$ et $\Delta$ (souvenez-vous que $T$ satisfait lui-même une équation de conservation).

**3.** Comme dans l'exercice précédent, on introduit $\widetilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho X^{\rho\mu\nu}$ avec $X^{\mu\rho\nu} = -X^{\rho\mu\nu}$, ce qui n'altère ni l'équation de conservation, ni les charges de Nœther associées. Vérifiez que $X^{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Delta^{\rho\mu\nu} - \Delta^{\mu\rho\nu} - \Delta^{\nu\rho\mu})$ est un choix licite et montrez qu'il conduit à un $\widetilde{T}$ symétrique.

**4.** On veut maintenant faire le lien avec notre exercice sur le champ électromagnétique. Pour cela, montrez que si $\phi_a$ représente le quadri-potentiel $A_\mu$, alors $(\Sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta})$. Calculez $X$ et comparez à ce qu'on a fait dans l'exercice sur le rayonnement électromagnétique.

**5.** Et pour les spineurs de Dirac ? Quelle est l'expression de $(\Sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta}$ ? Quelle est l'expression du tenseur énergie-impulsion symétrisé ?