Master CFP
Parcours physique quantique
2006-2007

THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Feuille 4

---

1 Équation de Dirac, canal historique

Historiquement, la première équation de la mécanique quantique relativiste pour une particule libre est l'équation de Klein-Gordon[1] : $(\Box+m^2)\psi = 0$, que l'on obtient facilement en identifiant $P^\mu = i\partial^\mu$. Cette équation n'est toutefois pas satisfaisante pour décrire l'électron. En particulier, elle ne reproduit pas la structure fine de l'atome d'hydrogène. D'autre part, dans l'interprétation habituelle de la mécanique quantique, ψ doit nous permettre de calculer une densité de probabilité, qui satisfait une équation de continuité : $\partial_t \rho + \vec{\nabla}\vec{J} = 0$.

1. Montrez que dans l'équation de Schrödinger $|\psi|^2$ satisfait une équation de continuité, avec un courant de probabilité $\vec{J}$ que vous déterminerez.

2. Pour l'équation de Klein-Gordon, montrez que $\rho = \frac{i}{2m}(\psi^\star \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^\star)$ et $\vec{j} = -\frac{i}{2m}(\psi^\star \vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^\star)$ satisfont l'équation de continuité. Le problème ici est que ρ n'est pas forcément positif, donc on ne peut pas l'interpréter comme une densité de probabilité...

3. Dirac comprit que ce problème vient du fait qu'une dérivée seconde par rapport au temps intervient dans l'équation de Klein-Gordon. D'où son idée de réécrire cette équation sous la forme : $i\partial_t\psi = \mathcal{H}\psi$. $\mathcal{H}$ doit être choisi de telle sorte que si l'on dérive par rapport au temps cette équation, on retrouve l'équation de Klein-Gordon. Afin que l'équation soit invariante sous Lorentz, il est nécessaire que $\mathcal{H}$ fasse intervenir des dérivées premières par rapport aux coordonnées d'espace. On paramétrise donc $\mathcal{H} = -i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta m$. Quelles relations doivent satisfaire α_i et β ?

4. On introduit $\gamma^0 = \beta$, $\gamma^i = \beta\alpha_i$. Montrez que l'anticommutateur $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$. Montrez que ψ satisfait l'équation $(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0$ où $A\!\!\!/ = A_\mu \gamma^\mu$. On retrouve ainsi l'équation de Dirac.

---

2 Covariance de l'équation de Dirac

La physique étant invariante sous les transformations de Lorentz, l'équation de Dirac doit être covariante : si dans un référentiel $(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) = 0$, alors dans un autre référentiel obtenu par la transformation de Lorentz Λ, $(i\partial\!\!\!/' - m)\psi'(x') = 0$, où $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$.

1. Quelle relation doit satisfaire $S(\Lambda)$ pour une transformation de Lorentz quelconque ?

2. Pour une transformation de Lorentz proche de l'identité, $S(\Lambda = \mathbb{1} + \omega) = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}$ avec $\sigma^{\mu\nu}$ antisymétrique. Quelles relations doivent satisfaire les $\sigma^{\mu\nu}$?

3. Montrez que $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$ satisfait cette relation.

4. Dans la représentation chirale des matrices γ :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

Calculez σ_{0i} et σ_{ij}.

5. Déterminez les matrices associées à une rotation et à un boost infinitésimal.

---

[1] Schrödinger étudia d'abord cette équation relativiste (avant Klein et Gordon), avant de considérer sa limite non relativiste : l'équation de Schrödinger...

3 Dirac et le couplage au champ électromagnétique

Il existe une façon très simple d'introduire dans l'équation de Dirac une interaction au champ électromagnétique : la prescription minimale, qui revient à remplacer P^μ par $P^\mu - eA^\mu$.

1. Écrivez l'équation de Dirac pour un électron dans un champ électromagnétique. Écrivez cette équation sous la forme $i\partial_t \psi = \cdots$.

2. On veut maintenant trouver la limite non relativiste de cette équation. Pour ce faire, il est plus commode d'utiliser la représentation de Dirac des matrices γ :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

et l'on décompose les spineurs ψ à 4 composantes en deux spineurs ϕ et χ à 2 composantes. Écrivez les équations d'évolution pour ϕ et χ.

3. On cherche à décrire des particules de masse m dont les énergies sont proches de leur énergie de masse. les fonctions d'onde ont de fortes oscillations temporelles, typiquement comme $\exp(-imt)$. On introduit les nouveaux spineurs $\Phi = \exp(imt)\phi$ et $X = \exp(imt)\chi$ dont les oscillations sont réduites. Trouvez les équations d'évolution pour Φ et X. En supposant que $eA_0 \ll m$, montrez que X est proportionnel à Φ.

4. On peut maintenant dériver une équation fermée donnant l'évolution de Φ : $i\partial_t \Phi = \cdots$. Dans le membre de droite de cette équation, on trouve une partie proportionnelle à l'identité (par rapport aux indices de spin), et une partie qui ne l'est pas. Réécrivez cette partie en fonction du champ magnétique. Ce dernier terme correspond au couplage du spin de l'électron au champ magnétique, et donne un rapport gyromagnétique de 2.