Master CFP
Parcours physique quantique
2006-2007

THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Feuille 2

---

1 Les rotations I

Dans l'espace euclidien à 3 dimensions, on considère deux bases $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ et $(\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3)$, la seconde étant obtenue par rotation de la première d'un angle θ autour du vecteur unitaire $\hat{n}$. On souhaite déterminer comment se transforment les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ lors de ce changement de référentiel. On introduit la matrice R telle que $v'_i = R_{ij} v_j$ (où l'on utilise la convention d'Einstein sans se soucier de l'altitude des indices car on est dans un espace euclidien).

1. On considère le cas simple où $\hat{n}$ correspond au vecteur $\hat{e}_3$. Déterminez les éléments R_{ij}.

2. R_{ij} doit s'écrire comme une somme de tenseurs de rang deux. Faites la liste des tenseurs qui peuvent intervenir.

3. En comparant avec le cas particulier discuté en **1**, déterminez le préfacteur apparaissant devant chaque tenseur, et déduisez R_{ij} pour une rotation quelconque.

---

2 Les rotations II

On souhaite retrouver la formule précédente par une autre méthode. On va utiliser la formule : $R(\theta, \hat{n}) = \exp(i\theta n_a J_a)$, où $J(_k)_{ij} = -i\epsilon_{ijk}$.

1. Retrouvez les relations de commutation $[J_i, J_j]$.

2. Calculez $(J_a n_a)^2$ et $(J_a n_a)^3$. Que vaut $(J_a n_a)^\alpha$, α entier ?

3. Écrivez le développement en série de Taylor de $R(\theta, \hat{n})$ en puissance de θ^n. Simplifiez votre expression à l'aide des résultats de la question **2**. Vous pouvez maintenant exprimer les séries de Taylor à l'aide de fonctions trigonométriques. Comparez l'expression finale à celle obtenue dans l'exercice précédent.

---

3 $SU(2)$

On rappelle la définition des matrices de Pauli, qui forment une base des matrices hemitiennes de trace nulle :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrez que $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{1} + i\ \epsilon_{ijk}\ \sigma_k$.

2. Montrez que les $\sigma_i/2$ satisfont aux mêmes relations de commutation que les J_i de $SO(3)$.

3. Soit $\hat{n}$ un vecteur unitaire. Calculez $(n_i \sigma_i)^2$. Que vaut $(n_i \sigma_i)^\alpha$, α entier ?

4. Écrivez le développement de Taylor de $\exp(i\ \theta n_i \frac{\sigma_i}{2})$ en puissance de θ. En utilisant les résultats de la question précédente, simplifiez votre expression.

4 Relation entre $SU(2)$ et $SO(3)$

Dans cet exercice, on veut approfondir la relation entre $SU(2)$ et $SO(3)$ qui a été signalée en cours. L'idée est d'associer à toute matrice a de $SU(2)$ une rotation qui peut être représentée par une matrice de $SO(3)$. On veut construire explicitement cette relation, et discuter ses propriétés. On introduit la notation "slash" qui sera utile dans la suite : $\not{U}$ est la matrice 2×2 définie par $\not{U} = \sigma_i U_i$ où U_i est la i[e] composante du vecteur $\vec{U}$.

1. Soient $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ trois vecteurs, calculez $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\not{U}\not{V})$, $-\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(\not{U}\not{V}\not{W})$.

2. Montrez que si $a \in SU(2)$, alors $a^\dagger \not{U} a$ est hermitienne de trace nulle. Par conséquent on peut décomposer cette matrice sur les matrices de Pauli : $a^\dagger \not{U} a = \not{U}' = U'_i \sigma_i$.

3. Montrez que $(U'_i)^2 = U_i^2$. À quel type de transformation géométrique ceci correspond ?

4. On note $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base de l'espace euclidien, et $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ obtenue après transformation des vecteurs de base[1]. Calculez $\mathrm{Tr}(\not{e}'_1 \not{e}'_2 \not{e}'_3)$. La transformation peut-elle correspondre à une symétrie par rapport à un plan ?

5. Montrez que lors du changement de base, les composantes d'un vecteur se transforment comme $U'_i = R_{ij} U_j$, $R_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j$.

6. Exprimez R_{ij} en fonction de a.

7⋆. En utilisant la paramétrisation des matrices de $SU(2)$ obtenue dans l'exercice 3, et en utilisant la formule précédente, montrez que l'on retrouve la paramétrisation des matrices de $SO(3)$ obtenue dans les exercices 1 et 2.

8. On décide de paramétrer le matrices de $SO(3)$ et $SU(2)$ par un vecteur à 4 composantes $\underline{S} = (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\hat{n})$ Vérifiez que ce quadrivecteur est de norme unité (avec une métrique euclidienne). Pour $SU(2)$, les rotations sont représentées par un point sur la sphère à 3 dimensions S_3 plongée dans un espace à 4 dimensions, alors que pour les matrices $SO(3)$, elles sont représentées par un point sur S_3 avec les points diamétralement opposés identifiés. Cet espace s'appelle RP_3, et peut être vu comme l'hémisphère nord de la sphère S_3 où l'on identifie les points diamétralement opposés de l'équateur.

9. Il est difficile de se représenter S_3. Pour simplifier, on va étudier la différence entre RP_2 et S_2. Représentez ces deux espaces. Montrez qu'il existe dans RP_2 un chemin fermé qui ne peut pas être continûment déformé en un chemin trivial. Que se passe-t'il si l'on combine (en collant bout à bout) deux chemins topologiquement non triviaux ? Que se passe-t'il dans S_2 ?

10 ⋆. Étudiez les chemins fermés non triviaux sur la sphère S_1.

5 Décomposition en représentations irréductibles

On considère un tenseur T_{ij} (i variant de 1 à 3) qui se transforme, lors d'un changement de base comme : $T'_{ij} = R_{ik} R_{jl} T_{kl}$ où R est une matrice de $SO(3)$. On veut mettre en évidence que certaines combinaisons des composantes du tenseur se transforment entre elles, sans influencer d'autres combinaisons.

1. Vérifiez que la trace de T est invariant. Conclusion ?

2. Vérifiez que les composantes de la partie antisymétrique $A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ se transforment entre eux. On introduit $V_i = \epsilon_{ijk} A_{jk}$. Comment se transforment ces quantités sous une rotation infinitésimale ?

3. Vérifiez que les composantes de la partie symétrique $S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$ se transforment entre elles.

4. Pour construire une représentation irréductible à partir de S, il faut enlever la trace (qui forme une représentation irréductible). On introduit donc $s_1 = S_{11} - S_{33}$, $s_2 = S_{12}$, $s_3 = S_{13}$, $s_4 = S_{22} - S_{33}$ et

[1] Comme on travaille dans le point de vue passif, on utilise la transformation précédente pour construire la nouvelle base en fonction de l'ancienne. Ainsi $a^\dagger \not{e}_i a = \not{e}'_i$. En revanche, les vecteurs physiques ne sont pas changés.

$s_5 = S_{23}$ qui forment une base pour les tenseurs symétriques de trace nulle. Déterminez les générateurs J_i des rotations dans les directions x, y et z dans cette base. Vérifiez qu'on retrouve les relations de commutation attendues.

5. Calculez J_i^2. quel est le spin de cette représentation ?

---

6 Permutation de trois éléments

On considère l'ensemble des permutations de trois éléments. On note $\{213\}$ l'opération de permutation des deux premiers éléments, $\{231\}$ l'opération où 1 est remplacé par 2, 2 par 3 et 3 par 1, etc.

1. Vérifiez que l'ensemble des permutations muni de la loi de composition forme un groupe. Combien y a-t'il d'éléments ? Est-ce un groupe commutatif ?

2. Une représentation naturelle de ce groupe est donné par des matrices 3×3, telles que $\{213\}$ est associé à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

etc. On se demande si cette représentation est réductible. Pour cela, vérifiez qu'il existe un vecteur inchangé par toutes les matrices de la représentation. Conclusion ?

3. Construisez une matrice unitaire S correspondant à un changement de base, telle que dans la nouvelle base la représentation est bloc-diagonale.

4⋆. Quelle interprétation géométrique peut-on donner à notre groupe ? Comment interpréter le fait que la représentation est réductible ?