Feuille 5.

1] $\partial_t \Psi = -iE\,\Psi$.

$\partial_z \Psi = i k\,\Psi$.

$$(i\cancel{\partial}-m)\Psi = \begin{pmatrix} (E-m)\mathbb{1} & -p\,\sigma_3 \\ p\,\sigma_3 & (-E-m)\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} E-m-\frac{p^2}{E+m} \\ 0 \\ p-p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E^2-p^2-m^2}{E+m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Cette onde plane décrit un electron se propageant vers les z positifs, d'énergie E, de spin $+\frac{1}{2}$.

2] onde réfléchie : se propage vers les z négatifs.

$$\Psi_1 = a\,e^{-i(Et+pz)}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour la polarisation } +\tfrac{1}{2}.$$

$$+\; b\,e^{-i(Et+pz)}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \end{pmatrix} \quad \text{pour la polarisation } -\tfrac{1}{2}.$$

Vérifions que Dirac est vérifié avec la polarisation $-\frac{1}{2}$:

$$(i\gamma\partial - m)\psi_2 = \begin{pmatrix} (E-m)\mathbb{1} & +p\,\sigma_3 \\ -p\,\sigma_3 & (-E-m)\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E-m-\frac{p^2}{E+m} \\ 0 \\ p-p \end{pmatrix}$$

$= 0 \Rightarrow$ OK.

pour l'onde transmise, on cherche une solution en

$e^{-i(Et+qz)}$ $\Rightarrow$ même fréquence d'oscillation temporelle, seul moyen d'avoir continuité pour tous les temps...

on cherche alors $\psi = e^{-i(Et-qz)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} E-m-V_0 & -q\,\sigma_3 \\ q\,\sigma_3 & -(E+m-V_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E-m-V_0-q\,a \\ 0 \\ q-a(E+m-V_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ $a = \frac{q}{E+m-V_0}$, $E-V_0-m-\frac{q^2}{E-V_0+m} = (E-V_0)^2-m^2-q^2$

$\hookrightarrow \; q^2 = (E-V_0)^2 - m^2.$

$$\hookrightarrow \; \psi_r(z) = c\, e^{-i(Et-qz)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{q}{E-V_0+m} \\ 0 \end{pmatrix}$$ pour la polarisation $+\frac{1}{2}$

$$+ d\, e^{-i(Et-qz)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{q}{E-V_0+m} \end{pmatrix}$$ $-\frac{1}{2}$

continuité de $z=0$

$$\begin{cases} 1 + a = c \\ b = d \\ \frac{p}{E+m} - \frac{p}{E+m} a = \frac{q}{E-V_0+m}\, c \\ \frac{p}{E+m}\, b = -d \frac{q}{E-V_0+m}. \end{cases}$$

$$r = \frac{q}{p}\,\frac{E+m}{E-V_0+m}$$

$$\begin{cases} 1+a = c \\ b = d. \\ 1-a = r c \\ b = -r d \end{cases}$$

en général, $b=d=0$

sauf si $r=-1$, mais alors

$1=0 \Rightarrow$ impossible... effet.

$$r^2 = \frac{(E-V_0)^2 - m^2}{E^2-m^2}\left(\frac{E+m}{E-V_0+m}\right)^2 = 1$$

$$\hookrightarrow \frac{E-V_0-m}{E-V_0+m}\,\frac{E+m}{E-m} = 1$$

$$\hookrightarrow \cancel{E^2} - EV_0 - \cancel{mE} + \cancel{mE} - mV_0 - \cancel{m^2} = \cancel{E^2} - EV_0 + \cancel{mE} - \cancel{mE} + mV_0 - \cancel{m^2}$$

$\hookrightarrow V_0 = 0 \;\; \hookrightarrow r = 1$

$$\begin{cases} c = \frac{2}{1+r} \\ a = \frac{2}{1+r} - 1 = \frac{1-r}{1+r}. \end{cases}$$

4) $$j_i = \bar{\Psi}\, \gamma^3\, \Psi$$

$$= \left(1, 0, \frac{p}{E+m}, 0\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$= \left(1\ 0\ \frac{p}{E+m}, 0\right) \begin{pmatrix} \frac{p}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\, \frac{p}{E+m}.$$

$$j_r = -\frac{2p}{E+m}\, |a|^2.$$

$$j_t = \frac{2q}{E-V_0+m}\, |c|^2.$$

$$R = |a|^2 = \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2$$

$$T = r\,|c|^2 = \frac{4r}{(1+r)^2}$$

$$R+T = \frac{(1+r)^2}{(1+r)^2} = 1.$$ $\Rightarrow$ conservation de la probabilité

5) Pour avoir une solution qui se propage pour $z>0$, il faut que $q^2>0 \rightarrow$ soit ~~$E > \ldots$~~ $V_0 < E - m$

soit

$V_0 > E+m$
$\Downarrow$
possible si $V_0 > 2m$

Si $V_0 > E + m$, $\kappa < 0$

$\hookrightarrow T < 0$ $\quad R > 1$

T et R ne sont donc pas des probabilités de reflexion et de transmission...

En fait, si $V_0 > 2m$, on peut créer des paires e^+e^- les e^+ transmis donnant une contribution au j_+ de signe opposé, ce qui explique $T < 0$.

$\boxed{2}$

1) $E_n = - \dfrac{m\alpha^2}{2\, n^2}$

$n' + \ell + 1 = n$ avec $n' \geq 0$, $\ell \geq 0$

$\hookrightarrow$ $n' = 0$, $\ell = n-1$; $n' = 1$, $\ell = n-2$; -- ; $n' = n-1$, $\ell = 0$

dégénérescence : $2n-1$; $2n-3$; 1

$\hookrightarrow$ dégénérescence : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} (2p+1) = 2\,\frac{(n-1)n}{2} + n = n^2$

2) $p^\mu = i\,\partial^\mu$

$\hookrightarrow$ $\left[(p^\mu - eA^\mu)(p_\mu - eA_\mu) - m^2\right]\psi = 0$

$(-)\left[\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)^2 + \Delta - m^2\right]\psi = 0$ $\quad$ $\left(= E^2 - p^2 \ldots = E^2 + \Delta \right)$

$\left[-\partial_r^2 - \frac{2}{r}\partial_r + \frac{L^2 - \alpha^2}{r^2} - \frac{2\alpha E}{r} - (E^2 - m^2)\right]\psi = 0$

à comparer à :

$\left[-\partial_r^2 - \frac{2}{r}\partial_r + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2m\alpha}{r} - 2mE\right]\psi = 0$

$$\begin{cases} \ell'(\ell'+1) = \ell(\ell+1) - \alpha^2 \\ \alpha' = \dfrac{\alpha E}{m} \\ E' = \dfrac{E^2 - m^2}{2m} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \quad E' = -\frac{m\alpha'^2}{2(n'+\ell'+1)^2}$$

$$\frac{E^2 - m^2}{2m} = -\frac{m\alpha^2 E^2}{2m^2 (n'+\ell'+1)^2}.$$

$$E^2 - m^2 = -\alpha^2 \frac{E^2}{(n'+\ell'+1)^2}.$$

$$E^2 = \frac{m^2}{1 + \frac{\alpha^2}{(n'+\ell'+1)^2}}.$$

$$\ell' = \ell + \delta_\ell$$

$$(\ell+\delta_\ell)(\ell+\delta_\ell+1) = \ell(\ell+1) - \alpha^2 = \ell(\ell+1) + \delta_\ell(2\ell+1) + \delta_\ell^2$$

$$\hookrightarrow \quad \delta_\ell^2 + (2\ell+1)\delta_\ell + \alpha^2 = 0$$

$$\delta_\ell = \frac{-(2\ell+1) \pm \sqrt{(2\ell+1)^2 - 4\alpha^2}}{2} = -\left(\ell+\tfrac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(\ell+\tfrac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}$$

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{(n+\delta_\ell)^2}}}$$

$$\delta_\ell = -\left(\ell+\tfrac{1}{2}\right) + \left(\ell+\tfrac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2}\right) + o(\alpha^4)$$

$$= -\frac{\alpha^2}{2\ell+1} + o(\alpha^4)$$

$$\frac{1}{(n+\delta_\ell)^2} = \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{\delta_\ell}{n}\right)^{-2} = \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{2\delta_\ell}{n}\right)$$

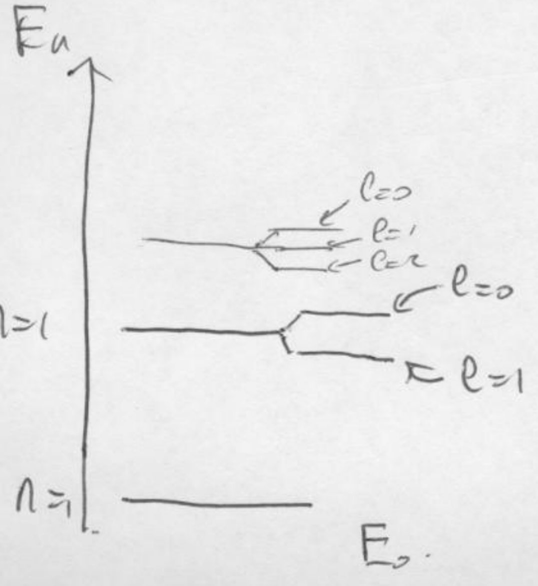
$$= \frac{1}{n^2} + \frac{2\alpha^2}{(2\ell+1)n^3}.$$

$$E = m\left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2} + \frac{2\alpha^4}{(2\ell+1)n^3}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

modifie l'énergie du niveau

$$= m\left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{(2\ell+1)n^3} + \frac{3}{8}\frac{\alpha^4}{n^4}\right) + o(\alpha^6).$$

lève la dégénérescence à l'intérieur d'un niveau



5) $$\left[i\not\partial - e\not A - m\right]\psi = 0$$

$$\left[i\not\partial - e\not A + m\right]\left[i\not\partial - e\not A - m\right]\psi = 0$$

$$\left(\left(i\not\partial - e\not A\right)^2 - m^2\right)\psi = 0$$

$$\cancel{\left(\left(E \pm \frac{\alpha}{r}\right)^2 + (i\partial_i\right.}$$

$$\left[(i\partial_\mu - eA_\mu)(i\partial_\nu - eA_\nu)\gamma^\mu\gamma^\nu - m^2\right]\psi = 0$$

$$= \left[-\Box + e^2 A^\mu A_\mu - ie\gamma^\mu\gamma^\nu\left(\partial_\mu A_\nu + A_\mu\partial_\nu\right) - m^2\right]\psi$$

$$= \left[-\Box - m^2 + e^2 A^\mu A_\mu - 2ie\, A_\mu\partial^\mu - ie\,\gamma^\mu\gamma^\nu(\partial_\mu A_\nu)\right]\psi.$$

$$-\frac{ie}{2}\Big(\underbrace{[\gamma^\mu,\gamma^\nu]}_{\sigma} + \underbrace{\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}}_{g^{\mu\nu}}\Big)(\partial_\mu A_\nu)\Big]\psi$$

6) Dans la jauge de Lorentz, $\partial_\mu A^\mu = 0 \ldots \quad eA^0 = -\frac{\alpha}{r}$

$$\hookrightarrow \quad \left[(i\partial_t)^2 + \Delta - m^2 + e^2 A^\mu A_\mu - 2eA^0(i\partial_t) - \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\psi = 0$$

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\vec\nabla V = E_i$$

$$i\partial_t \Rightarrow E$$

$$\left[E^2 + \Delta - m^2 + \frac{\alpha^2}{r^2} + \frac{2\alpha E}{r} - \frac{\alpha\sigma^{0i}\hat{r}_i}{r^2}\right]\psi = 0$$

Pour les spineurs droits et gauches on obtient

$$\left[-\partial_r^2 - \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\left(L^2 - \alpha^2 \mp i\alpha\vec\sigma\cdot\hat{r}\right) - (E^2 - m^2) - \frac{2\alpha E}{r}\right]\psi_\pm = 0$$

7) $j = \ell \pm \frac{1}{2}$

* $\vec{\sigma}\cdot\hat{n}$ n'a pas d'élément diagonal car :

$$\langle \ell_\pm | \vec{\sigma}\cdot\hat{n} | \ell_\pm \rangle \propto \langle \ell_\pm | \underbrace{\sigma_x x + \sigma_y y}_{\text{Hors diagonal}} + \sigma_z z | \ell_\pm \rangle$$

$$\langle \ell_\pm | z | \ell_\pm \rangle = \int \underbrace{|Y_{\ell m}(\theta,\phi)|^2}_{\substack{\text{invariant quand}\\ \theta \to \pi-\theta}} \underbrace{\cos\theta}_{\substack{\text{change de signe quand}\\ \theta \to \pi-\theta}} \, d\Omega = 0$$

* $$(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})^2 = \hat{n}_i \hat{n}_j \sigma_i \sigma_j = (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k)\hat{n}_i \hat{n}_j = 1$$

* $(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})$ hermitien $\Rightarrow$ $\vec{\sigma}\cdot\hat{n}$ se décompose en σ_x (ou peut-être σ_y ...)

dans le cas général :

$\vec{\sigma}\cdot\hat{n} = \cos\theta\,\sigma_x + \sin\theta\,\sigma_y$; mais ça ne change rien sur le calcul des VP...

partie en $\frac{1}{r^2}$:

$$\begin{pmatrix} (j+\frac{1}{2})(j+\frac{3}{2}) - \alpha^2 & \mp i\alpha \\ \mp i\alpha & (j-\frac{1}{2})(j+\frac{1}{2}) - \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} a & b \\ b & c \end{matrix}$$

$$\cancel{\lambda = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 + 4b^2}}{2}}$$

$$\cancel{a+c = 2\left((j+\tfrac{1}{2})^2 - \alpha^2\right)}$$

$$\cancel{(a+c)^2 + b^2 = 4\left((j+\tfrac{1}{2})^2 - \alpha^2\right)^2 - 4\alpha^2}$$

$$\mu^2 - \mu(a+c) + ac - b^2 = 0$$

$$\mu = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4ac + 4b^2}}{2}$$

$$= \frac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$

$$a+c = 2\left((j+\tfrac{1}{2})^2 - \alpha^2\right)$$
$$a-c = 2(j+\tfrac{1}{2})$$

$$\mu_\pm = (j+\tfrac{1}{2})^2 - \alpha^2 \pm \sqrt{(j+\tfrac{1}{2})^2 - \alpha^2}$$

1er sol: $\lambda(\lambda+1) = \lambda^2 + \lambda = (j+\tfrac{1}{2})^2 - \alpha^2 + \sqrt{(j+\tfrac{1}{2})^2 - \alpha^2}$

2e sol: $\lambda(\lambda+1) = \lambda^2 + \lambda = (j+\tfrac{1}{2})^2 - \alpha^2 - 2\sqrt{(j+\tfrac{1}{2})^2 - \alpha^2} + 1 + \sqrt{} - 1.$

$= (j+\tfrac{1}{2}) - \alpha^2 - \sqrt{(j+\tfrac{1}{2}) - \alpha^2}$

8) $$\left[-\partial_r^2 - \frac{2}{r}\partial_r + \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2} - \frac{2\alpha E}{r} - (E^2 - m^2)\right]\psi_\pm = 0.$$

$$\begin{cases} \ell' = \lambda \\ \alpha' = \dfrac{\alpha E}{m} \\ E' = \dfrac{E^2 - m^2}{2m} \end{cases}$$

$$E' = -\frac{m\alpha'^2}{2\,(l'+n'+1)^2}$$

$$\frac{E^2-m^2}{2m} = -\frac{m\alpha^2E^2}{2m^2\,(\lambda+n'+1)^2}$$

$$E^2 = \frac{m^2}{1+\frac{\alpha^2}{(\lambda_\pm+n'+1)^2}} \qquad E = \frac{m}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{(\lambda_\pm+n'+1)^2}}}$$

8] $$\lambda_\pm = \sqrt{(j+\tfrac{1}{2})^2-\alpha^2} - \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} = j \pm \tfrac{1}{2} + \delta_j$$

$$\delta_j = \sqrt{(j+\tfrac{1}{2})^2-\alpha^2} - (j+\tfrac{1}{2})$$

$$= (j+\tfrac{1}{2})\left(1-\frac{\alpha^2}{2(j+\frac{1}{2})^2}\right) - (j+\tfrac{1}{2}) = -\frac{\alpha^2}{2(j+\frac{1}{2})} = -\frac{\alpha^2}{2j+1}$$

$$E = \frac{m}{\left(1+\frac{\alpha^2}{(n+\delta_j)^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = m - \frac{m\alpha^2}{2n^2} - \frac{m\alpha^4}{n^3(2j+1)} + \frac{3}{8}\frac{\alpha^4}{n^4}$$

9] $n=2$.

$l=1 \rightarrow j=\frac{1}{2}$. or $j=\frac{3}{2}$.

$$E_{2,P,\frac{3}{2}} - E_{2,P,\frac{1}{2}} = -\frac{m\alpha^4}{8}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{m\alpha^4}{32}$$

Si on réintroduit les puissances de c :

$$\Delta E = \frac{m c^2 \alpha^4}{32}$$

$m c^2$: 0,5 meV

$\frac{m c^2 \alpha^2}{2}$: 13,6 eV (énergie d'ionisation).

$$\Delta E = \frac{m c^2 \alpha^4}{32} = 4\ 10^{-5}\ \mathrm{eV}$$

exprimé en fréquence : $\Delta E = \frac{4\ 10^{-5} \times 1{,}6\ 10^{-19}}{6{,}6\ 10^{-34}} = 10\ \mathrm{GHz}.$