

Marche aléatoire 2

1 Équation de la diffusion

On considère l'équation de la diffusion (avec $D = 1$) donnant la probabilité $P(x, t)$ qu'une particule soit en x à l'instant t :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2},$$

avec la condition initiale $P(x, 0)$ supposée connue.

▷ **1-1** Déterminer l'équation vérifiée par la fonction caractéristique $\phi(u, t)$ de $P(x, t)$:

$$\phi(u, t) = \int e^{iux} P(x, t) dx.$$

En déduire $\phi(u, t)$.

▷ **1-2** En prenant la transformée de Fourier inverse, montrer que l'on a

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int dx' P(x', 0) e^{-\frac{(x-x')^2}{4t}}.$$

En déduire la solution dans le cas où $P(x, 0) = \delta(x)$.

2 La formule de Black-Scholes pour un “call”

Dans le cours nous avons démontré l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (1)$$

où $V(S, t)$ est la valeur de l'option, S et σ sont respectivement la valeur et la volatilité de l'actif sous-jacent, et r le taux d'intérêt. La solution de cette équation dépend bien sûr des conditions aux limites qui caractérisent le produit dérivé considéré. Ainsi, pour une option d'achat européenne (call), $V = C$, on a à maturité $t = T$:

$$C(S, T) = \max(0, S - K), \quad (2)$$

où K est le prix d'exercice (strike). Il existe deux autres conditions aux limites pour $S = 0$ et $S \rightarrow \infty$:

$$C(0, t) \sim 0 \quad \text{pour } S = 0 \quad (3)$$

$$C(S, t) \sim S \quad \text{pour } S \rightarrow \infty. \quad (4)$$

▷ **2-1** Justifier ces deux conditions aux limites.

L'objectif de ce problème est de trouver la solution à l'équation de Black-Scholes qui vérifient les conditions aux limites (2), (3) et (4). Une méthode est d'effectuer le changement de variables suivant :

$$S = Ke^x \quad (5)$$

$$t = T - \tau / \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (6)$$

$$C = Kv(x, \tau). \quad (7)$$

▷ **2-2** Montrer que l'équation (1) s'écrit alors

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv, \quad (8)$$

où k est une constante sans dimension que l'on précisera.

▷ **2-3** Que deviennent les conditions aux limites (2), (3) et (4) appliquées à la fonction $v(x, \tau)$?

A nouveau, on peut réaliser le changement de variables suivant :

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau),$$

où α et β sont des constantes à déterminer.

▷ **2-4** Quelles sont les expressions de α et β qui permettent d'éliminer les termes en u et en $\frac{\partial u}{\partial x}$ dans la nouvelle équation obtenue à partir de l'équation (8) ? Identifier cette équation et préciser la condition initiale $u(x, 0)$.

▷ **2-5** En utilisant les résultats de la première partie, montrer que $u(x, \tau)$ peut se mettre sous la forme

$$u(x, \tau) = I_1 - I_2,$$

où

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

et I_2 est l'intégrale obtenue en remplaçant $(k+1)$ par $(k-1)$ dans I_1 .

▷ **2-6** Exprimer I_1 et I_2 en fonction de la fonction de répartition $N(x)$ de la loi normale centrée et réduite :

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

On introduira les variables d_1 et d_2 :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{(k+1)}{2} \sqrt{2\tau} \\ d_2 &= \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{(k-1)}{2} \sqrt{2\tau}. \end{aligned}$$

▷ **2-7** En déduire que

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

où

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

▷ **2-8** La quantité $\frac{\partial C}{\partial S}$ donne la quantité relative d'actifs sous-jacents et de produits dérivés dans le portefeuille. Montrer que :

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1).$$

Pour cela, on pourra montrer que $SN'(d_1)/N'(d_2) = Ke^{-r(T-t)}$.

3 La formule de Black-Scholes pour un “put”

La valeur d’une option de vente européenne (put), $V = P$, obéit à la même équation de Black-Scholes (1). Seules les conditions aux limites changent. Ainsi, on a à maturité $t = T$:

$$P(S, T) = \max(0, K - S). \quad (9)$$

▷ **3-1** Montrer que les deux autres conditions aux limites sont

$$P(0, t) \sim Ke^{-r(T-t)} \quad \text{pour } S = 0 \quad (10)$$

$$P(S, t) \sim 0 \quad \text{pour } S \rightarrow \infty. \quad (11)$$

▷ **3-2** Supposons qu’un portefeuille Π soit constitué d’un actif, d’une option de vente P et d’une option d’achat C (de même maturité T et de même prix d’exercice K) tels que :

$$\Pi = S + P - C.$$

Quelle est la valeur du portefeuille à maturité? En déduire l’équation de parité call/put :

$$S(t) + P(S, t) - C(S, t) = Ke^{-r(T-t)}. \quad (12)$$

▷ **3-3** En déduire la valeur d’une option de vente :

$$P(S, t) = -SN(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}N(-d_2),$$

et

$$\frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1.$$