Marches aléatoires 1

1 Équation de Langevin et corrélation de la vitesse

Dans la théorie de Langevin, le déplacement carré moyen $\langle x^2 \rangle$ peut être calculé à partir de la fonction de corrélation de la vitesse.

▹ **1-1** Exprimer $x(t)$ en fonction de $v(t)$ et en déduire l'expression de $\langle x^2 \rangle(t)$ en fonction de $\langle v(t')v(t'') \rangle$.

▹ **1-2** En supposant le processus stationnaire, les corrélations de la vitesse ne dépendent que de l'intervalle de temps $s = t'' - t'$: $\langle v(t')v(t'') \rangle = \langle v(0)v(s) \rangle = K(s)$. Montrer que

$$\langle x^2 \rangle(t) = 2 \int_0^t ds(t-s)K(s).$$

On représentera pour cela le domaine d'intégration dans le plan $t' - s$ puis dans le plan $s - t'$.

▹ **1-3** En utilisant l'équation de Langevin, montrer que

$$\frac{dK(s)}{ds} = -\gamma K(s).$$

En déduire la fonction de corrélation des vitesses, $K(s)$.

▹ **1-4** Retrouver l'expression du déplacement carré moyen.

2 Position maximale d'une marche aléatoire

La position maximale $S_{max} \geq 0$ d'une marche aléatoire symétrique de n pas est par définition

$$S_{max} = \max(S_0, S_1, ..., S_n),$$

où S_i est la position de la particule au i^{eme} pas. Pour commencer, on considère les chemins se terminant à la position $S_n = k$, correspondant au point $\mathbf{A}(n,k)$ dans le plan $\{n, S_n\}$.

▹ **2-1** En utilisant le principe de réflexion, calculer le nombre de chemins de n pas (partant de l'origine et se terminant en $S_n = k$) qui visitent la position $S = r \geq k$. En déduire que la probabilité qu'un chemin de n pas (partant de l'origine et se terminant en $S_n = k$) ait un maximum $S_{max} \geq r$ est donnée par

$$Pr(S_n = k,\ S_{max} \geq r) = p_{n,2r-k},$$

où $p_{n,2r-k}$ est la probabilité d'être en $S_n = 2r - k$ au n^{eme} pas.

▹ **2-2** Quelle est la probabilité $Pr(S_n = k,\ S_{max} = r)$ que le maximum d'un chemin de n pas (partant de l'origine et se terminant en $S_n = k$) vaille *exactement* $S_m = r$?

▹ **2-3** En déduire la probabilité $Pr(S_{max} = r)$ qu'un chemin *quelconque* de n pas (ne se terminant pas forcément en $S_n = k$) ait un maximum qui vaille exactement $S_m = r$.

3 Premier passage par une position donnée

Un premier passage par la position $S = r > 0$ à l'instant n est l'événement :

$$S_1 < r, \quad S_2 < r, \quad \ldots \quad S_{n-1} < r, \quad S_n = r.$$

$\triangleright$ **3-1** En raisonnant avec le point $\mathbf{B}(n-1, r-1)$ du plan $\{n, S_n\}$, montrer que la probabilité $\phi_{n,r}$ que le premier passage en r ait lieu à l'instant n est donnée par

$$\phi_{n,r} = \frac{1}{2}[p_{n-1,r-1} - p_{n-1,r+1}].$$

$\triangleright$ **3-2** En déduire que

$$\phi_{n,r} = \frac{r}{n 2^n} C_n^{\frac{n+r}{2}}.$$

$\triangleright$ **3-3** Quelle est la distribution limite de $\phi_{n,r}$ pour n grand ?

4 r^{eme} retour à l'origine

Nous allons à présent calculer la probabilité que le r^{eme} retour à l'origine ait lieu à l'instant n.

$\triangleright$ **4-1** Considérer un chemin C_- de n pas qui se termine en $S_n = 0$ après avoir touché $r-1$ fois l'origine tout en restant du même coté de l'axe On, par exemple négatif (voir Fig. 1). Il est donc constitué de r sections négatives dont les extrémités sont en $S = 0$. Combien de chemins peut-on construire à partir de C_- en prenant les sections symétriques de C_- par rapport à l'axe On ? En déduire le nombre N_r de chemins de n pas qui se terminent par un r^{eme} retour à l'origine en fonction du nombre N_- de chemins C_-.

$\triangleright$ **4-2** Construire, à partir du chemin C_- représenté sur la figure 1, le chemin C' partant de l'origine obtenu en supprimant les r pas qui *partent* de l'origine. Quelle est la longueur et la position finale du chemin C' ?

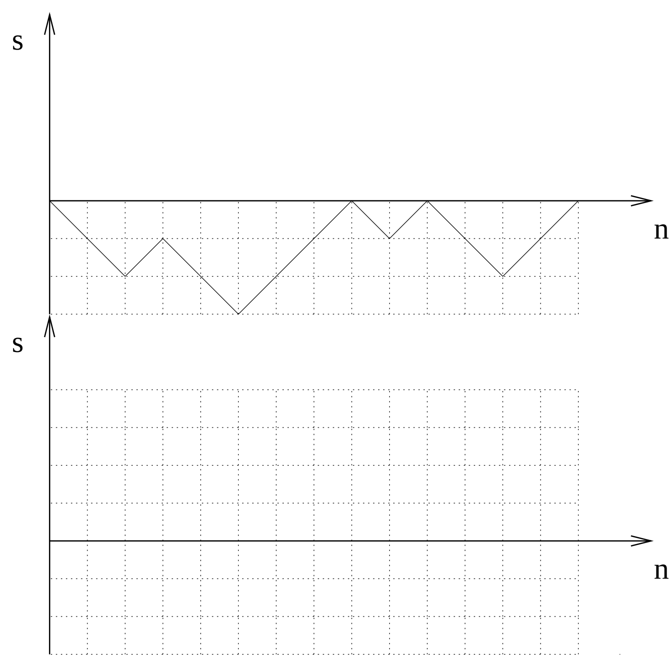

FIG. 1 – Chemin de $n = 14$ pas qui revient $r = 3$ fois à l'origine.

$\triangleright$ **4-3** En utilisant les résultats de la section 2, donner l'expression de N_- et montrer que la probabilité que le r^{eme} retour à l'origine ait lieu à l'instant n est $\phi_{n-r,r}$.