Probabilités 2

1 Où l'événement le plus improbable détermine la moyenne

Soit X une variable aléatoire discrète pouvant prendre les valeurs 0 et 2 avec la même probabilité.

▷ **1-1** Calculer $\langle X \rangle$ et σ_X^2.

▷ **1-2** Soit $Y = X_1 X_2 \cdots X_n$ une autre variable aléatoire ; chaque x_i représente une réalisation (indépendante) de la variable X. Calculer $\langle Y \rangle$ et σ_Y^2.

2 Estimation de la taille d'un échantillon

Une boîte contient N boules numérotées de 1 à N. Soit X le numéro le plus élevé qui ait été sélectionné en n tirages aléatoires (on replace la boule dans l'urne à chaque tirage).

▷ **2-1** Quelle est la probabilité $Pr(X \leq k)$ que X soit inférieure ou égale à k ?

▷ **2-2** En déduire la probabilité $P_k = Pr(X = k)$ que X soit exactement égale à k ? Exprimer la valeur moyenne $< X >$ du numéro le plus élevé en fonction de la somme $\sum_k (k-1)^n$.

▷ **2-3** Pour N grand, la somme $\sum_k (k-1)^n$ tend vers une intégrale. Montrer alors que $< X > \simeq \frac{n}{n+1} N$.

▷ **2-4** Application : Dans une ville, les voitures sont numérotées par leur plaque d'immatriculation à partir de 1. On réalise plusieurs séries de 3 tirages indépendants qui donnent un nombre moyen pour le numéro de plaque le plus élevé de 3000. En déduire une estimation du nombre de voitures dans la ville.

3 Distribution Gamma

Soit X une variable aléatoire distribuée selon une loi normale centrée de variance σ^2. Déterminer la distribution de probabilité de la variable $Y = X^2$ (on l'exprimera en fonction de $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$).