

Probabilités 1

1 Où il ne faut pas confondre corrélations et causalité

Commenter les affirmations suivantes :

- ▷ **1-1** Les compagnies d'assurance ont observé que plus de 80% des accidents de voiture se produisaient à moins de 30 km du domicile des conducteurs. On en a conclu que l'habitude du trajet impliquait un manque de vigilance.
- ▷ **1-2** Il a été prouvé que l'espérance de vie des personnes qui, à 60 ans, pratiquaient régulièrement le jogging, était significativement supérieure à la moyenne générale. Ce qui démontre le bénéfice de cette activité.
- ▷ **1-3** La preuve que les français n'aiment pas travailler : 40% des arrêts de travail ont lieu autour des week-ends.

2 Les trois mousquetaires

Les trois mousquetaires (4 personnes donc) ont mélangé leurs bottes dans le couloir d'une auberge. D'Artagnan se lève le premier et prend 2 bottes au hasard. Calculer la probabilité pour que :

- ▷ **2-1** Les 2 bottes soient les siennes.
- ▷ **2-2** Les 2 bottes forment une paire.
- ▷ **2-3** Les 2 bottes soient deux pieds droits.
- ▷ **2-4** Les 2 bottes appartiennent à deux personnes différentes.

3 Les vaches

On suppose que les vaches ont une probabilité $p_m = 10^{-4}$ d'être malades et qu'on dispose d'un test qui produit $p_{fp} = 0.2\%$ de faux positifs¹ et $p_{fn} = 0.1\%$ de faux négatifs. Quelle est alors la probabilité qu'une vache soit déclarée malade par le test ?

4 Démographie machiste

- ▷ **4-1** Une famille a deux enfants dont un garçon. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?
- ▷ **4-2** Une famille a deux enfants dont l'aîné est un garçon. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?
- ▷ **4-3** On suppose que les couples cessent de faire des enfants dès qu'un garçon naît, sans limitation du nombre total d'enfants par couple. Y a-t-il une incidence sur le sexe ratio ?

¹C'est le taux de vaches saines accusées à tort. Les faux négatifs correspondent aux vaches malades non dépistées.

5 Le jeu télévisé

Derrière l'une des 3 portes fermées, il y a une voiture à gagner. Vous choisissez une porte. Un présentateur ouvre une des deux autres portes et vous constatez qu'elle ne cache pas de voiture. Vous avez alors la possibilité de changer votre choix de porte. Avez-vous intérêt à le faire ?

6 L'urne

On considère une urne contenant 2 boules, une noire et une blanche. On tire au hasard une boule. Si elle est noire, on la replace et on rajoute une noire. Si elle est blanche, on la replace aussi et on rajoute une blanche. On tire à nouveau une boule au hasard sur les trois et on répète le processus. Soit X_n la variable aléatoire qui représente le nombre de boules blanches au n -ième tirage. On veut calculer sa loi de distribution $P_n(k)$, c'est-à-dire la probabilité que $X_n = k$ au n -ième tirage.

- ▷ **6-1** Calculer $P_n(k)$ pour $n = 1, 2$ et 3 .
- ▷ **6-2** Ayant deviné la loi, justifier votre intuition par un raisonnement par récurrence.
- ▷ **6-3** Calculer $\langle X_n \rangle$.
- ▷ **6-4** Calculer la variance de la distribution de X_n , puis celle de $X_n - Y_n$ où Y_n est la variable aléatoire “nombre de boules noires”.

7 L'aiguille de Buffon

Ce jeu, également appelé “jeu de franc-carreau” a été étudié par Buffon² vers 1733. On considère des droites parallèles équidistantes, à la distance $2a$, posées sur un plan. On fait tomber une aiguille de longueur $2a$ “au hasard” sur le plan. Cette aiguille ne coupe pas ou coupe en un point seulement les droites. L'étude de la fréquence de ces intersections donne un calcul possible de π .

- ▷ **7-1** Soit x la distance du centre de l'aiguille à la droite la plus proche ($x < a$) et α l'angle aigu (non orienté) de l'aiguille avec la perpendiculaire aux droites parallèles. Pour un x fixé, il existe un angle maximum θ au delà duquel l'aiguille ne coupe plus. Quelle est la probabilité pour que $\alpha < \theta$?
- ▷ **7-2** Exprimer θ comme fonction de x .
- ▷ **7-3** Quelle est la probabilité pour que x soit compris entre x_0 et $x_0 + dx_0$?
- ▷ **7-4** En utilisant le théorème des probabilités composées, quelle est la probabilité pour que l'aiguille coupe une droite ?
- ▷ **7-5** Est-ce une bonne méthode expérimentale pour calculer π ?

8 Martingale

A la roulette, le rouge a la même probabilité de sortir, $p \simeq 1/2$, que le noir. En cas de victoire, le joueur gagne deux fois sa mise. Un joueur avisé adopte la technique suivante : il mise un euro sur le rouge. S'il gagne, il arrête de jouer et en cas de défaite, il double sa mise en pariant deux euros jusqu'à ce qu'il gagne. Pourquoi le joueur est-il ainsi “certain” de gagner ? Combien gagne-t-il ? Quelles sont les limites pratiques de cette martingale ?

²Georges Louis Leclerc, comte de Buffon (1707-1788) naturaliste français.