

CORRECTION : Examen 2008

Exercice 1

1-1)

Il s'agit de la loi log-normale que l'on obtient à partir de la loi normale $P(x)$ par $P(x)dx = Q(y)dy$. Soit

$$Q(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{y} e^{-\frac{(\ln y - m)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pour } y > 0.$$

Le calcul de la moyenne est simple : on trouve $\langle Y \rangle = e^{m+\sigma^2/2}$

1-2)

Soit $X_1, X_2 \dots X_N$ des variables aléatoires mutuellement *indépendantes* ayant la même distribution de probabilité,¹ c'est-à-dire la même *moyenne finie* m et la même *variance finie* σ^2 . Leur moyenne arithmétique, qui s'écrit

$$M_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i,$$

est une variable aléatoire distribuée selon une loi de probabilité² qui tend vers la loi normale de moyenne m et de variance σ^2/N lorsque $N \rightarrow \infty$:

$$P(m_N) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\frac{\sigma}{\sqrt{N}})} e^{-\frac{(m_N - m)^2}{2(\frac{\sigma}{\sqrt{N}})^2}}. \quad (1)$$

Exercice 2

2-1)

On doit avoir $P(0) \geq 0$ donc $\lambda \leq \frac{1-p}{p}$.

La loi $P(n)$ doit être normalisée donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1 - \frac{\lambda p}{1-p} + \sum_{n=1}^{\infty} a \lambda p^n = 1 - \frac{\lambda p}{1-p} + a \lambda \frac{p}{1-p} = 1,$$

donc $a = 1$.

2-2)

Comme $p < 1$:

$$\langle N \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n P(n) = \lambda p \sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} = \lambda p \frac{d}{dp} \left(\sum_{n=1}^{\infty} p^n \right) = \lambda p \frac{d}{dp} \left(\frac{p}{1-p} \right) = \frac{\lambda p}{(1-p)^2},$$

et

$$\langle N^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(n) = \lambda p \frac{d}{dp} \left(p \frac{d}{dp} \sum_{n=1}^{\infty} p^n \right) = \lambda p \frac{d}{dp} \left(\frac{p}{(1-p)^2} \right) = \lambda p \frac{1+p}{(1-p)^3}.$$

¹Plus généralement, il n'est pas indispensable que ces variables aient la même distribution. Il suffit qu'elles aient la même valeur moyenne et la même variance et qu'elles soient finies.

²C'est en fait une densité de probabilité : en passant à la limite $N \rightarrow \infty$, M_N devient une variable continue variant de $-\infty$ à $+\infty$.

Donc

$$Var(N) = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \lambda p \frac{1+p}{(1-p)^3} - \frac{\lambda^2 p^2}{(1-p)^4} = \frac{\lambda p}{(1-p)^4} (1-p^2 - \lambda p).$$

2-3)

Pour un nombre total de moustique égale à n , le nombre de moustiques qui piquent Nicolas suit la loi binomiale pour $0 \leq k \leq n$:

$$Pr(K = k) = C_n^k \frac{1}{2^n}.$$

Si $n = 0$, $Pr(0, 0) = P(0) = 1 - \frac{\lambda p}{1-p}$.

Si $n > 0$, alors $0 \leq k \leq n$, les événements étant indépendants :

$$Pr(n, k) = P(n) \cdot Pr(K = k) = C_n^k \frac{1}{2^n} \lambda p^n.$$

2-4)

Probabilité $Q(0)$ que Nicolas ne soit pas piqué : il n'y pas de moustiques, ou il y en a $n \geq 1$ qui ne piquent pas ($k = 0$). Donc

$$Q(0) = Pr(0, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} Pr(n, 0) = 1 - \frac{\lambda p}{1-p} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^0 \frac{1}{2^n} \lambda p^n = 1 - \frac{\lambda p}{1-p} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p}{2}\right)^n = 1 - \frac{\lambda p}{1-p} + \frac{\lambda p}{2-p} = 1 - \frac{\lambda p}{(1-p)(2-p)}.$$

Probabilité $Q(k)$ que Nicolas soit piqué $k > 0$ fois : il faut que $n \geq k$

$$Q(k) = \sum_{n=k}^{\infty} Pr(n, k) = \lambda \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k \left(\frac{p}{2}\right)^n = \frac{\lambda}{k!} \left(\frac{p}{2}\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{p}{2}\right)^{n-k} = \frac{\lambda}{k!} \left(\frac{p}{2}\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) \left(\frac{p}{2}\right)^{n-k}$$

On reconnaît la dérivée kème de $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$ par rapport à $x = p/2$ et qui donne

$$k!(1-x)^{-(k+1)},$$

donc

$$Q(k) = \frac{\lambda}{k!} \left(\frac{p}{2}\right)^k \frac{k!}{(1-\frac{p}{2})^{k+1}} = \frac{2\lambda p^k}{(2-p)^{k+1}}.$$

Exercice 3

3-1)

Pour $k = 0$ secondes : le piéton peut traverser immédiatement la rue.

Il n'y a donc pas de voitures pendant au moins 3 secondes avec la probabilité $P(0) = q^3$.

3-2)

En général, pour que le piéton attende k secondes, il faut que :

- une voiture passe à $t = k$ (sinon il traverserait à cet instant)
- le piéton ne dispose pas de 3 secondes consécutives sans voitures pour $t < k$
- le piéton dispose de 3 secondes consécutives sans voitures à partir de $t = k + 1$.

Utilisons la notation "0 = aucune voiture ne passe à une seconde donnée", et "1 = une voiture passe à la seconde donnée". Et les séries temporelles sont une suite d'événements indépendants.

La série correspondant aux temps k , $k + 1$, $k + 2$ et $k + 3$ est forcément 1000 (de probabilité pq^3). Pour $t < k \leq 3$, le piéton n'a pas le temps de traverser, que des voitures passent ou non aux instants $t = 1$ et $t = 2$.

On a donc pour $k = 1, 2, 3$ $p(k) = pq^3$.

On retrouve ce résultat au cas par cas :

Pour $k = 1$: on a forcément 1000 avec la probabilité,

$$P(1) = pq^3.$$

Pour $k = 2$: on a 11000 avec la probabilité p^2q^3 ou 01000 avec la probabilité pq^4 , soit

$$P(2) = pq^3(p + q) = pq^3.$$

Pour $k = 3$: on a 111000 (p^3q^3), 011000, 101000 (p^2q^4) et 001000 (pq^5), soit

$$P(3) = p^3q^3 + 2p^2q^4 + pq^5 = pq^3.$$

3-3)

Pour $k = 4$: la série correspondant aux temps 4, 5, 6 et 7 est forcément 1000 (pq^3). Au début de la série, pour $t = 1, 2$ et 3, il y a deux cas possibles : soit aucune voiture ne passe avec la probabilité q^3 (et dans ce cas le piéton pourrait traverser), soit une, deux ou trois voitures passent (et le piéton ne peut pas traverser). C'est ce dernier cas, de probabilité $1 - q^3$, qui nous intéresse. On a donc $P(4) = pq^3(1 - q^3)$.

Exercice 4

4-1)

$$C_u = \max(S_u - K, 0) = \max((1 + u)S - K, 0) \text{ ou } C_d = \max(S_d - K, 0) = \max((1 + d)S - K, 0).$$

4-2)

$$\Pi_u = C_u - \alpha(1 + u)S \text{ et } \Pi_d = C_d - \alpha(1 + d)S.$$

$$\text{On veut } \Pi_u = \Pi_d \text{ donc } C_u - \alpha_0(1 + u)S = C_d - \alpha_0(1 + d)S, \text{ soit } \alpha_0 = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} = \frac{C_u - C_d}{(u - d)S}.$$

4-3)

$$\text{A maturité le portefeuille vaut } (1 + r)\Pi = \Pi_u = \Pi_d.$$

4-4)

Donc

$$(1 + r)(C - \alpha_0 S) = C_u - \alpha_0(1 + u)S$$

soit

$$C = \frac{1}{1 + r} \left(C_u \frac{r - d}{u - d} + C_d \frac{u - r}{u - d} \right).$$

4-5)

$$S_u = 110, S_d = 90, C_u = 15, C_d = 0, \alpha_0 = 0.75 \text{ et } C \simeq 10.71$$

$$\Pi = C - \alpha_0 S = 10.71 - 75 = 64.29$$

$$\text{Si le prix monte alors } S_u = 110 \text{ et } \Pi_u = C_u - \alpha_0 S_u = 15 - .75 * 110 = -67.5$$

$$\text{Si le prix descend alors } S_d = 90 \text{ et } \Pi_d = C_d - \alpha_0 S_d = 0 - .75 * 90 = -67.5$$

Exercice 5

5-1)

$$X_n = -h, h, -hL, hL \text{ avec les probabilités } p/2, p/2, q/2 \text{ et } q/2 \text{ respectivement.}$$

5-2)

On a donc $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ avec $\langle X_i \rangle = 0$ et $Var(X_i) = h^2(p + qL^2)$ donc $\langle S_n \rangle = 0$ et comme les variables X_i sont indépendantes : $Var(S_n) = nh^2(p + qL^2)$.

5-3)

$$X_n = -h, h, -h\sqrt{n}, h\sqrt{n} \text{ avec les probabilités } p/2, p/2, q/2 \text{ et } q/2 \text{ respectivement.}$$

On a $\langle X_i \rangle = 0$ et $Var(X_i) = h^2(p + qi)$ donc $\langle S_n \rangle = 0$ et comme les variables X_i sont indépendantes :

$$Var(S_n) = \sum_i h^2(p + qi) = h^2(np + q\frac{n(n+1)}{2}) \simeq n^2 \frac{qh^2}{2}.$$

Donc $\langle S_n^2 \rangle \sim t^2$ (où $t = n\tau$), il s'agit d'un régime balistique.

5-4)

$$P(x, t + \tau) = \frac{p}{2}P(x - h, t) + \frac{p}{2}P(x + h, t) + \frac{q}{2}P(x - Lh, t) + \frac{q}{2}P(x + Lh, t).$$

5-5)

$$P(x, t + \tau) - P(x, t) = \frac{p}{2}(P(x - h, t) - P(x, t)) + \frac{p}{2}(P(x + h, t) - P(x, t)) + \frac{q}{2}(P(x - Lh, t) - P(x, t)) + \frac{q}{2}(P(x + Lh, t) - P(x, t)).$$

En passant à la limite et en ne conservant que les termes d'ordres le plus bas on obtient :

$$\tau \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = 2 \frac{p}{2} \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + 2 \frac{q}{2} \frac{(Lh)^2}{2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2},$$

donc

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2},$$

où

$$D = (p + qL^2) \frac{h^2}{2\tau}.$$

5-6)

On retrouve la variance. En effet :

$$Var(S_n) = \langle S_n^2 \rangle = nh^2(p + qL^2) = 2t(p + qL^2) \frac{h^2}{2\tau} = 2Dt,$$

où on a posé $t = n\tau$.

Si $q = 0$ alors $p = 1$ on retrouve la marche aléatoire de sauts h .

Si $q = 1$ alors $p = 0$ on retrouve la marche aléatoire de sauts Lh .