M2 Statistique et Finance
2007-2008

Probabilités et Physique statistique

Examen de Probabilités et Physique statistique

lundi 4 février 2008 - durée : 3h
Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

1 Questions de cours indépendantes

▷ **1-1** Soit X une variable aléatoire distribuée selon une loi normale de moyenne m et de variance σ^2. Déterminer l'expression de la distribution de la variable $Y = e^X$. Quel est le nom de cette distribution ? Calculer $\langle Y \rangle$.

▷ **1-2** Énoncer le théorème de la limite centrale.

2 Les moustiques

Le nombre de moustiques qui pénètrent dans la chambre de Carla et Nicolas est une variable aléatoire N dont la loi de probabilité est donnée par

$$P(0) = 1 - \frac{\lambda p}{1-p} \quad \text{et} \quad P(n) = a\lambda p^n \quad \text{pour} \quad n > 0, \tag{1}$$

où a, λ et $p < 1$ sont des constantes positives.

▷ **2-1** Quelle condition doit vérifier $P(0)$? Calculer la valeur de la constante a.

▷ **2-2** Calculer $< N >$ et $Var(N)$.

Chaque moustique ne pique qu'une seule fois et avec la même probabilité, soit Carla, soit Nicolas. On note K le nombre de moustiques qui piquent Nicolas.

▷ **2-3** Le nombre de moustiques n étant fixé, exprimer la probabilité $Pr(K = k)$ que k moustiques piquent Nicolas. En déduire la probabilité jointe $Pr(N = n, K = k)$ qu'il y ait n moustiques dans la pièce et que k d'entre eux piquent Nicolas.

▷ **2-4** Finalement quelle est la loi de probabilité $Q(k)$ de la variable aléatoire K ?

3 Le piéton

Un piéton cherche à traverser une rue à sens unique. La probabilité qu'une voiture passe pendant une seconde donnée est p. On posera $q = 1 - p$ et on supposera que les passages des voitures sont indépendants. Le piéton met trois secondes pour traverser la rue, pendant lesquelles aucune voiture ne doit passer. On note $P(k)$ la probabilité que le piéton attende exactement k secondes.

▷ **3-1** Exprimer $P(0)$.

▷ **3-2** Exprimer $P(k)$ pour $k = 1, 2$ et 3.

▷ **3-3** Montrer que $P(4) = pq^3 - pq^6$.

4 Modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein

Dans ce modèle, un actif ne peut varier que d'un certain pourcentage $u > 0$ (augmentation) ou $d < 0$ (diminution) sur une période donnée dt. Ainsi, si l'actif vaut S à l'instant t il vaut $S_u = (1+u)S$ ou $S_s = (1+d)S$ à l'instant $t + dt$. Une option d'achat C a un prix d'exercice K à maturité, à l'instant $t + dt$.

▷ **4-1** Quelles sont les deux expressions de la valeur de l'option à maturité, C_u et C_d, selon l'évolution de l'actif ?

Supposons que le taux d'intérêt r est tel que $d < 0 < r < u$ et considérons le portefeuille suivant à l'instant t

$$\Pi = C - \alpha S,$$

où α est réel.

▷ **4-2** Donner les deux expressions de la valeur du portefeuille, Π_u et Π_d, à maturité. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, quelle doit être la relation entre Π_u et Π_d ? En déduire l'expression α_0 du paramètre α qui permet de vérifier cette relation.

▷ **4-3** La valeur du portefeuille évoluant avec le taux d'intérêt sans risque r, quelle est son expression à $t + dt$?

▷ **4-4** En déduire l'expression de la valeur de l'option C à l'instant initial t en fonction de r, d, u , C_u et C_d.

▷ **4-5** Application numérique : $u = -d = 0.1$, $r = 0.05$, $S = 100$ et $K = 95$. Calculer S_u, S_d, C_u, C_d, α_0 et la valeur de C à l'instant initial. Vérifier votre estimation de C en calculant la valeur du portefeuille à maturité.

5 Marche aléatoire avec sauts de différentes longueurs

On considère une marche aléatoire sur un réseau à une dimension. La particule part de l'origine et à chaque itération va à gauche ou à droite avec la même probabilité. En revanche, la longueur des sauts est h avec une probabilité p et hL avec la probabilité $q = 1 - p$. La position S_n de la particule à l'itération n s'exprime en fonction de sa position S_{n-1} à l'itération $n - 1$ de la façon suivante

$$S_n = S_{n-1} + X_n,$$

où X_n est une variable aléatoire.

▷ **5-1** Quelles sont les différentes valeurs de X_n et leur probabilité associée ?

▷ **5-2** En déduire la moyenne et la variance de S_n.

▷ **5-3** Reprendre les questions **5-1)** et **5-2)**, dans le cas où la longueur du saut croît au cours du temps en $L = \sqrt{n}$, où n est le numéro de l'itération. Quel est le comportement de la particule aux grands temps ?

Plaçons nous à nouveau dans le cas où les sauts sont de longueur h ou hL. On introduit la probabilité $P(x, t)$ que la particule se trouve à la position x à l'instant t.

▷ **5-4** En considérant les différentes positions possibles à l'instant t, exprimer la probabilité $P(x, t + \tau)$, où τ est la durée d'un saut quelle que soit sa longueur.

▷ **5-5** Effectuer le passage à la limite continue ($h \to 0$ et $\tau \to 0$) et en déduire l'équation de la diffusion associée à ce processus :

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}.$$

Quelle est l'expression du coefficient de diffusion D ?

▷ **5-6** Ne pouvait-on pas prévoir ce résultat ? Discuter les cas suivants : $q = 0$ et $q = 1$.