

CORRECTION : Examen 2007

Exercice 1

1-1)

$k = 1$: Puisque 2 clefs sur N ouvrent la porte, il faut choisir au premier essai l'une de ces 2 clefs :

$$P(1) = 2/N.$$

$k = 2$: On échoue au premier essai avec la probabilité $(N-2)/N$ (choix de $N-2$ mauvaises clefs parmi N) et on réussit au second avec la probabilité $2/(N-1)$ (choix de 2 clefs parmi les $N-1$ restantes) donc

$$P(2) = \frac{N-2}{N} \frac{2}{N-1},$$

et de même pour $k = 3$:

$$P(3) = \frac{N-2}{N} \frac{N-3}{N-1} \frac{2}{N-2} = \frac{2(N-3)}{N(N-1)}.$$

Pour $N = 4$:

$$\begin{aligned} P(1) &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ P(2) &= \frac{2}{4} \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ P(3) &= \frac{2}{4} \frac{1}{3} \frac{2}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

et $P(1) + P(2) + P(3) = 1$. On est sûr d'ouvrir la porte en 3 coups.

1-2)

On échoue $k-1$ fois (choix d'une mauvaise clef parmi les restantes) et on réussit au k^{eme} essai (choix d'une des 2 bonnes clefs) donc

$$\begin{aligned} P(k) &= \frac{N-2}{N} \frac{N-3}{N-1} \frac{N-4}{N-2} \cdots \frac{N-k}{N-(k-2)} \frac{2}{N-(k-1)} \\ &= \frac{2(N-k)}{N(N-1)}. \end{aligned}$$

On retrouve bien $P(1)$ et $P(2)$ et $P(3)$

Normalisation :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} P(k) &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2(N-k)}{N(N-1)} \\ &= (N-1) \frac{2N}{N(N-1)} - \frac{2}{N(N-1)} \sum_{k=1}^{N-1} k \\ &= 2 - \frac{2}{N(N-1)} \frac{(N-1)N}{2} \\ &= 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

1-3)

$$\begin{aligned}
 \langle K \rangle &= \sum_{k=1}^{N-1} kP(k) = \sum_{k=1}^{N-1} k \frac{2(N-k)}{N(N-1)} \\
 &= \frac{2N}{N(N-1)} \sum_{k=1}^{N-1} k - \frac{2}{N(N-1)} \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \\
 &= \frac{2N}{N(N-1)} \frac{(N-1)N}{2} - \frac{2}{N(N-1)} \frac{(N-1)N(2N-1)}{6} \\
 &= N - \frac{2N-1}{3} \\
 &= \frac{N+1}{3}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \langle K^2 \rangle &= \sum_{k=1}^{N-1} k^2 P(k) = \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \frac{2(N-k)}{N(N-1)} \\
 &= \frac{2N}{N(N-1)} \sum_{k=1}^{N-1} k^2 - \frac{2}{N(N-1)} \sum_{k=1}^{N-1} k^3 \\
 &= \frac{2N}{N(N-1)} \frac{(N-1)N(2N-1)}{6} - \frac{2}{N(N-1)} \frac{(N-1)^2 N^2}{4} \\
 &= \frac{(2N-1)N}{3} - \frac{(N-1)N}{2} \\
 &= \frac{N(N+1)}{6}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$Var(K) = \langle K^2 \rangle - \langle K \rangle^2 = \frac{N(N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{9} = \frac{(N+1)(N-2)}{18}$$

1-4)

Pour $N = 20$: $\langle K \rangle = 7$ donc le temps moyen est $7 * 4 = 28$ secondes et $Var(K) = 21$ donc un écart type de $\sqrt{21} \simeq 4,6$ et donc en temps $4,6 * 4 \simeq 18,3$ secondes. On ouvre donc la porte au bout de 28 ± 18 secondes.

Exercice 2

2-1)

Les boules sont discernables B_1, B_2, B_3, N_1, N_2 . L'espace des événements est donc (l'ordre de sortie ne joue pas) :

$$B_1 B_2, B_1 B_3, B_2 B_3, B_1 N_1, B_1 N_2, B_2 N_1, B_2 N_2, B_3 N_1, B_3 N_2, N_1 N_2$$

Soit 10 événements = C_5^2 . $P(0)$ correspond à l'événement $N_1 N_2$:

$$P(0) = \frac{C_2^2}{10} = \frac{1}{10}.$$

$P(1)$ est la probabilité d'obtenir une boule blanche (et une boule noire), soit 3 événements parmi les 10 possibles :

$$P(1) = \frac{C_3^1 C_2^1}{10} = \frac{6}{10}$$

et $P(2)$, la probabilité de retirer 2 boules blanches

$$P(2) = \frac{C_3^2}{10} = \frac{3}{10}$$

Et on a bien $P(0) + P(1) + P(2) = 1$.

2-2)

Le nombre d'événements est le nombre de façons de choisir M boules parmi N soit

$$C_N^M.$$

2-3)

L'événement " k boules blanches sont sélectionnées" est réalisé i) en choisissant aléatoirement k boules parmi pN boules blanches ET ii) en choisissant aléatoirement $M - k$ boules parmi qN boules noires. Ces deux événements sont indépendants, le nombre de façons de réaliser l'événement considéré est

$$C_{pN}^k C_{qN}^{M-k}.$$

La loi de probabilité de k est donc

$$P(k) = \frac{C_{pN}^k C_{qN}^{M-k}}{C_N^M}.$$

2-4)

$$\begin{aligned} P(k) &= \frac{pN!}{k!(pN-k)!} \frac{qN!}{(M-k)!(qN-(M-k))!} \frac{(M)!(N-M)!}{N!} \\ &= \frac{M!}{k!(M-k)!} [pN(pN-1)\dots(pN-(k-1))][qN(qN-1)\dots(qN-(M-k-1))] \frac{1}{N(N-1)\dots(N-(M-1))} \\ &\simeq \frac{M!}{k!(M-k)!} [pN]^k [qN]^{M-k} \frac{1}{[N]^M} \\ &\simeq \frac{M!}{k!(M-k)!} p^k q^{M-k} \\ &\simeq C_M^k p^k q^{M-k}. \end{aligned}$$

Soit une loi binomiale de paramètres M et p avec $\langle K \rangle = Mp$ et $\text{Var}(K) = Mpq$.

On considère fréquemment le sondage de M personnes comme M événements indépendants alors qu'en réalité le sondage est exhaustif (on n'interroge jamais deux fois la même personne). Comme sur une population sondée, $N \rightarrow \infty$, on n'interroge qu'un faible nombre de personnes M , cette approximation est légitime.

Exercice 3

3-1)

La variable aléatoire dS/S est selon une loi normale de moyenne μdt et de variance $\sigma^2 dt$.

3-2)

En choisissant $f = \ln S$ on :

$$\frac{\partial f}{\partial S} = 1/S$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -1/S^2$$

Le lemme d'Itô donne donc :

$$d \ln S = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dX$$

La variable $d \ln S$ est donc distribuée sur une loi normale de moyenne $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt$ et de variance $\sigma^2 dt$. On en déduit que $\ln S - \ln S_0$ est distribuée sur une gaussienne de valeur moyenne $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ et de variance $\sigma^2 t$. Donc $\ln S$ est distribuée sur une gaussienne de valeur moyenne $m = \ln S_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ et d'écart-type $e = \sigma\sqrt{t}$.

3-3)

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2e^2}}$$

donc

$$P(\ln(s)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}} e^{-\frac{(\ln(s)-m)^2}{2e^2}}$$

3-4)

La variable $X = \ln(S)$ est distribuée sur une gaussienne de moyenne m et de variance e^2 donc $Y = S = F(X) = e^X$ est distribuée sur une loi log-normale $Q(s)$:

$$Q(s) = P(s) \frac{1}{|f'(s)|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}} \frac{1}{s} e^{-\frac{[\ln(s)-m]^2}{2e^2}}$$

car $f'(s) = s$. On a alors :

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \int_0^{+\infty} s Q(s) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{[\ln(s)-m]^2}{2e^2}} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2e^2}} e^x dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2e^2}[(x-m)^2 - 2e^2 x]} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2e^2}[x^2 + m^2 - 2(e^2 + m)x]} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2e^2}[(x - (e^2 + m))^2 + m^2 - (e^2 + m)^2]} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2e^2}[(x - (e^2 + m))^2 - e^4 - 2e^2 m]} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}} e^{m + \frac{e^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x - (e^2 + m))^2}{2e^2}} dx \\ &= e^{m + \frac{e^2}{2}} \end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement de variables $x = \ln s$

3-5)

$$\langle \max(S - K, 0) \rangle = \int_K^{\infty} (s - K) Q(s) ds.$$

3-6)

La variable $\ln S$ est distribuée sur une loi gaussienne de moyenne m et de variance e^2 donc Y est distribuée sur une loi normale centrée et réduite :

$$H(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Donc

$$\langle \max(S - K, 0) \rangle = \int_{\frac{\ln(K)-m}{e}}^{\infty} (e^{m+ye} - K) H(y) dy.$$

3-7)

$$\begin{aligned}
\langle \max(S - K, 0) \rangle &= e^m \int_{\frac{\ln(K)-m}{e}}^{\infty} e^{ye} H(y) dy - K \int_{\frac{\ln(K)-m}{e}}^{\infty} H(y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^m \int_{\frac{\ln(K)-m}{e}}^{\infty} e^{ye} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - K \int_{\frac{\ln(K)-m}{e}}^{\infty} H(y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^m \int_{\frac{\ln(K)-m}{e}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[y^2 - 2ey]} dy - K \int_{\frac{\ln(K)-m}{e}}^{\infty} H(y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^m \int_{\frac{\ln(K)-m}{e}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[(y-e)^2 - e^2]} dy - K \int_{\frac{\ln(K)-m}{e}}^{\infty} H(y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{m+\frac{e^2}{2}} \int_{\frac{\ln(K)-m}{e}}^{\infty} e^{-\frac{(y-e)^2}{2}} dy - K \int_{\frac{\ln(K)-m}{e}}^{\infty} H(y) dy \\
&= e^{m+\frac{e^2}{2}} \int_{\frac{\ln(K)-m}{e}}^{\infty} H(y-e) dy - K \int_{\frac{\ln(K)-m}{e}}^{\infty} H(y) dy.
\end{aligned}$$

La seconde intégrale donne (avec le changement de variable $z = -y$)

$$\int_{\frac{\ln(K)-m}{e}}^{\infty} H(y) dy = - \int_{-\frac{\ln(K)-m}{e}}^{-\infty} H(z) dz = N[-\frac{\ln(K)-m}{e}]$$

et la première avec le changement de variable $z = y - e$

$$\int_{\frac{\ln(K)-m}{e}}^{\infty} H(y-e) dy = \int_{\frac{\ln(K)-m}{e}-e}^{\infty} H(z) dz = \int_{-\infty}^{-\frac{\ln(K)-m}{e}+e} H(z) dz = N[-\frac{\ln(K)-m}{e} + e]$$

donc

$$\langle \max(S - K, 0) \rangle = e^{m+\frac{e^2}{2}} N[-\frac{\ln(K)-m}{e} + e] - K N[-\frac{\ln(K)-m}{e}]$$

avec le changement de variables

$$m = \ln \langle S \rangle - \frac{e^2}{2},$$

on a :

$$\langle \max(S - K, 0) \rangle = \langle S \rangle N[d_1] - K N[d_2]$$

où

$$\begin{aligned}
d_1 &= -\frac{\ln(K)-m}{e} + e = \frac{\ln \frac{\langle S \rangle}{K} + \frac{e^2}{2}}{e} \\
d_2 &= -\frac{\ln(K)-m}{e} = \frac{\ln \frac{\langle S \rangle}{K} - \frac{e^2}{2}}{e}.
\end{aligned}$$

3-8)

Une variable X qui évolue sans risque varie comme

$$dX = rX dt$$

donc

$$\ln X(t) - \ln X(T) = r(t - T)$$

donc

$$X(t) = X_T e^{r(t-T)}$$

donc

$$C(S, t) = C(S_T, T) e^{r(t-T)} = e^{r(t-T)} \langle \max(S_T - K, 0) \rangle$$

3-9)

On a :

$$m = \ln S_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$$

et $e = \sigma\sqrt{t}$ donc

$$\langle S \rangle = e^{m + \frac{e^2}{2}} = S_0 e^{\mu t}$$

On en déduit la formule de Black-Scholes :

$$C(S, t) = e^{r(t-T)} \langle \max(S_T - K, 0) \rangle = e^{r(t-T)} \left(S_0 e^{rt} N(d_1) - K N(d_2) \right).$$

où d_1 et d_2 sont calculées en $t = T$.

Exercice 4

4-1)

Les lois de puissance sont invariantes d'échelle, elles ne dépendent pas d'une grandeur caractéristique.

Les lois de puissance sont associées aux phénomènes collectifs dans le cadre des transitions de phase continues. Au point critique (seuil de percolation, point de Curie) les grandeurs qui décrivent le système ont des comportements en loi de puissance caractérisés par des exposants critiques universels. Ces derniers ne dépendent pas des détails microscopiques du modèle, mais seulement de la dimension de l'espace (percolation), des symétries du Hamiltonien et de la courte portée des interactions (Ising).

4-2)

$$Pr[s > s_0] = C \int_{s_0}^{\infty} s^{-\tau} ds = \frac{C}{\tau - 1} s_0^{1-\tau}$$

4-3)

La probabilité que le rang soit inférieur à r (ou que la taille soit plus grande que $\bar{s}(r)$) est égale à la probabilité de choisir un des $r - 1$ plus grands amas parmi les n est $\sim r/n$.

Donc

$$Pr[s > \bar{s}(r)] \simeq \frac{r}{n} = \frac{C}{\tau - 1} \bar{s}(r)^{1-\tau}$$

donc

$$\bar{s}(r) \sim \frac{1}{r^\lambda}.$$

où $\lambda = 1/(\tau - 1)$.