UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

M2 Statistique et Finance
2006-2007

Probabilités et Physique statistique

Examen de Probabilités et Physique statistique

mercredi 28 février 2007 - durée : 3h
Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

1 Le trousseau de clefs

Devant une porte fermée à clef, vous avez en main un trousseau de $N \geq 2$ clefs. Seules deux d'entre elles peuvent ouvrir la porte. Gardant votre calme, vous les essayez l'une après l'autre, en écartant au fur et à mesure celles qui ne conviennent pas. L'essai d'une clef prend quatre secondes (le temps de la choisir, de l'essayer et de la mettre de coté). Soit $P(k)$ la probabilité d'ouvrir la porte au k^{eme} essai.

▷ **1-1** Quelles sont les expressions de $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$? Contrôler vos résultats dans le cas particulier $N = 4$. Que vaut dans ce cas, $P(1) + P(2) + P(3)$?

▷ **1-2** En déduire la distribution de probabilité $P(k)$ pour $1 \leq k \leq N - 1$. Vérifier la normalisation de la distribution et tracer $P(k)$.

▷ **1-3** Calculer la moyenne $< K >$ et la variance $Var(K)$ de la distribution. On donne :

$$\sum_{p=1}^{N} p^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^{N} p^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}.$$

▷ **1-4** En déduire le temps moyen pour ouvrir la porte et l'écart-type de ce temps si $N = 20$.

2 Tirages sans remise dans l'urne

Dans une urne, on mélange pN boules blanches et qN boules noires, tel que $p+q = 1$. On prend au hasard $M < pN$ boules dans l'urne sans les remettre dans l'urne. Soit $P(k)$ la probabilité d'avoir retiré exactement k boules blanches (et $M - k$ boules noires) de l'urne.

▷ **2-1** Pour commencer, plaçons-nous dans le cas de 3 boules blanches étiquetées B_1, B_2 et B_3 et de 2 boules noires étiquetées N_1 et N_2. Recenser tous les événements correspondants au tirage de deux boules parmi ces 5 boules. Combien y-a-t-il d'événements dans cet espace des observables ? Que valent dans ce cas $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$? Exprimer ces probabilités en termes de facteurs combinatoires C_a^b, où a et b sont des entiers positifs. Montrer que $P(0) + P(1) + P(2) = 1$.

▷ **2-2** Revenons au cas général de M tirages dans une urne contenant N boules (pN boules blanches et qN boules noires). Quel est le nombre d'événements dans l'espace des observables ?

▷ **2-3** Établir la loi de probabilité $P(k)$ (loi hypergéométrique).

▷ **2-4** Montrer que lorsque N tend vers $+\infty$, la loi $P(k)$ tend vers une distribution binomiale dont on précisera les paramètres ? Quelles sont alors les expressions de la moyenne $< K >$ et de la variance $Var(K)$? Expliquer en quoi cette approximation peut concerner un sondage de M personnes interrogées sur une population de N individus.

3 La formule de Black-Scholes

L'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes est donnée par :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \tag{1}$$

où $V(S,t)$ est la valeur de l'option, S et σ sont respectivement la valeur et la volatilité de l'actif sous-jacent, et r le taux d'intérêt. La solution de cette équation dépend bien sûr des conditions aux limites qui caractérisent le produit dérivé considéré. Ainsi, pour un option d'achat européenne (call), C, on a, à maturité $t = T$:

$$C(S_T, T) = \max(S_T - K, 0),$$

où K est le prix d'exercice (strike) et S_T la valeur de l'actif sous-jacent à maturité. Comme nous l'avons vu en Travaux Dirigés, la formule de Black-Scholes peut être obtenue directement en résolvant l'équation (1). Nous présentons dans ce problème une méthode alternative basée sur la notion de "risque-neutre".

Dans le modèle de Black-Scholes, la variation relative de l'actif financier S est donnée par :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dX,$$

où μ est le taux de croissance (espérance de rentabilité), σ la volatilité et dX une variable aléatoire distribuée sur une loi normale centrée de variance dt.

$\triangleright$ **3-1** Quelles sont la distribution de probabilité, la moyenne et la variance de la variable dS/S ?

D'après le lemme d'Itô, la variation d'une fonction quelconque $f(S,t)$ de S et de t est donnée par :

$$df = (\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dX.$$

$\triangleright$ **3-2** Exprimer la variation de la fonction $f(S) = \ln S$. Quelle est la distribution de $d\ln S$? En déduire la distribution de probabilité de $\ln S$. On exprimera la valeur moyenne $m =< \ln S >$ et l'écart-type e, en fonction de μ, σ, t et S_0, la valeur initiale de l'actif sous-jacent.

$\triangleright$ **3-3** Rappeler l'expression de la loi normale $P(x)$ de moyenne m et d'écart-type e.

$\triangleright$ **3-4** Quel est le nom de la distribution de probabilité $Q(s)$ de la variable S ? Donner l'expression de $Q(s)$ et montrer que la valeur moyenne $< S >$ est donnée par :

$$< S >= e^{m+\frac{e^2}{2}}.$$

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha z^2}\, dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

Dans un premier temps nous allons calculer $< \max(S-K,0) >$.

$\triangleright$ **3-5** Quelle est l'expression de $< \max(S-K,0) >$ en fonction de $Q(s)$?

$\triangleright$ **3-6** Soit

$$Y = \frac{\ln(S) - m}{e}.$$

Quelle est la distribution $H(y)$ de Y ? Montrer alors que

$$< \max(S-K,0) >= \int_{\frac{\ln(K)-m}{e}}^{\infty} (e^{m+ye} - K)H(y)dy.$$

$\triangleright$ **3-7** Montrer finalement que

$$< \max(S-K,0) >=< S > N(d_1) - KN(d_2), \tag{2}$$

où $N(x)$ est la probabilité qu'une variable normale centrée et réduite soit inférieure à x, soit

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Les variables d_1 et d_2 sont données par :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(\frac{<S>}{K}) + \frac{e^2}{2}}{e} \\ d_2 &= \frac{\ln(\frac{<S>}{K}) - \frac{e^2}{2}}{e}. \end{aligned}$$

L'approche d'évaluation risque-neutre repose sur les deux remarques suivantes :

- l'équation (1) ne dépend pas du taux de croissance μ,
- par construction, le risque (la variable aléatoire) est supprimé dans le modèle de Black-Scholes (en tous cas pendant un temps dt).

Il est donc possible d'évaluer S et $C(S,t)$ en se plaçant dans un environnement risque-neutre, où les quantités évoluent avec un taux sans risque r. Autrement dit, on peut remplacer le taux de croissance μ par le taux d'intérêt r. L'espérance de la valeur du call à maturité est donnée par l'équation (2) :

$$C(S_T, T) =< \max(S_T - K, 0) >,$$

où S_T est la valeur de l'actif sous-jacent à l'échéance. Le call $C(S,t)$ évolue donc sans risque avec un taux de croissance r.

▷ **3-8** Quelle est sa valeur à l'instant $t < T$? On rappelle que la variation d'une variable X qui évolue sans risque avec un taux r est donnée par $dX = rXdt$.

▷ **3-9** Montrer à l'aide des expressions explicites de m et de e en fonction du temps que :

$$< S >= S_0 e^{\mu t}.$$

En déduire la formule de Black-Scholes.

Tourner la page

4 Lois de puissance et loi de Zipf

Question de cours :

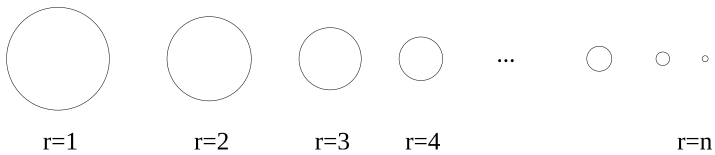
▷ **4-1** Quelle est la propriété fondamentale des lois de puissance ? Expliquer, sans équations et en moins de dix lignes, en quoi les lois de puissance peuvent-elles être liées aux phénomènes collectifs. Qu'implique la notion d'universalité ? Vous pourrez illustrer votre propos à l'aide de la théorie de la percolation ou du modèle d'Ising.

Loi de Zipf

Une distribution en taille d'amas obéit à la loi de Zipf, si la taille moyenne $\bar{s}(r)$ du plus grand ($r = 1$), deuxième plus grand ($r = 2$)..., r^{eme} plus grand amas, décroît en fonction de son rang $r = 1, 2, ...n$ comme

$$\bar{s}(r) \sim \frac{1}{r^{\lambda}},$$

où λ est une constante et n le nombre d'amas.



Le but de cet exercice est de montrer qu'une distribution en taille en loi de puissance obéit à la loi de Zipf. Supposons donc que la probabilité qu'un amas ait une taille comprise entre s et $s + ds$ soit donnée par la distribution

$$P(s) = Cs^{-\tau},$$

où $\tau > 1$ est une constante.

▷ **4-2** Exprimer la probabilité $Pr[s > s_0]$ qu'un amas ait une taille plus grande que s_0.

▷ **4-3** La probabilité $Pr[s > \bar{s}(r)]$ est également celle de trouver un amas de rang inférieur à r. Montrer que

$$Pr[s > \bar{s}(r)] \simeq \frac{r}{n}.$$

En déduire la loi de Zipf et l'expression de λ.