



PROBABILITÉS ET PHYSIQUE STATISTIQUE

NOTES DE COURS DE M2 MASTER SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Mention : Sciences et Management

Spécialité : Statistique et Finance

Nicolas Sator

Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée
Université Pierre et Marie Curie Paris 6

Table des matières

1	Probabilités	5
1.1	Événements, espace des observables et probabilités . . .	6
1.1.1	Définitions	6
1.1.2	Un exemple	8
1.1.3	Arrangements et dénombrements	8
1.1.4	Probabilités conditionnelles	10
1.2	Variable aléatoire et distribution de probabilité	11
1.2.1	Distribution et densité de probabilité	11
1.2.2	Moments d'une distribution	12
1.2.3	Ensemble de variables aléatoires	14
1.2.4	Corrélations et indépendance	15
1.2.5	Fonction caractéristique	17
1.3	Quelques distributions de probabilité	19
1.3.1	Distribution uniforme	20
1.3.2	Loi gaussienne ou normale	20
1.3.3	Loi binomiale	23
1.3.4	Loi de Poisson	25
1.3.5	Loi Gamma et loi du χ^2	30
1.3.6	Lois larges et lois de puissance	32
1.4	Loi des grands nombres et théorème de la limite centrale	35
1.4.1	La loi des grands nombres	35
1.4.2	Le théorème de la limite centrale	36
1.4.3	Lois stables	40
1.5	Théorie de l'information	41
1.5.1	Information et entropie	41
1.5.2	Exemples	42
2	Marche aléatoire	45
2.1	Mouvement Brownien et équation de Langevin	46
2.1.1	Équation de Langevin	47
2.2	Marche aléatoire et retour à l'origine	48
2.2.1	Premiers résultats	48
2.2.2	Principe de réflexion	51
2.2.3	Premier retour à l'origine	52
2.2.4	Loi de l'arcsinus	54

2.3	Problème classique de ruine	56
2.3.1	Calcul de q_z	57
2.3.2	Calcul de la durée moyenne de jeu	58
2.4	Diffusion	59
2.4.1	Passage à la limite continue	59
2.4.2	Équation de la diffusion	62
2.4.3	Processus de Wiener	64
2.4.4	Marche aléatoire gaussienne et vols de Lévy	66
2.5	Chaîne de Markov	68
2.5.1	Propriété de Markov	68
2.5.2	Équation de Chapman-Kolmogorov	69
2.5.3	Formalisme matriciel	71
2.6	Application à la modélisation financière	74
2.6.1	L'approche de Bachelier	76
2.6.2	Le modèle de Black-Scholes	77
3	Transitions de phase	83
3.1	Théorie de la percolation	84
3.1.1	Introduction	84
3.1.2	Percolation de sites à une dimension	88
3.1.3	Percolation de liens en champ moyen	89
3.1.4	Transition de phase géométrique et universalité	90
3.2	Le modèle d'Ising	95
3.2.1	Introduction	95
3.2.2	Modèle d'Ising à une dimension	101
3.2.3	Approximation du champ moyen	102
3.2.4	Transition de phase thermodynamique et universalité	106
A	Annexe Mathématique	109
A.1	Notions de Tribus	109
A.2	Fonction $\Gamma(x)$ et $B(p, q)$	111
A.3	Formule de Stirling	112
A.4	Volume et surface de l'hypersphère	113
A.5	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	114