

Rudiments de mécanique analytique



NOTES DE COURS DE LICENCE *L3-Phytem*

Nicolas Sator
Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée
Université Pierre et Marie Curie Paris 6

La mécanique analytique, développée au XVIII^{ème} siècle, est d'abord une reformulation simple et élégante du formalisme newtonien qui permet de résoudre des problèmes de mécanique classique. Mais au-delà de considérations esthétiques ou techniques, l'approche lagrangienne et hamiltonienne forme la pierre angulaire de la mécanique quantique et de la théorie des champs.

Bibliographie

- *Mécanique quantique, 1. Fondements et premières applications*, C. Aslangul (de Boeck, Bruxelles, 2007), chapitre 7
- *Analytical Mechanics*, R.R. Fowles and G. L. Cassiday (Brooks/Cole Thomson learning, 1999), chapter 10
- *Le cours de physique de Feynman, tome 1*, R. Feynman (Dunod, 1999), chapitre 19
- *Mécanique*, L. Landau et E. Lifchitz (Mir, Moscou, 1982)
- *Mécanique, De la formulation Lagrangienne au chaos Hamiltonien*, C. Gignoux et B. Silvestre-Brac (EDP Sciences, 2002)

Table des matières

1	Le formalisme lagrangien	3
1.1	De Newton à Lagrange : une reformulation de la mécanique . . .	3
1.2	Le principe de moindre action	3
1.3	L'équation d'Euler-Lagrange	5
1.4	Le Lagrangien	6
2	Le formalisme hamiltonien	7
2.1	Les équations de Hamilton	7
2.2	Les crochets de Poisson	8
3	Exercices	9
3.1	L'oscillateur harmonique	9
3.2	L'atome hydrogénoïde	10
3.3	La particule plongée dans un champ électromagnétique	12
3.4	La courbe brachistochrone	15

1 Le formalisme lagrangien

1.1 De Newton à Lagrange : une reformulation de la mécanique

L'expérience montre que le mouvement d'une particule est complètement déterminé par sa position $q(t)$ et sa vitesse $\dot{q}(t)$ à un instant donné t (on se place pour l'instant dans un espace à une dimension). En effet, l'équation fondamentale de la dynamique fournit l'expression de $\ddot{q}(t)$ en fonction de $q(t)$ et $\dot{q}(t)$:

$$\ddot{q}(t) = f(q(t), \dot{q}(t)).$$

Connaissant les forces qui s'exercent sur le système et donc l'expression de la fonction f , la trajectoire est construite *localement*, de proche en proche, en passant de l'état mécanique à l'instant t à celui en $t + dt$: Ainsi, $\dot{q}(t)$ permet de calculer $q(t + dt)$ et $\ddot{q}(t)$ permet de calculer $\dot{q}(t + dt)$. Le formalisme newtonien est donc basé sur une approche différentielle.

Il existe une autre approche de la mécanique basée sur le *principe de moindre action* :¹ parmi tous les chemins possibles entre deux points donnés de l'espace, la trajectoire physique (réelle) d'une particule est le chemin qui minimise (ou en général "extrémise") une certaine quantité définie sur toute la trajectoire, appelée *action*. On retrouve une idée très générale en physique qui a le mérite d'être simple et élégante : les lois de la nature obéissent à un *principe d'économie*.² Contrairement à l'approche newtonienne, il s'agit donc d'un critère *global* qui caractérise l'ensemble de la trajectoire.

L'enjeu n'est donc pas de trouver de nouvelles lois de la physique, mais de reformuler l'approche newtonienne sous la forme du principe de moindre action. Comment définir l'action de façon à retrouver les équations du mouvement ? Le principe variationnel va nous permettre de répondre à cette question. Au-delà de cette reformulation de la mécanique newtonienne, cette approche a des développements fondamentaux en mécanique quantique, en électromagnétisme, en relativité générale et plus généralement en théorie des champs.

1.2 Le principe de moindre action

Une particule part d'un point A_1 à l'instant t_1 et arrive au point A_2 à l'instant t_2 . Comme le montre la figure 1, il existe une infinité de chemins entre ces deux points, pourtant le système en choisit un seul, la trajectoire physique.

Pour utiliser le principe variationnel, il faut introduire une fonctionnelle ("une fonction de fonction") qui dépende du chemin $q(t)$, fictif ou réel, suivi par la particule. Le plus simple est de définir cette fonctionnelle comme une intégrale sur le temps le long du chemin considéré. Il s'agit bien d'une quantité

¹C'est Pierre-Louis de Maupertuis qui énonce ce principe en 1744 et Joseph-Louis de Lagrange qui, en 1787, en donne la formulation complète que nous connaissons aujourd'hui.

²Le principe de Fermat (1657) exprimait déjà cette idée : "La trajectoire de la lumière d'un point à un autre est telle que la durée du parcours est minimale".

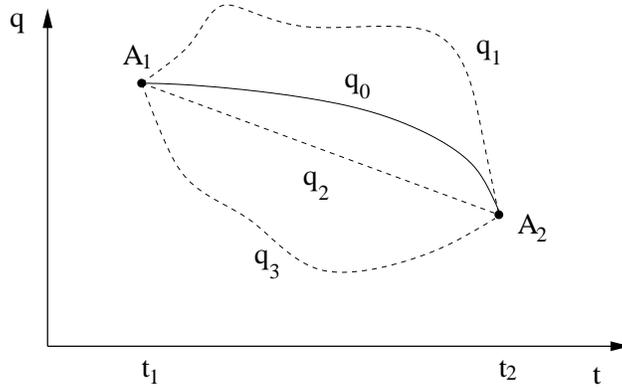


FIG. 1 – Différents chemins $q_i(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) en fonction du temps t . La trajectoire réelle q_0 représentant un mouvement de chute libre dans le champ de pesanteur est représentée en traits pleins.

qui caractérise *globalement* le chemin. La fonction à intégrer dépend naturellement du chemin considéré $q(t)$, ainsi que de sa dérivée par rapport au temps $\dot{q}(t)$. Plus généralement, cette fonction peut dépendre explicitement du temps. On définit donc l' *action* par

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt, \quad (1)$$

où la fonction $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ est appelée le *Lagrangien* du système. Nous verrons plus loin comment écrire cette fonction.

Remarquons que la fonction L dépend du temps explicitement, mais aussi implicitement à travers $q(t)$ et $\dot{q}(t)$. La dérivée de L par rapport à t est donc :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q}.$$

Pour un chemin donné, tel que $q(t_1)$ et $q(t_2)$ sont fixés, $S[q]$ prend une certaine valeur. D'après le principe de moindre action, la trajectoire physique est le chemin qui donne une valeur minimale³ à l'action.

³Il s'agit en général d'un minimum, d'où le nom de principe de moindre action, mais dans certain cas l'extremum est un maximum.

1.3 L'équation d'Euler-Lagrange

Nous allons montrer que le chemin $q(t)$ qui donne une valeur extrême à l'action, $q(t_1)$ et $q(t_2)$ étant fixés, vérifie l'équation d'Euler-Lagrange :⁴

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0.} \quad (2)$$

Démonstration :

Supposons que l'on connaisse le chemin $q_0(t)$, qui rend $S[q]$ extrême. Puisque $S[q_0]$ est extrême, une petite variation $\eta(t)$ de la fonction $q(t)$ implique une variation $\delta S = 0$ au premier ordre en $\eta(t)$. Posons explicitement :

$$q(t) = q_0(t) + \eta(t),$$

où $\forall t \eta(t) \ll q_0(t)$. Calculons la variation induite de la fonctionnelle, δS , pour une valeur de t fixée :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q_0(t) + \eta(t), \dot{q}_0(t) + \dot{\eta}(t), t) - L(q_0(t), \dot{q}_0(t), t) \right] dt.$$

Au premier ordre en $\eta(t)$ et en $\dot{\eta}(t)$, on a

$$L(q_0(t) + \eta(t), \dot{q}_0(t) + \dot{\eta}(t), t) \simeq L(q_0(t), \dot{q}_0(t), t) + \frac{\partial L}{\partial q} \eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta}(t).$$

Donc

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\eta(t) \frac{\partial L}{\partial q} + \dot{\eta}(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] dt.$$

En intégrant par partie la seconde intégrale, on obtient :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\eta(t) \frac{\partial L}{\partial q} - \eta(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] dt + \left[\eta(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Puisque $q(t_1)$ et $q(t_2)$ sont fixés, $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ et le dernier terme de l'équation s'annule. Il reste :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \eta(t) \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] dt.$$

Comme $\delta S = 0$, quelle que soit $\eta(t)$ on doit avoir :

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0.$$

C'est l'équation d'Euler-Lagrange, qui s'écrit plus explicitement :

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial t} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial q} \dot{q} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \ddot{q} = 0.$$

⁴Remarquons que le Lagrangien est défini à une fonction près, dépendant seulement du temps, que l'on peut toujours écrire comme une dérivée totale, $\frac{dg(t)}{dt}$. La contribution à l'action est donc une constante, $g(t_2) - g(t_1)$, qui ne modifie pas l'extremum obtenu. On appelle cette propriété l'invariance de jauge.

1.4 Le Lagrangien

Comment écrire le Lagrangien d'une particule ? Considérons pour commencer une particule libre. D'après l'équation fondamentale de la dynamique,⁵ on doit avoir

$$m\ddot{q} = \frac{d}{dt}(m\dot{q}) = 0. \quad (3)$$

Le Lagrangien d'une particule libre ne dépend a priori que de la vitesse \dot{q} . L'équation d'Euler-Lagrange impose donc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = 0.$$

En comparant avec l'équation fondamentale de la dynamique (3), on peut choisir

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2.$$

Dans le cas où le système est soumis à une force conservative,⁶ il est raisonnable d'écrire le Lagrangien sous la forme

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + f(q),$$

où f est une fonction qui ne dépend que de la position. Retrouver l'équation fondamentale de la dynamique à l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange impose $f(q) = -U(q)$, où U est l'énergie potentielle d'interaction. Soit :

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - U(q). \quad (4)$$

Ainsi, dans le cas où $U = U(q)$ l'énergie potentielle ne dépend que de la coordonnée q , l'équation d'Euler-Lagrange implique

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q}.$$

D'une façon générale, on écrira le Lagrangien comme

$$\boxed{L = T - U},$$

où T est l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle.

Dans le cas d'un système constitué de N particules dans un espace à trois dimensions, on introduira les *coordonnées généralisées* q_i , où $i = 1, 2, \dots, 3N$ et

⁵On peut également montrer par des arguments de symétrie que le Lagrangien d'une particule libre ne dépend que de la norme de la vitesse. L'équation d'Euler-Lagrange impose alors la forme de L (*Mécanique*, L. Landau et E. Lifchitz (Mir, Moscou, 1982)).

⁶L'utilisation exclusive de forces conservatives en mécanique analytique peut sembler être un handicap, mais la dissipation de l'énergie n'intervient que de façon effective pour des systèmes macroscopiques. Sur le plan fondamental, pour des systèmes microscopiques étudiés dans le cadre de la physique quantique, cette restriction ne pose pas de problème.

les vitesses correspondantes \dot{q}_i . En coordonnées cartésiennes on a donc $q_1 = x_1$, $q_2 = y_1$, $q_3 = z_1$, $q_4 = x_2$, $q_5 = y_2$, ... où (x_j, y_j, z_j) sont les coordonnées spatiales de la j^{eme} particule.⁷ On a alors $3N$ équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, 3N.$$

2 Le formalisme hamiltonien

2.1 Les équations de Hamilton

Si le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) :

$$L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (5)$$

est une constante du mouvement.

Démonstration :

Calculons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] &= \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} - \ddot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \dot{q} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial q} \dot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \ddot{q} \right] \\ &= \dot{q} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial q} \dot{q} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \ddot{q} \right]. \end{aligned}$$

D'après l'équation d'Euler-Lagrange, le terme entre crochets est nul, ce qui achève la démonstration.

Dans le cas d'une force conservative, on voit que :

$$\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + U(q) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + U(q)$$

est une constante du mouvement. Autrement dit, l'énergie du système est bien conservée. Ce résultat suggère l'utilisation d'une autre fonction que le Lagrangien pour déduire les équations du mouvement. On définit le *moment conjugué* p_i associé à la coordonnée q_i par

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (6)$$

Comme nous le verrons dans les exercices, en général le moment conjugué est différent de l'impulsion $p_i = m\dot{q}_i$. A partir de l'expression (5), définissons une nouvelle fonction appelée *Hamiltonien* et notée H :

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \dot{q}_i p_i - L = T + U. \quad (7)$$

⁷Une contrainte sur les coordonnées réduit le nombre de degrés de liberté. Par exemple, une particule qui se déplace à la surface d'une sphère n'a que deux degrés de liberté. Compte tenu de la symétrie, on choisira les angles $q_1 = \theta$ et $q_2 = \phi$ plutôt que les coordonnées cartésiennes. En général s'il y a m contraintes, il y a $3N - m$ degrés de liberté.

Reste à trouver les équations du mouvement à partir de cette nouvelle fonction. Pour cela différencions H , supposé indépendant du temps et utilisons l'équation d'Euler-Lagrange :

$$dH = \sum_{i=1}^{3N} [\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - (\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i)] = \sum_{i=1}^{3N} [\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i] = \sum_{i=1}^{3N} [\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i].$$

On voit que les variables naturelles du Hamiltonien sont les coordonnées q_i et leurs moments conjugués p_i . On en déduit les équations de Hamilton :

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, 3N.} \quad (8)$$

Comme les $3N$ équations du second ordre d'Euler-Lagrange, les $6N$ équations du premier ordre de Hamilton permettent d'exprimer les équations du mouvement.

Ainsi, le Hamiltonien d'un système de N particules soumises à des forces conservatives s'écrit :

$$H(\{q_i, p_i\}) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} + U(q_1, q_2, \dots, q_{3N}).$$

Les équations de Hamilton impliquent pour $i = 1, 2, \dots, 3N$:

$$\dot{q}_i = \frac{p_i}{2m} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i,$$

où F_i est la composante de la force associée à la coordonnée q_i .

2.2 Les crochets de Poisson

Considérons une grandeur physique f dépendant des $3N$ coordonnées q_i et des $3N$ moments conjugués p_i . Sa dérivée totale par rapport au temps est donnée par

$$\frac{df}{dt}(\{q_i, p_i\}, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right).$$

D'après les équations de Hamilton,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, \quad (9)$$

où l'on a introduit les crochets de Poisson de f avec H . En général, les crochets de Poisson de deux fonctions f et g s'écrivent :

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right).$$

Les équations de Hamilton s'écrivent alors :

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, 3N.$$

Les crochets de Poisson permettent également d'associer des propriétés de symétrie et d'invariance. Ainsi, d'après l'équation (9), une quantité physique f qui ne dépend pas explicitement du temps est conservée si $\{f, H\} = 0$. Par exemple, si H ne dépend pas explicitement du temps, l'énergie est conservée. Autrement dit, l'uniformité du temps correspond à la conservation de l'énergie. Par ailleurs, les équations de Hamilton montrent clairement que si H ne dépend pas d'une certaine coordonnée q_0 , son moment conjugué p_0 est une constante du mouvement.

Pour ouvrir une porte sur la mécanique quantique, les crochets de Poisson sont à l'origine de la quantification et du *commutateur* entre deux opérateurs. Ainsi, les crochets de Poisson

$$\{q, p\} = 1$$

annonce la relation fondatrice de la mécanique quantique :⁸

$$[q, p] = i\hbar,$$

où $\hbar = h/2\pi$, h est la constante de Planck.

3 Exercices

3.1 L'oscillateur harmonique

L'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique (classique) à une dimension s'écrit

$$U(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

- 1) En déduire l'équation du mouvement à l'aide du formalisme lagrangien.
- 2) En déduire l'équation du mouvement à l'aide du formalisme hamiltonien.

Réponse :

- 1) Le Lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

Et d'après l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

donc

$$-m\omega^2 q = m\ddot{q}.$$

⁸On consultera avec profit *Mécanique quantique, 1. Fondements et premières applications*, C. Aslangul (de Boeck, Bruxelles, 2007).

2) Le Hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

Les équations de Hamilton donnent

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \quad \text{et} \quad \dot{p} = -m\omega^2 q.$$

On en déduit l'équation du mouvement :

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0.$$

3.2 L'atome hydrogéoïde

On considère l'électron d'un atome hydrogéoïde⁹ subissant l'effet du potentiel central :

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (10)$$

- 1) Donner l'expression du Lagrangien de ce système en coordonnées sphériques.
- 2) Établir les équations de Lagrange dans ce même système de coordonnées.
- 3) En déduire l'existence de quantités conservées. Interpréter.
- 4) Écrire le Hamiltonien de ce système et les équations de Hamilton.

Réponse :

1) On a $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \doteq \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{Z\tilde{e}^2}{r}$ dont on note qu'il est invariant par rotation. On a introduit une charge effective pour simplifier les notations

En coordonnées sphériques on a : $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$ et $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{u}_\varphi$
d'où :

$$L(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{Z\tilde{e}^2}{r}. \quad (11)$$

2) D'après l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (12)$$

⁹Un atome hydrogéoïde est un atome auquel on a arraché tous ses électrons sauf un. Il se comporte donc comme un atome d'hydrogène avec un noyau de charge $Z > 1$.

on a, pour les coordonnées r , θ et φ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m(r\dot{\theta}^2 + r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - \frac{Z\tilde{e}^2}{r^2} \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 \\ \frac{d}{dt}(mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

3) On déduit immédiatement des équations précédentes que la quantité $mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$ est conservée. La conservation de cette grandeur est liée au fait que le Lagrangien est indépendant de la variable angulaire φ . Elle traduit donc l'invariance par rotation du système autour de l'axe Oz . Vérifions que la quantité conservée est la projection du moment angulaire sur l'axe Oz .

On a $\mathbf{J} = \mathbf{r} \wedge m\dot{\mathbf{r}}$ et $J_z = \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_z$ où \mathbf{u}_z est donné par : $\mathbf{u}_z = \cos\theta\mathbf{u}_r - \sin\theta\mathbf{u}_\theta$ d'où : $J_z = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$.

Remarquez que l'invariance complète par rotation du système implique que les autres composantes J_x et J_y sont aussi conservées. C'est la dissymétrie du système de coordonnées qui privilégie l'axe Oz et, par conséquent, la composante J_z du moment cinétique. Mais comme le choix de l'axe Oz est arbitraire la conservation de J_i vaut pour tout $i = x, y$ ou z .

4) Calculons d'abord les moments conjugués :

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

En coordonnées sphériques, le moment conjugué est donc différent de l'impulsion $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$. Le Hamiltonien du système s'écrit donc

$$\begin{aligned} H &= \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\varphi}p_\varphi - L \\ &= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 + mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 - \left(\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + \frac{Z\tilde{e}^2}{r} \right) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - \frac{Z\tilde{e}^2}{r} \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} - \frac{Z\tilde{e}^2}{r}. \end{aligned}$$

Les équations de Hamilton sont :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad \text{et} \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\varphi^2}{mr^3 \sin^2 \theta} - \frac{Z\tilde{e}^2}{r^2} \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad \text{et} \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\varphi^2 \cos \theta}{mr^2 \sin^3 \theta} \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \theta} \quad \text{et} \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned}$$

En utilisant les expressions des moments conjugués, on retrouve bien les équations du mouvement obtenues à l'aide du formalisme lagrangien.

3.3 La particule plongée dans un champ électromagnétique

On considère le Lagrangien d'une particule de masse m et de charge q plongée dans un champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) décrit par le potentiel scalaire $\phi(\mathbf{r}, t)$ et vectoriel $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$:

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + q \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - q \phi(\mathbf{r}, t). \quad (14)$$

- 1) Déterminer l'équation du mouvement de la particule.
- 2) Déterminer le Hamiltonien de la particule.
- 3) En déduire les équations de Hamilton.

Réponse :

- 1) On a :

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + q \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - q \phi(\mathbf{r}, t) \quad (15)$$

où l'on note que \mathbf{A} et ϕ font intervenir, via leurs arguments, la position de la particule.

On en tire :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i + q A_i(\mathbf{r}, t) \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} = q \frac{\partial A_j(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} \dot{x}_j - q \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} \end{cases} \quad (16)$$

et :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = m \ddot{x}_i + q \left(\frac{\partial A_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial A_i(\mathbf{r}, t)}{\partial x_j} \dot{x}_j \right) \quad (17)$$

avec sommation sous-entendue sur l'indice répété (j). L'équation du mouvement de la particule est alors donnée par :

$$m \ddot{x}_i = -q \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} - q \left(\frac{\partial A_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial A_i(\mathbf{r}, t)}{\partial x_j} \dot{x}_j - \frac{\partial A_j(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} \dot{x}_j \right) \quad (18)$$

On doit retrouver l'équation usuelle de la particule chargée dans un champ électromagnétique :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) . \quad (19)$$

Le champ électrique \mathbf{E} vérifie :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \mathbf{A}) \quad (20)$$

\mathbf{A} étant le potentiel vecteur.

On a donc :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \nabla \phi(\mathbf{r}, t) \quad (21)$$

et la composante E_i du champ électrique est donnée par :

$$E_i = -\frac{\partial A_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} \quad (22)$$

qui correspond bien (à la charge q près) aux deux premiers termes du second membre de l'expression (18).

La composante i du produit vectoriel $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ est donnée par :

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k \quad (23)$$

où, de nouveau, la sommation sur les indices répétés (j et k) est sous-entendue.

On rappelle que ϵ_{ijk} est le tenseur antisymétrique de Levi-Civita défini par : $\epsilon_{123} = 1$ ainsi que toute permutation circulaire de ces indices : $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$. L'antisymétrie implique : $\epsilon_{213} = \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = -1$ et $\epsilon_{iik} = \epsilon_{ijj} = \epsilon_{iii} = \text{etc} = 0$.

Finalement une propriété importante de ce tenseur est :

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \sum_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) \quad (24)$$

δ_{ij} étant le symbole de Kronecker.

Comme \mathbf{B} est un rotationnel $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ sa composante B_k est donnée par :

$$B_k = \epsilon_{klm} \partial_l A_m. \quad (25)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})_i &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \dot{x}_j \partial_l A_m = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \dot{x}_j \partial_l A_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \dot{x}_j \partial_l A_m = \dot{x}_j \partial_i A_j - \dot{x}_j \partial_j A_i \\ &= -\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \right) \end{aligned} \quad (26)$$

qui sont bien les troisième et quatrième termes figurant dans le second membre l'expression (18).

2) On détermine d'abord le moment conjugué p_i . On a :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i(\mathbf{r}, t) \quad (27)$$

d'où :

$$\dot{x}_i(x_j, p_j) = \frac{p_i}{m} - \frac{qA_i(\mathbf{r}, t)}{m} . \quad (28)$$

On remarque que le moment conjugué est différent de l'impulsion $p_i = m\dot{x}_i$. Le Hamiltonien est donné par :

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_i \dot{x}_i - L(x_i, \dot{x}_i(x_j, p_j), t) \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{m} - \frac{q}{m} \sum_i p_i A_i - \frac{1}{2}m \sum_i \left(\frac{p_i}{m} - \frac{qA_i}{m} \right)^2 - q \sum_i A_i \left(\frac{p_i}{m} - \frac{qA_i}{m} \right) + q\phi \end{aligned} \quad (29)$$

où l'on a, cette fois, explicité les sommes (sur l'indice i). On a, en simplifiant l'expression précédente :

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi \quad (30)$$

où l'on remarque que l'impulsion de la particule \mathbf{p} est remplacée par $\mathbf{p} - q\mathbf{A}$.

3) Les équations de Hamilton sont données par : $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$ et $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ soit, de façon explicite :

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + q\phi(\mathbf{r}, t) \right] = -\frac{q}{m} (p_k - qA_k) \frac{\partial A_k}{\partial x_i} + q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (31)$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m} (p_i - qA_i) . \quad (32)$$

3.4 La courbe brachistochrone

Le principe variationnel dépasse le cadre de la mécanique analytique. Plus généralement, on peut utiliser l'équation d'Euler-Lagrange pour déterminer une fonction qui "extrémise" une certaine fonctionnelle. Des questions purement géométriques peuvent ainsi être traitées. Par exemple, dans le plan quelle est la courbe fermée qui a la plus grande surface pour un périmètre donné (problème des isopérimètres)? On écrira la surface comme une fonctionnelle dépendant de la forme de la courbe et on cherchera l'expression de cette courbe qui maximise la surface à périmètre donné.¹⁰

Nous allons maintenant nous intéresser au problème de la courbe brachistochrone :¹¹ En partant d'une position donnée sans vitesse initiale, quelle est la trajectoire qui permet d'atteindre le plus rapidement possible une position finale dans le champ de pesanteur?

Pour préciser les notations, supposons que le système parte du point A de coordonnées $x_A = 0$ et $y_A = h > 0$, sans vitesse initiale et glisse le long d'un toboggan jusqu'au point B de coordonnées $x_B = d > 0$ et $y_B = 0$ (voir la figure 2). On doit donc exprimer la durée du parcours entre A et B , puis chercher la courbe (la forme du toboggan) qui minimise cette durée.

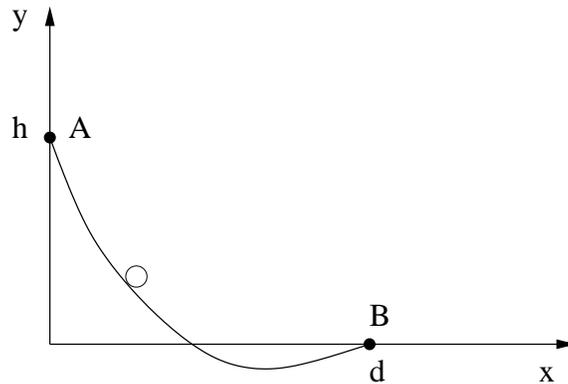


FIG. 2 – Un objet part du point A sans vitesse initiale et glisse le long de la courbe jusqu'au point B .

¹⁰La contrainte peut être traitée à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.

¹¹En grec, *Brakhisto* signifie "le plus court" et *chronos*, "le temps". Ce problème a été étudié par Leibniz, Newton, Jacques et Jean Bernouilli... puis par Euler en 1736 à l'aide du calcul variationnel.

Réponse :

Soit s l'abscisse curviligne, un élément de courbe ds s'exprime en coordonnées cartésiennes

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

où $y' = \frac{dy}{dx}$. La vitesse de l'objet est donnée par $v = \frac{ds}{dt}$. La conservation de l'énergie mécanique implique

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgh.$$

Exprimons le temps de parcours $T[y]$. C'est une fonctionnelle qui dépend de la forme $y(x)$ du toboggan. On a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{\sqrt{2g(h-y)}}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

soit

$$dt = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(h-y)}} dx.$$

Le temps de parcours s'écrit donc :

$$T[y] = \int_0^d L(y, y') dx,$$

où $L(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(h-y)}}$ ne dépend pas de x . La fonction L n'est bien sur pas un Lagrangien, mais on peut utiliser l'équation d'Euler-Lagrange pour trouver la forme $y(x)$ qui minimise la fonctionnelle $T[y]$. La variable muette n'est plus le temps t , mais l'abscisse x . Puisque L est indépendante de x ,

$$L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = C,$$

où C est une constante. Donc

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \sqrt{2g(h-y)}.$$

En élevant au carré on a donc :

$$1 + y'^2 = \frac{R}{h-y},$$

où $R = 1/2gC^2$. Posons $y' = \tan(\theta/2)$:

$$1 + y'^2 = 1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{R}{h-y},$$

soit

$$y = h - R \cos^2 \frac{\theta}{2} = h - \frac{R}{2}(1 + \cos \theta).$$

Par ailleurs,

$$y' = \tan(\theta/2) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{R}{2} \sin \theta \frac{d\theta}{dx} = R \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \frac{d\theta}{dx},$$

donc

$$dx = R \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta,$$

soit en intégrant

$$x = \frac{R}{2}(\theta + \sin \theta) + cte \quad \text{et} \quad y = h - \frac{R}{2}(1 + \cos \theta),$$

que l'on peut écrire avec le changement de variable $\theta \rightarrow \theta - \pi$ et en imposant $x(0) = 0$:

$$x = \frac{R}{2}(\theta - \sin \theta) \quad \text{et} \quad y = h - \frac{R}{2}(1 - \cos \theta).$$

C'est l'équation d'une cycloïde. Reste à déterminer R pour que la trajectoire passe par le point B . Sur la figure 3, on remarque que la pente à l'origine est infinie pour obtenir une accélération initiale maximale.

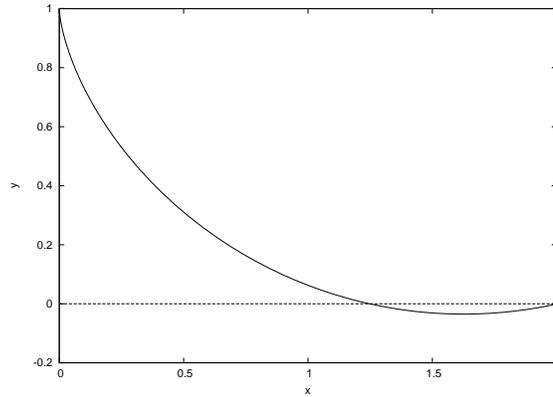


FIG. 3 – La courbe brachistochrone entre le point $A(0,1)$ et le point $B(2,0)$ pour $R \simeq 1.035$.