Annexe A

Annexe Mathématique

A.1 Notions de Tribus

On se donne un ensemble Ω d'éléments ω. On définit une tribu (ou une σ-algèbre) $\mathcal{C}$ de parties de Ω ainsi :

1. $\Omega \in \mathcal{C}$.
2. Si A et B appartiennent à $\mathcal{C}$, il en va de même de leur réunion et de leur intersection.
3. La réunion d'une infinité dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$ est aussi dans $\mathcal{C}$.
4. Si $A \in \mathcal{C}$, son complémentaire $\bar{A}$ aussi.

À chaque élément A de $\mathcal{C}$, on associe un réel ≥ 0, $\mu(A)$ avec la propriété : si les $A_i \in \mathcal{C}$ sont disjoints, alors

$$\mu\left(\bigcup A_i\right) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots$$

On peut en déduire facilement que :
- $\mu(\emptyset) = 0$ (penser que $\emptyset \bigcap \emptyset = \emptyset \bigcup \emptyset = \emptyset$),
- si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$,
- $\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \bigcap B)$.

On dit que μ est une mesure définie sur la tribu $\mathcal{C}$.

Si $\mu(\Omega) = 1$, la mesure s'appelle alors une probabilité qu'on notera $p(A)$ et les éléments de la tribu sont appelés événements.

Variable aléatoire

Soit ω un élément de Ω (où on a défini une σ-algèbre et une probabilité), on appellera variable aléatoire réelle $X(\omega)$ toute fonction mesurable $X : \Omega \to R$. Mesurable veut dire que quelle que soit $x \in R$, l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \leq x$ est un élément[1] de la tribu $\mathcal{C}$ de Ω sur R. Donc l'ensemble des ω tels que $X(\omega) \leq x$ est un événement A_x. Comme tel il a une probabilité. Cette

[1] C'est aussi être vrai pour l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) < x$ et aussi tel que $X(\omega) = x$.

probabilité qui dépend de x, $F(x)$, s'appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X. Il est clair que

$$Pr(x_1 \leq X(\omega) < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

En effet l'ensemble des ω tel que $X(\omega) < x_2$ est la réunion de deux ensembles disjoints tels que $X(\omega) < x_1$ et $x_1 \leq X(\omega) < x_2$). La fonction de répartition $F(x)$ est donc positive, croissante et tend vers 1 quand $x \to \infty$.

Dans le cas continu, on en déduit que si la fonction F est dérivable, quand $dx \to 0$ on a

$$Pr(X(\omega) \in x, x + dx) = \frac{dF}{dx}dx = f(x)dx,$$

où $f(x)$ définit une densité de probabilité.

On pourra traiter les cas discrets et continus dans le même formalisme en acceptant d'inclure dans les fonctions de répartition les fonctions dérivables au sens des distributions (c'est-à-dire dérivable sauf en un nombre fini de points sur tout intervalle où il y a des discontinuités de première espèce). C'est par exemple le cas de fonctions étagées croissantes. Au jeu de dés on écrira

$$f(x) = 1/6 \sum_{n=1}^{6} \delta(x - n),$$

où $\delta(x - n)$ est la distribution de Dirac au point n. Si on ne veut pas utiliser les distributions, on peut dans cette formule considérer les $\delta(x - n)$ comme des symboles de Kronecker $\delta_{x,n}$ qui valent 1 si $x = n$ et 0 sinon. Ici, la fonction de répartition est une fonction en escalier qu'on peut toujours considérer comme somme de fonctions de Heaviside.

Exemple : prenons le Ω de la table 1. Définissons ainsi la variable aléatoire : $X(1.) = X(2.) = X(3.) = 2$, de $i = 4$ à 21 $X(\omega) = 1$ et enfin $X(\omega) = 0$ pour $i = 22$ à 27. C'est le nombre de sites inoccupés. On vérifie bien que $\forall x$, l'ensemble des ω tels que $X(\omega) < x$ est bien un événement. Il est facile de dessiner $F(x)$ (voir la Figure 1).

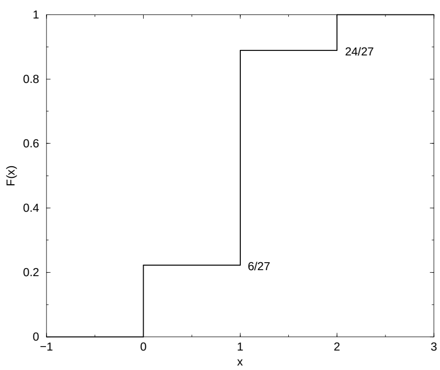

FIG. A.1 – *Fonction de répartition $F(x)$. Voir texte.*

A.2 Fonction $\Gamma(x)$ et $B(p,q)$

Soit l'intégrale gaussienne

$$I(n) = \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx,$$

où $\alpha > 0$.

Calculons $J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = 2I(0)$, car $I(0)$ est paire. Pour commencer exprimons J^2 sous la forme d'une intégrale double en coordonnées cartésiennes :

$$J^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dxdy.$$

En passant en coordonnées polaires : $x^2 + y^2 = r^2$ et $dxdy = rdrd\theta$. Donc

$$\begin{aligned} J^2 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\alpha r^2} rdrd\theta \\ &= 2\pi\big[-\frac{e^{-\alpha r^2}}{2\alpha}\big]_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{\alpha}. \end{aligned}$$

Donc :

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

De même, on peut calculer directement $I(1)$:

$$\begin{aligned} I(1) &= \int_0^\infty x\, e^{-\alpha x^2} dx \\ &= \big[-\frac{e^{-\alpha x^2}}{2\alpha}\big]_0^\infty \\ &= \frac{1}{2\alpha}. \end{aligned}$$

Les intégrales $I(n)$ pour $n > 1$ s'expriment en fonction de $I(0)$ et $I(1)$ de la façon suivante :

$$I(n) = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\int_0^\infty x^{n-2} e^{-\alpha x^2} dx\right) = -\frac{\partial I(n-2)}{\partial \alpha}$$

Par exemple, $I(2) = -\frac{\partial I(0)}{\partial\alpha}$ et ainsi de suite. On trouve $I(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, $I(1) = \frac{1}{2\alpha}$, $I(2) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{\frac{3}{2}}}$, $I(3) = \frac{1}{2\alpha^2}$ et $I(4) = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\alpha^{\frac{5}{2}}}$

On définit la fonction Gamma pour $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = 2\int_0^\infty e^{-s^2} s^{2x-1} ds.$$

Clairement

$$\Gamma(1) = 1 \quad \text{et} \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

En intégrant par parties on montre que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Donc pour tout n entier positif :

$$n! = \Gamma(n+1). \tag{A.1}$$

Les fonctions beta $B(p,q)$ sont définies par

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \quad \text{avec} \quad p > 0 \quad \text{et} \quad q > 0.$$

On a :

$$B(p,q) = B(q,p).$$

On montre aussi que

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Démonstration : Écrivons le produit $\Gamma(p)\Gamma(q)$ comme une intégrale double en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2p-1}dx\, 2\int_0^\infty e^{-y^2}x^{2q-1}dy \\ &= 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy, \end{aligned}$$

puis on passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta \\ &= 2\Gamma(p+q)\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta. \end{aligned}$$

Ce qui fournit, en passant, les formules de Wallis donnant l'intégrale de $\cos^m\theta \sin^n\theta$ entre 0 et $\pi/2$). Reste à poser $cos^2\theta = t$:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \Gamma(p+q)B(p,q).$$

A.3 Formule de Stirling

C'est une approximation très utile de $n!$ d'autant meilleure que n est grand :

$$n! \simeq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\ . \tag{A.2}$$

Dans un premier temps, voyons une approximation grossière de $n!$. Remarquons que

$$\ln n! = \ln n(n-1)...1 = \sum_{p=1}^{n} \ln p.$$

Lorsque n est grand par rapport à 1, cette somme peut être approximée par une intégrale ($\ln p$ varie peu lorsque p augmente d'une unité pour $p >> 1$). Ainsi,

$$\ln n! \simeq \int_1^n \ln(x)dx = \Big[x \ln x - x\Big]_1^n \simeq n \ln n - n.$$

Démontrons à présent la formule de Stirling par la méthode du col. D'après l'équation A.1 :

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt = \int_0^\infty e^{-f(t)} dt.$$

où $f(t) = t - n \ln t$. La fonction e^{-t} décroît rapidement avec t, alors que t^n croit rapidement (pour n grand). Le produit $e^{-t}t^n$ présente donc un maximum très marqué en $t_0 = n$ et vaut pratiquement zéro en dehors de cette région. En prenant le logarithme, on obtient la fonction $f(t)$ qui elle présente un minimum en t_0. Puisque l'intégrand ne prend des valeurs notables qu'autour du minimum t_0 ($f'(t_0) = 0$), on va remplacer la fonction $f(t)$ par son développement de Taylor au deuxième ordre :

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{2}(t-t_0)^2 f''(t_0) + ... \simeq n \ln n - n + \frac{1}{2n}(t-t_0)^2,$$

puisque $f(t_0) = n - n \ln n$ et $f''(t_0) = 1/n$. On en déduit :

$$n! \simeq n^n e^{-n} \int_0^\infty e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2n}} dt.$$

En effectuant le changement de variable $u = t - n$:

$$n! \simeq n^n e^{-n} \int_{-n}^\infty e^{-\frac{u^2}{2n}} du,$$

et puisque $n >> 1$, on reconnaît une intégrale gaussienne et finalement :

$$n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

A.4 Volume et surface de l'hypersphère

Dans l'espace à N dimensions, $\mathcal{R}^N$, pour des raisons d'homogénéité, le volume de la sphère de rayon R est

$$V_N = \alpha_N R^N,$$

où α_N est le volume de la sphère[2] de rayon 1 :

$$\alpha_N = \int_{||x||^2 \leq 1} d\mathbf{x} = \int_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_N^2 \leq 1} dx_1 dx_2 \ldots dx_N,$$

ou encore

$$\alpha_N = \int_{-1}^{1} dx_1 \int_{x_2^2+x_3^2+\ldots+x_N^2 \leq 1-x_1^2} dx_2 dx_3 \ldots dx_N,$$

où le domaine d'intégration de la seconde intégrale est le volume de la sphère de rayon $\sqrt{1-x_1^2}$ de $\mathcal{R}^{N-1}$. Donc :

$$\alpha_N = 2\alpha_{N-1} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{N-1}{2}} dx = \alpha_{N-1} B(\frac{1}{2}, \frac{N+1}{2}),$$

où l'on a posé $x^2 = t$, pour exprimer l'intégrale sous la forme d'une fonction $B(\frac{1}{2}, \frac{N+1}{2})$ que l'on écrit à l'aide des fonctions Γ. Finalement, on trouve en résolvant la relation de récurrence :

$$V_N = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2+1)} R^N = \alpha_N R^N. \tag{A.3}$$

L'expression (A.3) sera généralement évaluée à l'aide de la formule de Stirling.

Par définition l'hypersurface S_N sera définie par $\dfrac{dV_N}{dR}$. Soit $S_N = \dfrac{V_N N}{R}$.

Soit $f(\mathbf{x})$ une fonction intégrable sur $\mathcal{R}^N$ ne dépendant que de $r = ||x||$, alors l'intégrale multiple se ramène à une intégrale simple

$$\int f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = N\alpha_N \int_0^{\infty} f(r) r^{N-1} dr.$$

En effet $d\mathbf{x} = dV_N = N\alpha_N r^{N-1} dr$. On voit facilement que pour R fixé, $V_N \to 0$ quand $N \to \infty$.

A.5 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Soit $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une fonction de n variables, où f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans un domaine $\mathcal{D}$. Pour que f soit extremale dans $\mathcal{D}$, il faut que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1 \cdots n.$$

Si de plus les variables x_i vérifient la condition

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0,$$

[2] Ainsi, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = \pi$ et $\alpha_3 = \frac{4}{3}\pi$.

les extrema x_i de f sont donnés par

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad i = 1 \cdots n,$$

où les dx_i ne sont plus indépendants, mais liés par

$$\sum \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad i = 1 \cdots n.$$

Adoptons un point de vue géométrique. Considérons les trois vecteurs : $\mathbf{F} = \{\frac{\partial f}{\partial x_i}\}$, $\mathbf{G} = \{\frac{\partial g}{\partial x_i}\}$ et $\mathbf{dx} = \{dx_i\}$. On cherche alors les solutions de

$$\mathbf{F}.\mathbf{dx} = 0, \tag{A.4}$$

avec

$$\mathbf{G}.\mathbf{dx} = 0. \tag{A.5}$$

Ce qui veut dire que $\mathbf{G}$ est orthogonal au sous-espace orthogonal à $\mathbf{F}$ et donc[3] qu'il sont colinéaires. Il existe alors un nombre μ tel que $\mathbf{F} + \mu\mathbf{G} = 0$. On devra donc résoudre le système de n équations à $n+1$ inconnues (μ et les n variables x_i)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0,$$

complété par

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0.$$

[3]Ceci est clair dans $\mathcal{R}^3$: les $\mathbf{dx}$ sont dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{F}$, mais on peut généraliser.