Mécanique Quantique

TD n°6 : Oscillateur harmonique

Exercice 1: Etats cohérents

1. **Quelques rappels sur l' oscillateur harmonique**

   On considère un oscillateur harmonique classique d'énergie

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \quad .$$

   (a) Ecrire l'énergie E en terme des variables sans dimension

$$X_{cl} = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x \quad ; \quad P_{cl} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega_0}}mv \quad .$$

   (b) Résoudre l'équation du mouvement associée à la variable $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X_{cl} + iP_{cl}\right)$ et écrire l'énergie en terme de cette variable.

   (c) Quelle est la densité de probabilité de présence en un point x lorsque le système est dans son état d'énergie minimale ? Comparer ce résultat à la situation quantique et l'expliquer qualitativement.

   (d) Rappeler l'expression des opérateurs de création et d'annihilation en terme des opérateurs sans dimension:

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\hat{x} \quad \text{et} \quad \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega_0}}\hat{p}$$

   (e) En utilisant le Théorème d'Erhenfest, écrire d'une manière générale les équations différentielles vérifiées par $\langle\hat{X}\rangle(t)$, $\langle\hat{P}\rangle(t)$ et $\langle\hat{a}\rangle(t)$. Quelle remarque s'impose ? Que se passe-t-il si le système est dans un état d'énergie fixée $|n\rangle$? Conclusion.

2. **Définition des états cohérents**

   On définit un état cohérent comme un état propre (normé à 1) de l'opérateur d'annihilation

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad .$$

   (a) Donner l'expression de $|\alpha\rangle$ dans la base des états propres du Hamiltonien $\{|n\rangle\}$ en fonction de α (on choisira la phase de telle façon que $\langle 0|\alpha\rangle > 0$).

   (b) Déduire de la question précédente la loi de $\alpha(t)$ associée au ket $|\alpha(t)\rangle$ lorsque le système est dans l'état $|\alpha_0\rangle$ à l'instant initial. Conclusion.

3. **Quelques propriétés des états cohérents**

   (a) On suppose que le système est dans l'état $|\alpha_0\rangle$ à l'instant $t = 0$. Calculer les quantités suivantes: $\langle\hat{X}\rangle(t)$, $\langle\hat{P}\rangle(t)$ et le produit $\langle\Delta X\rangle\langle\Delta P\rangle$.

   (b) On mesure l'énergie du système: quels résulats peut-on trouver et avec quelles probabilités. Calculer la valeur moyenne $\langle\hat{H}\rangle$ et l'écart quadratique moyen $\langle\Delta H\rangle$.

(c) Dans quelle limite sur α les états cohérents permettent-ils de retrouver des résultats classiques ? On considère un pendule tel que $l = 20$ cm et $m = 20$ g laché sans vitesse initiale d'un angle $\theta = \frac{\pi}{10}$. En supposant que l'on puisse décrire ce système à l'aide d'un état cohérent, calculer la valeur de $|\alpha|$.

(d) En utilisant l'identité suivante, valable pour deux opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ qui commutent avec leur commutateur (identité dite de Glauber):

$$\exp(\hat{A})\exp(\hat{B}) = \exp\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\exp\left(\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right) \quad ,$$

montrer que l'opérateur $\hat{\mathcal{D}}(\alpha) = \exp\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)$ est unitaire et permet de définir un état cohérent avec la relation

$$|\alpha\rangle = \hat{\mathcal{D}}(\alpha)|0\rangle \quad .$$

(e) Montrer que dans la représentation-x un état cohérent a pour expression

$$\langle x|\alpha\rangle = \mathcal{N}\exp\left(\frac{ix\langle\hat{p}\rangle}{\hbar}\right)\exp\left(-\frac{m\omega_0(x-\langle\hat{x}\rangle)^2}{2\hbar}\right) \quad .$$

Exercice 2: Mesures successives sur un oscillateur harmonique

On considère un oscillateur harmonique à une dimension (direction x), caractérisé par la masse m et la pulsation propre ω_0. On note $|n\rangle$ l'état propre possédant n noeuds. A l'instant initial, la fonction d'onde est

$$|\psi(t=0)\rangle = \mathcal{N}\left(|0\rangle + i\sqrt{3}|1\rangle\right)$$

1. Calculer la constante de normalisation $\mathcal{N}$.
2. Donner l'expression de la fonction d'onde $|\psi(t)\rangle$.
3. Comment évolue l'énergie moyenne du système au cours du temps si le système n'est pas perturbé par le milieu extérieur ?
4. Donner les expressions de la position et de l'impulsion moyenne en fonction du temps. Calculer le produit des écarts quadratiques $\Delta X \Delta P$.
5. A l'instant $t = \frac{\pi}{\omega_0}$, on mesure l'énergie du système. Quelle valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ? On suppose que dans l'expérience, on a mesuré $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$ (on suppose aussi que cette mesure n'est pas destructive). Quel est l'état du système pour $t > \frac{\pi}{\omega_0}$. Calculer le produit $\Delta X \Delta P$.
6. A l'instant $t = \frac{2\pi}{\omega_0}$, on effectue une mesure non destructive correspondant à l'observable $\mathcal{O}$ telle que $\mathcal{O} = 1$ si le quanton est dans le demi-espace $x > 0$ et $\mathcal{O} = 0$ sinon. Quelle est la probabilité d'avoir $\mathcal{O} = 1$? En supposant que le résultat de la mesure est effectivement $\mathcal{O} = 1$, quel est l'état du système en représentation x juste après cette mesure ?
7. Quel peut-être le résultat d'une mesure de l'énergie pour $t > \frac{2\pi}{\omega_0}$?