DM-Mécanique Quantique

Effet Bohm-Aharonov

Dans ce problème, on considère un électron, sans tenir compte du degré de liberté de spin. L'électron est en mouvement dans l'espace en présence d'un solénoïde infini d'axe Oz (de vecteur unitaire $\vec{u}_z$), de rayon R et ayant une densité de spires n (nombre de spires par mètre) parcourues par l'intensité I. Le champ magnétique $\vec{B}$ engendré par le solénoïde est caractérisé par:

$$\vec{B}(\vec{r}\,) = \begin{cases} \mu_0 nI\ \vec{u}_z & \text{à l'intérieur du solénoïde} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur} \end{cases} \quad . \tag{1}$$

On suppose que la fonction d'onde électronique est nulle à l'intérieur du solénoïde.

1. Calculer le flux Φ du champ $\vec{B}$ à travers une section droite du solénoïde de rayon R.

2. Afin de simplifier la discussion, On fait tendre le rayon R vers zéro alors que Φ et maintenu constant. Montrer que le potentiel vecteur ayant pour expression:

$$\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi(x^2+y^2)}(-y\vec{u}_x + x\vec{u}_y) \quad ,$$

décrit bien un champ magnétique nul en tout point à l'exception de l'axe Oz. En coordonnées cylindriques, ce même potentiel vecteur s'écrit aussi $\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi\rho}\vec{u}_\theta$, où $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\vec{u}_\theta$ est le vecteur unitaire ortho-radial. Vérifier sur cette expression que $\int_{\mathcal{C}} \vec{A}d\vec{l} = \Phi$ lorsque le contour $\mathcal{C}$ entoure le solénoïde.

On constate donc qu'en tout point de l'espace (à l'exception du voisinage immédiat de l'axe $0z$), on a un potentiel vecteur non nul et un champ magnétique nul.

3. On considère le mouvement classique d'un électron (toujours supposé sans spin) dans ce dispositif. La trajectoire de l'électron (supposée ne jamais couper l'axe Oz) est-elle sensible à l'existence d'un courant dans le solénoïde ?

4. L'Hamiltonien décrivant un électron soumis à un potentiel V et un potentiel vecteur $\vec{A}$ s'écrit: $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\hat{\mathcal{D}}}^2 + V(\hat{\vec{r}})$, où l'on a introduit l'opérateur $\vec{\hat{\mathcal{D}}} = \vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar}\vec{A}(\vec{r}\,)$.

   (a) Quelle équation aux dérivées partielles doit vérifier la phase $\chi(\vec{r}\,)$ pour que l'on ait l'identité : $\vec{\hat{\mathcal{D}}}\left(\exp\left(i\chi(\vec{r}\,)\right)\Psi_0(\vec{r},t)\right) = \exp\left(i\chi(\vec{r}\,)\right)\vec{\nabla}\Psi_0(\vec{r},t)$? Pour quel type de potentiel vecteur cette équation admet-elle une solution ? Quelle est la valeur du champ magnétique associé ?

   (b) En déduire que si $\Psi_0(\vec{r},t)$ est solution de l'équation de Schrödinger lorsque $I = 0$ (on ne demande pas de résoudre l'équation) , alors $\exp\left(i\chi(\vec{r}\,)\right)\Psi_0(\vec{r},t)$ est solution de cette équation pour $I \neq 0$.

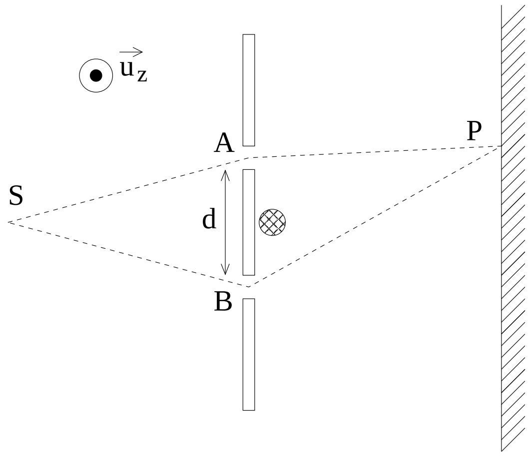

Figure 1: Expérience de principe pour mettre en évidence l'effet Bohm-Aharonov. S représente la source d'électrons, le cercle hachuré shématise le solénoïde en coupe.

5. On considère une expérience d'interférences du type fente d'Young pour des électrons (voir figure 1). S représente la source d'électrons qui sont émis dans toutes les directions avec l'énergie $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Le rôle des parois délimitant les fentes en A et B est d'imposer une fonction d'onde nulle à leur contact : elles agissent comme des conditions limites sur la fonction d'onde. On place juste derrière les fentes un solénoïde de très petit rayon (cercle hachuré sur la figure). Les fentes sont de dimensions telles que, malgré l'étalement des paquets d'onde émergeant des deux fentes, la probabilité de présence de l'électron est négligeable au voisinage du solénoïde.

   (a) On appelle $\Psi_{(A,I)}(\vec{r})$ la fonction d'onde calculée lorsque la fente en B est "bouchée", et $\Psi_{(B,I)}(\vec{r})$ la fonction d'onde lorsque la fente en A est "bouchée", le solénoïde étant parcouru par l'intensité I dans les deux cas. Montrer qu'en tout point extérieur au solénoïde : $\Psi_{(A,I)}(\vec{r}) = \Psi_{(A,0)}(\vec{r}) e^{i\chi(\vec{r})}$ avec $\chi(\vec{r}) = \chi(S) + \frac{q}{\hbar}\int_{\mathcal{C}_A} \vec{A}d\vec{l}$, $\mathcal{C}_A$ étant une courbe quelconque reliant S au point considéré ne passant pas à l'intérieur du solénoïde.

   Montrer que la formule ci-dessus ne donne pas au facteur de phase $e^{i\chi(\vec{r})}$ une valeur unique, mais un ensemble discret de valeurs dépendant de la courbe $\mathcal{C}_A$ choisie. Pour lever cette indétermination, on admettra qu'on ne doit considérer que les "chemins" $\mathcal{C}_A$ qui passent en des points où la fonction d'onde prend des valeurs non négligeables.

   (b) Exprimer la fonction d'onde de l'électron dans le dispositif comprenant les deux fentes d'Young ouvertes, en fonction des fonctions d'onde $\Psi_{(A,0)}(\vec{r})$, $\Psi_{(B,0)}(\vec{r})$, et de la circulation du potentiel vecteur sur deux chemins $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$.

   (c) En déduire la probabilité de présence de l'électron en un point P de l'écran.

   Montrer que la présence d'un courant dans le solénoïde provoque un déphasage dans le terme d'interférence $\Psi^*_{(B,I)}(P)\Psi_{(A,I)}(P)$ dont on calculera la valeur en fonction du courant I.

   (d) Quel est l'effet de ce déphasage sur la figure d'interférence observée ?

6. Le potentiel vecteur est-il seulement un intermédiaire de calcul ?