

FRG lectures 2025

B. Delamotte, LPTMC, Sorbonne Université

1 Introduction

"J'écrivais des silences, des nuits, je notais l'inexprimable. Je fixais des vertiges. "
Arthur Rimbaud

"Il y a un autre monde mais il est dans celui-ci."
Paul Eluard

1.1 Ce sur quoi nous parlerons dans ces notes et ce que nous laisserons de côté

Nous allons dans ces notes parler de la version moderne du groupe de renormalisation (RG) à la Wilson, aujourd'hui appelée groupe de renormalisation fonctionnel (FRG) ou groupe de renormalisation non perturbatif (NPRG) ou groupe de renormalisation fonctionnel non perturbatif (NPFRG).¹ Dans une première partie du cours, il s'agira essentiellement de méthodologie et les transitions de phase du second ordre dans des modèles simples du style Ising ou $O(N)$ nous serviront de support pour montrer concrètement comment sont effectués les calculs et quels sont les concepts fondamentaux sous-tendant toute l'approche. Au passage, seront montrés certains aspects structurels du groupe de renormalisation fonctionnel: flot de RG dans un espace de dimension infinie ("large river effect"), notion de limite continue, convergence du développement dérivatif, liberté asymptotique ultra-violet (UV) et infrarouge (IR), etc. Seront aussi montrées (succinctement, hélas) les relations entre renormalisation perturbative et non perturbative et quelques artefacts de la théorie de perturbation. Et finalement, pour cette première partie, seront montrés les avantages et les inconvénients de la renormalisation Wilsonienne.

Même si la première partie du cours ne se privera pas de présenter quelques résultats physiques relatifs aux transitions de phase, c'est dans la deuxième partie du cours que seront exposées des applications tout à fait non triviales à des systèmes physiques, ici des systèmes relevant de la matière condensée quantique. Ne seront pas abordées les applications aux théories de jauge, à la cosmologie et à la gravité quantique, par exemple. Il sera donc utile de consulter la revue:

"*The nonperturbative functional renormalization group and its applications*", N. Dupuis, L. Canet, A. Eichhorn, W. Metzner, J. M. Pawłowski, M. Tissier, N. Wschebor, Physics Reports 910, 1 (2021) et arXiv:2006.04853

qui expose un assez grand nombre d'applications physiques de la méthode et fournit une bibliographie considérable du domaine.

Une introduction à la renormalisation fonctionnelle est donnée dans:

"*An Introduction to the Nonperturbative Renormalization Group*", B. Delamotte, in: A. Schwenk, J. Polonyi (Eds.), Renormalization Group and Effective Field Theory Approaches to Many-Body Systems, Vol. 852 of Lecture Notes in Physics, Springer Berlin Heidelberg, 2012, pp. 49–132. doi:10.1007/978-3-642-27320-9_2 et arXiv:cond-mat/0702365

¹Le nom: "groupe de renormalisation exact" a aussi été employé dans le passé mais ne l'est plus aujourd'hui, fort heureusement.

et dans les notes mis à disposition par N. Dupuis sur sa homepage.

Les curieuses pourront également consulter l'article pédagogique (?) d'introduction à la renormalisation perturbative:

A hint of renormalization, B. Delamotte, Am. J. Phys. 72, 170–184 (2004) <https://doi.org/10.1119/1.1624112>
et Arxiv hep-th/0212049v3

ainsi que le livre:

Quantum and Statistical Field Theory, M. Le Bellac, Oxford Science Publications, Clarendon Press, 1991.

1.2 La renormalisation, un peu d'histoire

"La vérité ne triomphe jamais mais ses adversaires finissent par mourir "

M. Planck

L'histoire de la renormalisation et du groupe de renormalisation reste largement à écrire. Il se trouve que si l'on se passe très bien de l'histoire de l'électromagnétisme pour comprendre les équations de Maxwell, tel n'est pas tout à fait le cas pour la renormalisation, et plus encore pour le groupe de renormalisation, tant l'emprise de l'histoire sur ce domaine continue à façonner les esprits en 2025. Ce qui va suivre ne constitue en aucun cas une relation fidèle du déroulement historique de la renormalisation, les lacunes et les affirmations par trop approximatives y abondant, et ne sera là que pour suggérer le pourquoi de cet étrange état de fait: nous disposons aujourd'hui d'une méthode de renormalisation, certes incomplète mais aussi puissante d'un point de vue pratique que conceptuellement claire, et qui reste pourtant largement ignorée, sinon vouée aux gémonies, par la plus grande partie de la communauté physicienne directement intéressée par les problèmes qu'elle pourrait contribuer à résoudre. La nécessité de transmettre cette méthode aux plus jeunes sous la forme du cours, objet de ces notes, vient de là.

Commençons par un peu de chronologie.

- 1947: Premier calcul du Lamb shift en électrodynamique quantique par H. Bethe; la renormalisation naît véritablement ici,
- 1953 et 1954: E. Stueckelberg et A. Petermann puis M. Gell-Mann et F. E. Low: loi de groupe structurant la renormalisation perturbative et première notion de constante de couplage dépendant de l'échelle d'énergie,
- 1957: Première procédure systématique d'élimination des divergences UV dans les théories quantiques des champs par N. N. Bogoliubov et O. Parasiuk
- 1959: Livre de N. N. Bogoliubov et D. Shirkov intitulé "The Theory of Quantized Fields", prétend expliquer le fond conceptuel du groupe de renormalisation, largement incompris,
- 1966 - 1969: K. Hepp puis W. Zimmermann achève la construction initiée par Bogoliubov et Parasiuk; la renormalisation perturbative est entièrement sous contrôle (programme BPHZ),
- années 60: la théorie quantique des champs (QFT) est de plus en plus mise de côté en physique des particules, mis à part pour QED qui apparaît pour beaucoup comme une heureuse exception ne se généralisant pas aux autres interactions (faible, forte et gravitationnelle); quant à la théorie statistique des champs (SFT), elle n'est pas encore née,
- 1970 - 1972: preuve de la renormalisabilité des théories de jauge (théories de Yang-Mills) par G. 't Hooft et M. Veltman: renouveau pour l'intérêt de la théorie des champs en physique des hautes énergies; le modèle de Glashow-Weinberg-Salam élaboré dans les années 60 sera vite reconnu comme un candidat sérieux pour la description des interactions électromagnétique et faible,

- 1970: formulation des équations du groupe de renormalisation par Callan et Symanzik,
- 1971: formulation par K. Wilson de sa vision du groupe de renormalisation et de ses applications aux phénomènes critiques; la théorie statistique des champs, bien que balbutiante avant cette date, naît véritablement ici,
- 1972: élaboration du développement en $\epsilon = 4 - d$ avec applications en mécanique statistique par K. Wilson et M. Fisher,
- 1973: preuve de la liberté asymptotique dans les théories de Yang-Mills (calcul à une boucle) par D.J. Gross et F. Wilczek ainsi que par H.D. Politzer (leur vaudra le prix Nobel),
- années 70 et 80: explosion des études utilisant la renormalisation et le groupe de renormalisation perturbatif en physique des hautes énergies, physique statistique et physique de la matière condensée quantique; très peu d'études seront entreprises à cette époque en suivant les idées non perturbatives de Wilson: "on pense à la Wilson et on calcule à la Feynman",
- 1984: dérivation par J. Polchinski d'une équation exacte du RG Wilsonien et application à la théorie quantique des champs perturbative,
- 1994: U. Ellwanger, T. Morris et C. Wetterich dérivent indépendamment une équation de RG exacte pour le groupe de renormalisation fonctionnel différente de celle de Polchinski (et reliée par transformation de Legendre). Cette équation et les approximations qu'elle permet marquent le renouveau de la renormalisation fonctionnelle et non perturbative à la Wilson.²

On lira avec profit à propos de l'histoire de ce domaine le discours Nobel de K. Wilson:

The renormalization group and critical phenomena, 8 December 1982.

Depuis 1995, de très nombreux papiers ont utilisé les méthodes du FRG dans beaucoup de domaines (voir la bibliographie de la revue de N. Dupuis et al. citée ci-dessus). De façon un peu étrange et malgré les progrès indéniables que la renormalisation fonctionnelle a permis dans beaucoup de domaines, la méthode reste l'apanage d'une assez petite communauté et est encore et toujours considérée par beaucoup comme une bizarrerie conduisant à des calculs incontrôlés qu'il vaut mieux ignorer (sous-entendant par là que les calculs perturbatifs sont, quant à eux, tout à fait contrôlés!). Qui a par exemple entendu parler dans la communauté de la théorie des cordes du scénario dit de "asymptotic safety" pour ce qui concerne la gravité quantique, scénario montrant que la gravité à la Hilbert-Einstein pourrait conduire à une théorie quantique renormalisable en un sens non perturbatif? Essentiellement personne bien que ce scénario ait été initié par S. Weinberg à la fin des années 70...

Historiquement, la renormalisation a été mise au point en théorie quantique des champs (en fait, essentiellement en QED) pour éliminer les divergences qui apparaissent au deuxième ordre de la théorie de perturbation et à tous les ordres ultérieurs.³ Ces divergences sont des divergences UV, c'est à dire des divergences prenant leur source dans le comportement de grande impulsion de la théorie (hautes énergies) ou, dit autrement, de courte distance. La renormalisation a donc été construite comme un algorithme récursif, c'est à dire fonctionnant ordre par ordre de la série perturbative, d'élimination de ces divergences. L'algorithme a semblé un tantinet magique et mal défini à beaucoup de physiciens des années 50 jusqu'à 80, mais a tiré sa justification a posteriori en construisant une théorie de perturbation qui, ordre par ordre, est bien définie, au seul prix de fixer

²A noter: cette équation avait été dérivée avant eux à plusieurs reprises, y compris dans les années 70 mais soit elle n'avait pas été exploitée, soit elle ne l'avait été que dans le cadre perturbatif.

³La théorie de perturbation (graphes de Feynman) en QFT est un développement semi-classique. Pour un processus donné et qui existe en électrodynamique classique, tel que par exemple la diffusion d'un électron sur un noyau, le premier ordre de la théorie des perturbations donne le résultat classique et les ordres successifs une série en puissances de $\hbar$. Ceci est vrai pour toute théorie quantique des champs.

un nombre fini (et petit) de paramètres externes, tels que des masses et des constantes de couplage. La méthode construit ainsi une théorie prédictive puisqu’une infinité de quantités indépendantes peuvent être calculées à condition de fixer par l’expérience un nombre fini de paramètres non prédits par la théorie.

L’origine des divergences UV est bien connue. En passant de la théorie classique à la théorie quantique, les champs doivent être considérés non plus comme des fonctions mais comme des distributions à valeur opérateur.⁴ Or, les interactions étant locales, elles se traduisent dans un lagrangien par des produits d’opérateurs au même point d’espace-temps (par exemple $\phi^4(x)$ ou $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)$), c’est à dire à des produits au même point de distributions, ce qui est en général illégal. A partir des théories classiques qui sont locales, la procédure de “quantification canonique”⁵ produit donc génériquement des “prolongements distributionnels” quantiques qui sont malades à courte distance et la renormalisation perturbative construit ordre par ordre le bon prolongement en modifiant (on dit, en régularisant) la structure de courte distance de la théorie tout en préservant celle à longue distance.⁶ Que ce problème traduise un vrai problème physique des théories quantiques des champs ou bien n’est qu’un artefact de la théorie des perturbations n’est pas facilement décidable dans le cadre perturbatif et la réalité est que pour une partie, les divergences UV rencontrées en théorie des perturbations traduisent un comportement réel des “fluctuations” quantiques de courte distance et, pour une autre, sont une pathologie du développement perturbatif lui-même. On admettra donc qu’au delà de l’algorithme d’élimination des divergences UV, il n’était pour le moins pas facile de se repérer dans cet imbroglio conceptuel.

Le groupe de renormalisation quant à lui apparaît à l’époque, c’est à dire avant les années 70, comme une condition de cohérence de la renormalisation perturbative qui permet dans certains cas de l’améliorer en resommant une partie des termes du développement perturbatif.⁷ Logiquement, le groupe de renormalisation vient donc après la renormalisation perturbative qui, d’un point de vue pratique, peut très bien s’en passer. Il semble être une sorte de sous-produit bienvenu de la renormalisation perturbative. Même avec la formalisation définitive par Callan et Symanzik des équations de groupe de renormalisation utilisées en théorie de perturbation, celui-ci ne constitue pas une méthode de calcul en soi mais est plutôt un post-traitement des résultats perturbatifs. Par exemple, à partir d’un résultat perturbatif comme $X(t) = X_0(1 + \alpha\epsilon \log t + O(\epsilon^2))$, le groupe de renormalisation à la Callan-Symanzik peut, si c’est le cas, montrer qu’il s’agit du développement d’une loi de puissance qui est donc inévitablement $X(t) = X_0 t^{\alpha\epsilon + O(\epsilon^2)}$. Ceci n’est en rien anodin car reconstruire la loi de puissance, c’est resommer des puissances d’ordre arbitrairement élevé en ϵ alors même que seul le premier ordre est connu initialement. Pour autant, le groupe de renormalisation à la Callan-Symanzik ne permet pas de calculer le développement perturbatif, les techniques à la Feynman étant requises pour cela.

Le groupe de renormalisation permet par contre d’expliquer que les constantes de couplage deviennent des fonctions de l’échelle (de distance, d’énergie, etc) où elles sont mesurées. En effet, les constantes de couplage sont effectivement des constantes pour les théories classiques comme c’est le cas pour la charge électrique en électrodynamique classique: une expérience (de diffusion de deux électrons par exemple) permet de mesurer cette charge qui est la même constante de couplage intervenant dans tous les phénomènes d’électrodynamique classique mettant seulement en jeu des électrons. Tel n’est pas le cas en électrodynamique quantique et, de façon plus générale, en QFT.

⁴Pour être précis sinon pédant, les champs quantiques doivent être considérés comme des distributions tempérées à valeur opérateur.

⁵La mal nommée...

⁶Bien sûr, les notions de courte et longue distance devraient être rendues précises en spécifiant par rapport à quelle échelle de distance elles sont considérées comme étant courte ou longue. On peut se suffire à ce stade de penser en termes de asymptotiquement courtes et asymptotiquement longues distances quand bien même on peut rendre tout cela beaucoup plus quantitatif.

⁷A noter que la resommation d’une partie des diagrammes perturbatifs, les diagrammes dits en parquets par exemple, a été pratiquée dans les années 60 indépendamment de toute référence au groupe de renormalisation. L’école russe à la suite de Landau a compté dans ses rangs des spécialistes de cette technique.

Une constante de couplage est une quantité mesurable (tout comme une masse) et doit, à ce titre, être déterminée à partir d’une fonction de Green (ou une fonction de corrélation en SFT), fonctions qui sont les quantités physiques de la théorie au rebours d’un Hamiltonien (ou d’un Lagrangien).⁸ Par exemple, pour la théorie ϕ^4 , la constante de couplage du terme quartique peut être mesurée, en principe au moins, à partir de la fonction de corrélation à quatre champs $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3)$ qui est une quantité physique. Ces fonctions, qui sont en fait des nombres en théorie classique des champs, deviennent de vraies fonctions des moments en QFT, c’est à dire dès que les “fluctuations” quantiques sont prises en compte (ou les fluctuations statistiques en SFT). En conséquence, on ne peut plus parler d’une constante de couplage seule et unique mais d’une constante de couplage dépendant de l’échelle.⁹ Les équations de Callan-Symanzik sont les équations qui décrivent comment une même théorie des champs peut être paramétrée par des constantes de couplage qui diffèrent suivant l’échelle où elles sont mesurées.

Tout autre est l’ambition du RG Wilsonien, hautement affichée par son créateur, d’ailleurs. Il s’agit là d’une part d’une véritable méthode de calcul des fonctions de corrélation et d’autre part d’une méthode qui n’est a priori pas liée à la théorie de perturbation. Un avertissement est de mise à ce stade. Si l’on pouvait utiliser le FRG pour calculer de façon exacte toutes les fonctions de corrélation d’un modèle non trivial de théorie statistique (ou quantique) des champs, on l’aurait résolu. Tel n’est presque jamais le cas dans la réalité et des approximations doivent être utilisées pour pouvoir se servir du FRG en tant que méthode de calcul. Au delà de sa pertinence conceptuelle, très grande à vrai dire, sa capacité à permettre des calculs non triviaux reposent donc sur la possibilité de mettre en œuvre des approximations contrôlées et allant au delà de la théorie des perturbations.¹⁰ Or avoir des méthodes approximatives contrôlées est un art subtil. La communauté physicienne croit encore bien trop souvent que les méthodes perturbatives sont les seules à être contrôlées.¹¹ Mais il n’en est rien. Les séries perturbatives rencontrées en physique sont dans l’immense majorité des cas des séries non convergentes et écrire un $O(\epsilon^{n+1})$ après une série à l’ordre n en ϵ n’y change rien si la série n’est pas convergente. L’électrodynamique quantique fait figure d’exception à ce sujet parce qu’elle permet des calculs très précis et qui le sont de plus en plus à mesure que l’on augmente l’ordre de perturbation.¹² Dans bien des cas, les séries renormalisées en théorie des champs sont au mieux des séries asymptotiques, Borel sommables. Mais même dans ces cas heureux, les résultats physiques dépendent des procédures de resommation des séries renormalisées qui sont largement arbitraires et pour lesquelles il est bien difficile de quantifier les barres d’erreur.

Le FRG cherche à aller au delà des méthodes perturbatives mais n’échappe pas à la critique d’avoir du mal à quantifier les erreurs commises. Là a été la critique fondamentale adressée pendant plusieurs décennies par la communauté du RG perturbatif à la communauté du FRG: du fait des approximations, même les quantités physiques semblaient dépendre de façon catastrophique de

⁸Carlo Becchi, grand expert de théorie des champs, disait qu’un Lagrangien est une opinion. Les esprits chagrins pourraient objecter que les fonctions de Green en QFT ne sont pas non plus physiques, seules l’étant les fonctions “sur couche de masse”. Tel n’est pas le cas en SFT et cette assertion sur la QFT n’est d’ailleurs valable que parce que l’on ne considère comme physiques que les éléments de matrice S .

⁹En général, les fonctions de Green ne dépendent pas uniquement d’une échelle d’énergie mais de toutes les configurations cinématiques des moments dont elles dépendent. Si l’on parle de constantes de couplage dépendant de l’échelle d’énergie seulement, c’est parce que l’on raisonne à configuration cinématique donnée (les angles entre moments) et que l’on étudie la variation de la fonction de Green lorsqu’on ne fait varier que l’échelle de ses moments.

¹⁰Certains calculs perturbatifs peuvent être très efficacement effectués à partir du FRG, plus efficacement en fait qu’à partir des méthodes graphiques à la Feynman. Il n’en reste pas moins vrai qu’à ce jour et pour beaucoup d’autres, les méthodes graphiques usuelles restent irremplaçables pour les calculs perturbatifs.

¹¹Par définition, les méthodes de résolution exactes des systèmes à N corps – systèmes intégrables ou invariants conformes en $d = 2$ – fournissent des résultats contrôlés. Pour ce qui est des méthodes approchées, le bootstrap conforme est une des très rares méthodes qui fournissent des barres d’erreur exactes. Malheureusement, très peu de quantités physiques sont calculables par cette méthode.

¹²Il faut cependant noter que ceci ne signifie pas que les séries perturbatives de QED sont des séries convergentes. Elles sont en fait divergentes mais la petitesse de la constante de couplage servant au développement ($\alpha/2\pi \simeq 1/860$ où $\alpha = 1/137$ est la constante de structure fine) est responsable d’une convergence apparente des premiers ordres de perturbation.

paramètres non physiques et arbitraires (les paramètres utilisés pour effectuer le coarse-graining, voir la suite de ce cours). Or ces critiques ont été justifiées pendant longtemps. Cependant, après le milieu des années 90, période où a été mise au point une nouvelle équation de RG exacte par C. Wetterich (et aussi T. Morris et U. Ellwanger), l'accumulation de résultats tout à fait non triviaux et précis a laissé peu de doutes aux spécialistes que les résultats obtenus par cette méthode étaient certes entachés d'erreur mais ne l'étaient pas de façon catastrophique comme c'était le cas dans les études antérieures qui ne reposaient pas sur les mêmes schémas d'approximation. Plus récemment, de grands progrès ont été effectués dans cette direction en montrant que le schéma d'approximation le plus couramment utilisé, le développement dérivatif, conduit au moins dans certains cas et pour certaines quantités, à des séries convergentes et donc sous contrôle.¹³ Il faut néanmoins noter que la plus grande partie de la communauté du RG perturbatif (et pas qu'elle) n'a pas encore réalisé ce changement et reste sur l'idée que les calculs basés sur l'approche Wilsonienne sont hors contrôle. Patience, cela changera...

¹³Notons dès maintenant que l'intérêt pratique du FRG n'est pas que de fournir des résultats précis dans des situations de forts couplages (renormalisés) où la théorie de perturbation est en difficulté. Le FRG, comme ces notes le montreront par la suite, permet aussi dans certains cas le calcul de quantités qui sont hors de portée de toute approche perturbative. L'exemple de quantités non universelles comme un diagramme de phase ou même une température critique est emblématique à ce sujet: ce calcul est essentiellement impossible dans le cadre perturbatif mais tout à fait accessible, dans certains cas au moins, au FRG, y compris pour des modèles sur le réseau. Mais il existe aussi des cas où des quantités universelles ne sont pas calculables perturbativement car non développables en série d'une constante de couplage. Le modèle d'Ising en champ aléatoire ou l'équation de Kardar-Parisi-Zhang en dimension plus grande que un ou certains phénomènes multi-critiques dans les modèles $O(N)$ fournissent de tels exemples.

2 Transitions de phase et méthodes fonctionnelles

"Vivre, c'est naître lentement"

Antoine de Saint-Exupéry

Nous allons utiliser dans la suite les modèles d'Ising (et leur généralisation à symétrie $O(N)$) et ϕ^4 (dit de Ginzburg-Landau) qui serviront de supports physiques pour illustrer les concepts mis en jeu et de cadres pour effectuer des calculs concrets. Ils seront tout à la fois suffisamment simples pour ne pas ajouter à la complexité du domaine et suffisamment riches pour ne pas en donner une vision idéale mais inapplicable à tout autre système plus compliqué.

2.1 Modèles $O(N)$, Hamiltoniens, énergies libres et fonctions de corrélation

Le modèle d'Ising est un modèle de spins classiques sur réseau à d dimensions (que nous prendrons hypercubique), c'est à dire de variables aléatoires $\sigma_i = \pm 1$ situées aux nœuds d'un réseau repérés par l'index i . On considèrera des réseaux hypercubiques et on appellera a la maille du réseau et L sa taille. Des conditions aux limites périodiques seront supposées et l'on s'intéressera la plupart du temps à la limite thermodynamique où $L \rightarrow \infty$. L'interaction entre les spins est supposée ne porter que sur les spins plus proches voisins et être ferromagnétique. Le Hamiltonien d'interaction en présence d'un champ magnétique extérieur h_i est donc:

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - \sum_i h_i \sigma_i \quad (1)$$

où $\langle ij \rangle$ signifie que la somme ne porte que sur les sites i et j qui sont plus proches voisins et où $J > 0$ est la constante d'échange ferromagnétique. En présence d'un champ magnétique constant, le terme magnétique devient $-h \sum_i \sigma_i$ et le champ vient donc se coupler au mode d'aimantation, c'est à dire à la somme des spins dont la valeur moyenne est l'aimantation totale du système. Lorsque $h_i = 0$, le système présente une symétrie $\mathbb{Z}_2$ d'inversion simultanée de tous les spins: $\sigma'_i = -\sigma_i$.

On peut généraliser ce modèle à des spins à N composantes de module unité: $|\sigma_i| = 1$ avec un Hamiltonien présentant une symétrie $O(N)$ lorsque le champ magnétique est nul:

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \cdot \sigma_j - \sum_i h_i \cdot \sigma_i. \quad (2)$$

Si l'on s'accorde à dire que $O(1) = \mathbb{Z}_2$, le modèle d'Ising devient un cas particulier de la famille des modèles $O(N)$.¹⁴

On s'intéressera aussi aux "modèles ϕ^4 " qui sont des modèles où $\phi(x)$ est un champ à N composantes variant entre $-\infty$ et $+\infty$, défini sur l'espace euclidien à d dimensions et qui présentent une

¹⁴A noter: l'inversion consistant à changer un spin en son opposé: $\sigma'_i = -\sigma_i$ est ou non une rotation suivant que N est respectivement pair ou impair. Ainsi, pour $N = 3$, cette inversion, représentée par la matrice $\text{diag}(-1, -1, -1)$ est de déterminant -1 et n'appartient pas à $SO(3)$ tandis que pour $N = 2$ ou 4 par exemple, il s'agit bien d'une rotation. Par contre, les symétries miroir consistant à changer seulement une composante des vecteurs σ_i ne sont jamais des rotations: il s'agit d'éléments de $O(N)$ mais pas de $SO(N)$.

symétrie interne $O(N)$.¹⁵ L'hamiltonien que nous considérerons est:

$$H = \int_x \left(\frac{1}{2} (\nabla \phi(x))^2 + \frac{1}{2} r_0 \phi(x)^2 + \frac{1}{4!} g_0 (\phi(x)^2)^2 \right) - \int_x \mathbf{h}(x) \cdot \phi(x) \quad (3)$$

où $\int_x = \int d^d x$. Les fonctions de partition de ces modèles sont

$$\mathcal{Z}[\mathbf{h}] = \sum_{\sigma_i} e^{-\beta H[\sigma, \mathbf{h}]} \quad \text{ou bien} \quad \mathcal{Z}[\mathbf{h}] = \int D\phi e^{-\beta H[\phi, \mathbf{h}]} \quad (4)$$

suivant le type de modèle considéré. Dans l'équation précédente, $\beta = 1/kT$ avec T la température et la somme ou l'intégrale signifie une sommation sur toutes les configurations des champs σ_i ou $\phi(x)$, si bien que l'intégrale est une intégrale fonctionnelle. Dans tout ce qui suivra, le facteur β sera absorbé dans H via une redéfinition du champ et des constantes r_0 et g_0 ce qui aura pour effet que H dépendra de la température, une caractéristique interdite pour un vrai Hamiltonien. Par abus de notation et de langage, on continuera à dénoter H cette quantité et à l'appeler le hamiltonien du système. Les fonctions de partition s'écriront donc:

$$\mathcal{Z}[\mathbf{h}] = \sum_{\sigma_i} e^{-H[\sigma, \mathbf{h}]} \quad \text{ou bien} \quad \mathcal{Z}[\mathbf{h}] = \int D\phi e^{-H[\phi, \mathbf{h}]} \quad (5)$$

Par le même abus de langage, on appellera

$$W[\mathbf{h}] = \ln \mathcal{Z}[\mathbf{h}] \quad (6)$$

l'énergie libre (de Helmholtz) à la place de $-kT \log \mathcal{Z}[\mathbf{h}]$, le facteur $-kT$ ne jouant aucun rôle intéressant dans ce qui suivra.

On obtient les fonctions de corrélation des composantes du champ par dérivation de $\mathcal{Z}[\mathbf{h}]$:

$$G_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{(n)}[i_1, \dots, i_n; \mathbf{h}] = \langle \sigma_{i_1}^{\alpha_1} \dots \sigma_{i_n}^{\alpha_n} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}[\mathbf{h}]} \frac{\partial^n \mathcal{Z}[\mathbf{h}]}{\partial h_{i_1}^{\alpha_1} \dots \partial h_{i_n}^{\alpha_n}} \quad (7)$$

ou, dans le cas continu:

$$G_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{(n)}[x_1, \dots, x_n; \mathbf{h}] = \langle \phi_{\alpha_1}(x_1) \dots \phi_{\alpha_n}(x_n) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}[\mathbf{h}]} \frac{\delta^n \mathcal{Z}[\mathbf{h}]}{\delta h_{\alpha_1}(x_1) \dots \delta h_{\alpha_n}(x_n)} \quad (8)$$

où il s'agit maintenant de dérivées fonctionnelles.

Bien entendu, on peut calculer ces fonctions de corrélation à champ externe nul, ce qui implique qu'après calcul des dérivées de $\mathcal{Z}[\mathbf{h}]$, on les évalue à $\mathbf{h} = 0$. On notera toutefois que même dans ce cas, on doit d'abord considérer la dépendance fonctionnelle de $\mathcal{Z}$ dans $\mathbf{h}$ pour pouvoir calculer ses dérivées par rapport à $\mathbf{h}$. C'est ce qui fait que $\mathcal{Z}[\mathbf{h}]$ est appelée la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation et la dépendance en $\mathbf{h}$ est indiquée avec des crochets et non pas des parenthèses pour se plier à la règle unanimement appliquée pour désigner les fonctionnelles. De la même façon, $W[\mathbf{h}]$ génère les fonctions de corrélation dites connexes:

$$G_{c, \alpha_1, \dots, \alpha_n}^{(n)}[i_1, \dots, i_n; \mathbf{h}] = \langle \sigma_{i_1}^{\alpha_1} \dots \sigma_{i_n}^{\alpha_n} \rangle_c = \frac{\partial^n W[\mathbf{h}]}{\partial h_{i_1}^{\alpha_1} \dots \partial h_{i_n}^{\alpha_n}} \quad (9)$$

¹⁵Les modèles étudiés présentent deux types de symétrie: les symétries provenant du groupe d'isotropie de l'espace à d dimensions sur lesquels ils sont définis, dans notre cas les symétries du réseau ou de l'espace euclidien, et des symétries dites internes, ici $O(N)$. Les champs $\phi(x)$ que nous considérons sont des scalaires pour le groupe d'isotropie de l'espace euclidien et des vecteurs pour $O(N)$ (plus précisément, de vrais scalaires et de vrais vecteurs pour $O(N)$). Notons que l'on pourrait tout à fait considéré un troisième type de modèle où les variables aléatoires ϕ_i varieraient entre $-\infty$ et $+\infty$ et seraient définies sur un réseau.

et

$$G_{c,\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{(n)}[x_1,\dots,x_n;h] = \langle \phi_{\alpha_1}(x_1) \cdots \phi_{\alpha_n}(x_n) \rangle_c = \frac{\delta^n W[\mathbf{h}]}{\delta h_{\alpha_1}(x_1) \cdots \delta h_{\alpha_n}(x_n)}. \quad (10)$$

Pour la fonction à 2 points (ce ne serait plus vrai pour celle à 4 points ou plus), la fonction connexe est la fonction de corrélation des fluctuations du champ autour de sa valeur moyenne comme un calcul élémentaire le montre:

$$G_{c,\alpha_1,\alpha_2}^{(2)}[x_1,x_2;h] = \langle (\phi_{\alpha_1}(x_1) - \langle \phi_{\alpha_1}(x_1) \rangle) (\phi_{\alpha_2}(x_2) - \langle \phi_{\alpha_2}(x_2) \rangle) \rangle. \quad (11)$$

Dans la suite, lorsqu'on aura affaire aux fonctions de corrélation, connexes ou non, en champ constant, on les notera comme des fonctions de $\mathbf{h}$: $G_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{(2)}(x_1,\dots,x_n,\mathbf{h})$ et quand elles seront en champ nul, on omettra le dernier argument et on les notera seulement $G_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{(2)}(x_1,\dots,x_n)$. Dans ces deux cas, le système étant invariant par translation, ces fonctions dépendent d'un argument de moins car elles ne dépendent que des différences $x_i - x_j$ ou, dit autrement, on peut choisir un des x_i comme étant l'origine.

On définit la transformée de Fourier par :

$$\tilde{f}(q) = \int_x e^{-iqx} f(x) \quad (12)$$

et son inverse par

$$f(x) = \int_q e^{iqx} \tilde{f}(q) \quad (13)$$

où $\int_q = \int d^d q / (2\pi)^d$. Dans les cas où il y a invariance par translation, c'est à dire quand le champ $\mathbf{h}$ est constant, il est commode pour la suite de définir de nouvelles fonctions de corrélation dans l'espace de Fourier en reconnaissant que les $\tilde{G}^{(n)}$ sont proportionnelles à $(2\pi)^d \delta(q_1 + \dots + q_n)$ et en définissant donc:

$$\tilde{G}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{(n)}(q_1,\dots,q_n,h) = (2\pi)^d \delta\left(\sum_{i=1}^n q_i\right) G_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{(n)}(q_1,\dots,q_{n-1},h) \quad (14)$$

où la fonction dans le membre de droite n'a pas de tilde. La confusion avec une fonction dans l'espace direct ne devrait pas avoir lieu, le contexte nous renseignant toujours sur le type de fonction dont on parle.

On appellera aimantation totale la valeur moyenne:

$$\mathbf{M} = \langle \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i \rangle. \quad (15)$$

On lui préférera souvent l'aimantation par spin

$$\mathbf{m}_i = \langle \boldsymbol{\sigma}_i \rangle = \frac{\partial W[\mathbf{h}]}{\partial \mathbf{h}_i} \quad (16)$$

ou, dans le continu

$$\mathbf{m}(x) = \langle \boldsymbol{\phi}(x) \rangle = \frac{\delta W[\mathbf{h}]}{\delta \mathbf{h}(x)}. \quad (17)$$

Bien entendu, si $\mathbf{h}$ est constant, $\mathbf{m}$ l'est aussi et est une quantité intensive alors que $\mathbf{M}$ est extensive. On notera que la fonction $G_c^{(2)}(x,y)$ peut s'écrire

$$G_{c,\alpha\beta}^{(2)}(x,y) = \frac{\delta m_\alpha(x)}{\delta h_\beta(y)} \quad (18)$$

et n'est donc rien d'autre que la réponse de l'aimantation locale en x à une variation du champ magnétique en y . C'est donc une généralisation locale de la susceptibilité magnétique qui est la réponse de l'aimantation à une variation d'un champ magnétique constant.

Il est important pour ce qui suit de définir une autre énergie libre par changement de variable d'état et de passer de la variable champ magnétique à la variable aimantation. Ceci se fait comme d'habitude par transformation de Legendre et on définit donc $\Gamma[\mathbf{m}]$, l'énergie libre de Gibbs par (à partir de maintenant et pour établir les définitions des quantités qui nous intéressent, on ne donnera plus leur définition que dans le continu):

$$\Gamma[\mathbf{m}] + W[\mathbf{h}] = \int_x \mathbf{h}(x) \cdot \mathbf{m}(x). \quad (19)$$

Cette énergie libre existe car on peut montrer que W est une fonction convexe de $\mathbf{h}$ si bien que Eq. (17) peut être inversée et $\mathbf{h}$ peut être calculé en fonction de $\mathbf{m}$ et insérer dans l'équation (19) pour donner Γ . On notera que Eq. (19) est symétrique dans l'échange simultané $W \rightarrow \Gamma$ et $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{m}$ si bien que l'on a nécessairement à partir de Eq. (17) la relation de réciprocité:

$$\mathbf{h}(x) = \frac{\delta \Gamma[\mathbf{m}]}{\delta \mathbf{m}(x)}, \quad (20)$$

relation que l'on peut évidemment établir directement à partir de Eq. (19) en dérivant par rapport à $\mathbf{m}(x)$.¹⁶ Il faut noter qu'en l'absence d'un champ magnétique, $\mathbf{h} = 0$, la relation précédente implique que l'aimantation du système est celle qui minimise l'énergie libre de Gibbs (un maximum est exclu du fait que Γ est une fonction convexe puisque c'est la transformée de Legendre d'une fonction convexe). En présence d'un champ $\mathbf{h}$ constant, Eq. (20) est l'équation d'état du système qui relie champ magnétique, aimantation et température.

Tout comme nous avons défini des fonctions de corrélation en dérivant fonctionnellement $Z[\mathbf{h}]$ et $W[\mathbf{h}]$, nous pouvons définir de nouvelles fonctions en dérivant Γ . Les fonctions ainsi obtenues sont appelées les fonctions de corrélation 1-Particule-Irréductible (1PI) ou encore les fonctions de vertex.¹⁷ Elles sont définies par:

$$\Gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{(n)}[x_1, \dots, x_n; \mathbf{m}] = \frac{\delta^n \Gamma[\mathbf{m}]}{\delta m_{\alpha_1}(x_1) \dots \delta m_{\alpha_n}(x_n)}. \quad (21)$$

Là aussi, nous pouvons évaluer Γ dans une configuration où $\mathbf{m}(x)$ est constant, ce qui implique que le champ magnétique externe est lui aussi constant. Dans ce cas, le système est invariant par translation et les $\Gamma^{(n)}$ ne dépendent que de $n-1$ variables d'espace $x_i - x_j$. La transformée de Fourier de ces fonctions ne dépend alors que de $n-1$ moments q_i et tout comme pour les $G^{(n)}$, Eq.(14), nous définissons des fonctions $\Gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{(n)}(q_1, \dots, q_{n-1}, m)$ sans tilde, une fois extrait un facteur $(2\pi)^d$ et un Dirac de conservation du moment total.

¹⁶Il convient ici d'alerter la lectrice débutante d'une petite subtilité dans le maniement des formules utilisant la transformation de Legendre. Clairement, la définition de $Z[\mathbf{h}]$ dans Eq. (5) fait de Z une fonctionnelle de $\mathbf{h}(x)$ et il en va évidemment de même pour $W[\mathbf{h}]$. L'aimantation $\mathbf{m}(x)$ définie par Eq. (17) est donc une quantité dérivée et obtenue une fois que $\mathbf{h}$ est spécifié: $\mathbf{m}(x)$ est fonction de $\mathbf{h}(y)$. On peut renverser le point de vue et considérer que c'est $\mathbf{m}(x)$ que l'on fixe. La "bonne" fonction d'état à considérer est alors Γ et c'est $\mathbf{h}(x)$ qui devient une fonction de $\mathbf{m}(y)$ via Eq. (20). Concrètement, lorsque l'on a une dérivée (fonctionnelle) à prendre par rapport soit à $\mathbf{h}(x)$ soit à $\mathbf{m}(x)$, il faut considérer que la variable conjuguée, respectivement $\mathbf{m}(x)$ et $\mathbf{h}(x)$, devient une fonctionnelle de la variable par rapport à laquelle on dérive. Ainsi, si l'on dérive fonctionnellement Eq. (19) par rapport à $\mathbf{m}(x)$ il ne faut pas oublier de dériver $W[\mathbf{h}]$ sous prétexte que c'est une fonctionnelle de $\mathbf{h}$ et non de $\mathbf{m}(x)$ et l'on doit poser: $\frac{\delta W[\mathbf{h}]}{\delta \mathbf{m}(x)} = \int_y \frac{\delta W[\mathbf{h}]}{\delta \mathbf{h}(y)} \frac{\delta \mathbf{h}(y)}{\delta \mathbf{m}(x)} = \int_y \mathbf{m}(y) \frac{\delta \mathbf{h}(y)}{\delta \mathbf{m}(x)}$.

¹⁷La dénomination connectée et 1PI des fonctions de corrélation $G_c^{(n)}$ et $\Gamma^{(n)}$ vient de leur développement perturbatif en termes de diagrammes de Feynman. Les fonctions connectées ne reçoivent de contributions que de graphes connectés, c'est à dire de graphes qui ne sont pas constitués de plusieurs sous-graphes disconnectés. Les graphes contribuant aux $\Gamma^{(n)}$ sont quant à eux des graphes qui restent connectés lorsqu'on coupe une quelconque de leur ligne interne, c'est à dire une ligne joignant deux vertex.

Bien sûr, l'ensemble des fonctions 1PI contient la même information que l'ensemble des fonctions de corrélation connexes puisqu'on peut passer de W à Γ par transformation de Legendre. On peut ainsi établir, fonction par fonction, comment reconstruire les $G_c^{(n)}$ à partir des $\Gamma^{(p \leq n)}$.

A titre d'exemple et parce que ce sera utile dans la suite, établissons la relation entre $G_c^{(2)} = W^{(2)}$ et $\Gamma^{(2)}$ dans le cas où $N = 1$. On part de Eq. (19) que l'on dérive par rapport à $h(z)$:

$$\delta(x - z) = \frac{\delta h(x)}{\delta h(z)} = \int_y \frac{\delta^2 \Gamma[m]}{\delta m(x) \delta m(y)} \frac{\delta m(y)}{\delta h(z)} = \int_y \Gamma^{(2)}[x, y; m] W^{(2)}[y, z; h]. \quad (22)$$

La relation précédente, valable en présence d'un champ $h(x)$ quelconque, généralise la relation matricielle reliant une matrice à son inverse, $\sum_j A_{ij} A_{jk}^{-1} = \delta_{ik}$: $\Gamma^{(2)}$ et $W^{(2)}$ sont donc inverses l'une de l'autre en un sens fonctionnel. La relation (22) se simplifie lorsque h est constant:

$$\int_y \Gamma^{(2)}(x - y, m) W^{(2)}(y - z, h) = \delta(x - z) \quad (23)$$

et plus encore lorsqu'on se place dans l'espace de Fourier:

$$\Gamma^{(2)}(p, m) W^{(2)}(p, h) = 1. \quad (24)$$

Ainsi, en champ uniforme et en Fourier, $\Gamma^{(2)}$ et $W^{(2)}$ sont inverses au sens ordinaire du terme. Notons que pour $O(N)$, la relation précédente se généralise trivialement en:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{(2)}(p, m) W_{\beta\gamma}^{(2)}(p, h) = \delta_{\alpha\gamma}. \quad (25)$$

où la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés a été utilisée: $A_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} = \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma}$.

Etudier les fonctions de corrélation consiste à analyser l'information contenue dans les fonctionnelles génératrices (les énergies libres en particulier) grâce à des développements de Taylor en puissances des champs. Par exemple, pour $N = 1$, si l'on effectue un développement autour d'un champ constant, h_0 pour W et m_0 pour Γ , on obtient:

$$W[h] = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_1, \dots, x_n} G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n, h_0) (h(x_1) - h_0) \cdots (h(x_n) - h_0) \quad (26)$$

et

$$\Gamma[m] = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_1, \dots, x_n} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n, m_0) (m(x_1) - m_0) \cdots (m(x_n) - m_0). \quad (27)$$

Une autre façon d'étudier les énergies libres consistent à faire un développement en dérivées des champs, c'est à dire en puissances des moments dans l'espace de Fourier. Ceci sera très utile dans la suite. On l'implémentera sur Γ et ce développement s'écrit pour $N = 1$:

$$\Gamma[m] = \int_x \left\{ U(m(x)) + \frac{1}{2} Z(m(x)) (\nabla m(x))^2 + O(\nabla^4) \right\} \quad (28)$$

où la fonction $Z(m(x))$ ne doit évidemment pas être confondue avec la fonction de partition $\mathcal{Z}[h]$. On notera que pour un champ $m(x) = m_0$ constant, $\Gamma(m_0) = \Omega U(m_0)$ où Ω est le volume du système. La fonction U est appelée en QFT le potentiel effectif et en mécanique statistique le potentiel thermodynamique (de Gibbs). Il joue un rôle considérable pour caractériser une brisure spontanée de symétrie par exemple. Notons d'ores et déjà que par isotropie de l'espace euclidien à d dimensions, seules les puissances paires de ∇ peuvent apparaître dans ce développement dérivatif et que les fonctions U et Z sont des fonctions de m^2 seulement du fait de la symétrie $\mathbb{Z}_2$. Pour un groupe de symétrie interne plus compliqué, le développement dérivatif doit respecter le fait que Γ

est un scalaire et il doit donc faire intervenir tous les scalaires dans les dérivées d'espace et sous le groupe de symétrie interne. Par exemple, pour les modèles $O(N)$, ce développement devient:

$$\Gamma[\mathbf{m}] = \int_x \left\{ U(\mathbf{m}^2(x)) + \frac{1}{2} Z(\mathbf{m}^2(x)) (\nabla m_\alpha(x)) (\nabla m_\alpha(x)) \right. \\ \left. + \frac{1}{4} Y(\mathbf{m}^2(x)) m_\alpha(x) m_\beta(x) \nabla m_\alpha(x) \nabla m_\beta(x) + O(\nabla^4) \right\} \quad (29)$$

et il y a donc deux fonctions indépendantes intervenant à l'ordre 2 du développement dérivatif. Notons finalement que $U^{(n)}(m_0) = \Gamma^{(n)}(p_1 = 0, \dots, p_{n-1} = 0, m_0)$ si bien que le potentiel effectif contient toute l'information sur toutes les fonctions $\Gamma^{(n)}$ à moments nuls. Réciproquement, les $\Gamma^{(n)}$ contiennent toute l'information sur la dépendance en moment d'un terme d'ordre donné en champs. Etudier les fonctions de corrélation ou les fonctions $\{U, Z, \dots\}$ sont par conséquent deux façons différentes et complémentaires d'analyser l'information contenue dans les énergies libres d'un système à n corps.

2.2 Transitions de phase

Les modèles $O(N)$ définis par les Hamiltoniens des Eqs. (2) et (3) subissent une transition de phase à $\mathbf{h} = 0$ et pour tout $d > 2$ lorsqu'on varie la température. Pour $N = 1$, il y a aussi une transition de phase en $d = 2$ mais plus en $d = 1$. A strictement parler, ceci ne survient qu'à la limite thermodynamique: $L \rightarrow \infty$. Ces systèmes sont dans une phase désordonnée à haute température où l'aimantation est nulle: $m_i = \langle \sigma_i \rangle = 0$ et dans une phase ordonnée à basse température où elle est non nulle: $|m_i| = |\langle \sigma_i \rangle| > 0$. L'aimantation est appelée le paramètre d'ordre car sa valeur, nulle ou non nulle, est caractéristique de la phase dans laquelle se trouve le système. Par définition, la température où cette transition survient s'appelle la température critique T_c . Cette température dépend de la dimension d , de N , du modèle considéré, sur réseau ou dans le continu. S'il est défini sur le réseau, il dépend de la structure du réseau: en $d = 2$ par exemple, la température critique n'est pas la même si l'on considère un réseau carré ou un réseau triangulaire. Dans le continu, T_c dépend de la constante de couplage g_0 intervenant dans le Hamiltonien Eq. (3). On dit pour cette raison que T_c n'est pas universelle: elle dépend des détails microscopiques du système.

Pour les modèles considérés ci-dessus, la transition est dite continue car le paramètre d'ordre en champ nul varie continûment en fonction de la température, même si cette variation n'est pas analytique, voir la Fig. 2.2 où on voit comment la non analyticité se construit à mesure que l'on augmente la taille du système.

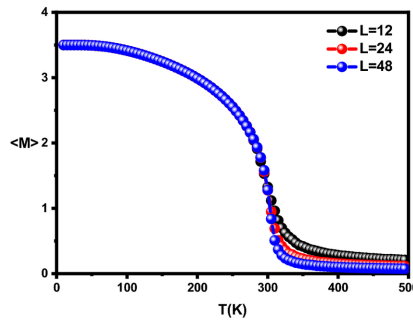


Figure 1: Aimantation d'un système magnétique en fonction de la température pour plusieurs tailles de réseau.

De façon générale, les transitions de phase se séparent en deux types bien distincts, les transitions continues comme décrit ci-dessus et les transitions discontinues ou du premier ordre où le

paramètre d'ordre subit une discontinuité à la transition. L'important est d'ailleurs moins le fait que le paramètre d'ordre soit ou non continu que le fait que la longueur de corrélation diverge ou reste finie à la transition. Par définition, la longueur de corrélation ξ d'un système est l'échelle de longueur typique donnant la décroissance de la fonction de corrélation à deux champs. En $d = 3$ et à grande distance comparée à la maille du réseau, la fonction à deux champs se comportent pour $T \simeq T_c$ et $N = 1$ comme:

$$G^{(2)}(x_i, x_j, h = 0) = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \underset{T \rightarrow T_c}{\sim} \frac{e^{-\frac{|x_i - x_j|}{\xi}}}{|x_i - x_j|^{d-2+\eta}} \quad (30)$$

où η est appelé la dimension anormale du champ (on en reparlera) et ξ est une fonction de la température. Pour les transitions continues, ξ diverge à T_c et l'on trouve qu'elle diverge en loi de puissance. Par exemple, en approchant T_c dans la phase de haute température:

$$\xi(T) \underset{T \rightarrow T_c^+}{\simeq} \xi_0^+ (T - T_c)^{-\nu} \quad (31)$$

où ν est un autre exposant critique et ξ_0^+ une amplitude qui dépend du système considéré. La divergence de la longueur de corrélation est le fait majeur des transitions continues et va conditionner l'invariance d'échelle (et conforme dans des bien des cas) qui va apparaître à la transition.

Listons quelques propriétés importantes des transitions continues.

- **Invariance d'échelle.** Un système statistique tel que le modèle d'Ising (et ceci est génériquement vrai) possède deux échelles intrinsèques: une échelle microscopique qui est dans ce cas la maille du réseau a et une échelle macroscopique, sa longueur L qui, en unité de a , est un nombre entier. Le Hamiltonien Eq. (1) ne contient pas d'autre échelle de longueur que a et L . A la limite thermodynamique, $L \rightarrow \infty$, il ne reste plus que a comme échelle de longueur. La dynamique du système produit une autre échelle, ξ , définie dans l'équation (30). On s'attend donc génériquement à ce que cette échelle soit de l'ordre de a et... c'est bien ce qui se passe. Mais en réglant finement T pour que $T \simeq T_c$, on constate que ξ peut être arbitrairement grande comparée à a , ce qui est très inhabituel en physique. On se doute que la physique du système va être dominée par ξ qui règle déjà le comportement de la fonction à deux points lorsque les distances considérées sont grandes devant a . Dit autrement, proche de la transition et à grande distance, $G^{(2)}$ dépend de ξ et non plus de a qui est pourtant l'échelle naturelle du problème: a ne joue plus de rôle pour ce qui est des corrélations du moment que l'on se place à de grandes distances comparées à a . Du coup, exactement à T_c où $\xi = \infty$, et de nouveau pour de grandes distances comparées à a , le système ne présente plus du tout d'échelle caractéristique et l'on s'attend donc à voir émerger la symétrie d'échelle (invariance par dilatation) aux grandes échelles de longueur. En fait, l'histoire est plus belle que cela dans beaucoup de cas car le système devient invariant conforme à T_c et aux grandes échelles et pas seulement invariant par dilatation.
- **Comportements en lois de puissance.** Les systèmes invariants d'échelle sont génériquement caractérisés par des lois de puissance, seules lois qui s'accordent avec cette symétrie.¹⁸ On retrouve bien ce phénomène pour les transitions de phase: proche de la criticalité, les différentes quantités physiques intéressantes obéissent à des lois de puissance comme on l'a déjà vu pour la longueur de corrélation en Eq. (31) et pour la fonction de corrélation à deux points

¹⁸Ici, je triche un peu car les lois de puissance qui sont montrées dans la suite portent sur la dépendance en température et non sur les distances, objets pourtant des dilatations. Mais à y bien réfléchir, on verra que l'on peut substituer l'écart à la température critique, $T - T_c$, par la longueur de corrélation et on troque ainsi les lois de puissances en température pour des lois de puissances en ξ . En se souvenant tout de même que pour $\xi < \infty$, il n'y a pas à strictement parler d'invariance par dilatation...

lorsque $\xi = \infty$, Eq. (30). L'aimantation par exemple se comporte lorsqu'on approche de T_c par valeur inférieure comme:

$$m(T) \underset{T \rightarrow T_c^-}{\simeq} m_0 (T_c - T)^\beta. \quad (32)$$

La susceptibilité magnétique à champ nul, χ , qui est la réponse de l'aimantation à une variation du champ magnétique se comporte en:

$$\chi(T) = \frac{\partial M}{\partial h} \underset{h=0}{\underset{T \rightarrow T_c^+}{\simeq}} \chi_0^+ (T - T_c)^{-\gamma}. \quad (33)$$

On trouve aussi qu'à $T = T_c$

$$M(T) \underset{h \rightarrow 0}{\simeq} m'_0 h^{1/\delta}. \quad (34)$$

La chaleur spécifique diverge également en fonction de $T - T_c$ avec un exposant appelé α et l'on a déjà défini la dimension anormale η en Eq. (30). En tout, il y a six exposants critiques, dits dominants. D'autres exposants, dits sous-dominants ou de correction aux lois d'échelle, règlent les comportements sous-dominants en $T - T_c$. Par exemple, on peut définir l'exposant ω de correction de scaling par:

$$\xi(T) \underset{T \rightarrow T_c^+}{\simeq} \xi_0^+ (T - T_c)^{-\nu} (1 + A(T - T_c)^\omega + \dots) \quad (35)$$

où A est une amplitude qui dépend du système considéré.

Il faut noter que pour certaines quantités, on peut définir des exposants critiques dans la phase haute et basse température. Par exemple, pour la longueur de corrélation dans la phase de basse température:

$$\xi(T) \underset{T \rightarrow T_c^-}{\simeq} \xi_0^- (T_c - T)^{-\nu'}. \quad (36)$$

Les exposants dans les phases de haute et basse température, quand ils existent, sont souvent égaux (alors que les amplitudes ne le sont pas). Mais ceci n'est pas toujours vrai (contrairement à ce qui est souvent déclaré).

- **L'universalité.** Nous sommes très habitués en physique à ce que des systèmes très différents au niveau microscopique se comportent de la même façon à grande échelle. La loi des gaz parfaits, la loi d'Ohm, etc, sont valables quelque soit la nature des corps considérés du moment qu'ils obéissent à quelques pré-requis. Ainsi, pour que la loi des gaz parfaits s'applique, il suffit que les atomes du gaz puissent être considérés comme ponctuels et n'interagissant entre eux que par des chocs parfaitement élastiques. Peu importe qu'il s'agisse d'oxygène ou de dioxyde de carbone ou qu'ils soient constitués d'électrons, de protons et de neutrons, eux mêmes constitués de quarks interagissant via l'échange de gluons. Cette propriété, fondatrice de la physique tout entière, vient du fait que le plus souvent, pour ce qui est des comportements collectifs et donc à grande échelle, les détails microscopiques ont été "statistiquement gommés" et que seules de grandes caractéristiques des systèmes, décrites par un petit nombre de quantités, sont pertinentes à ces échelles. La physique de courte distance peut donc être horriblement compliquée, voire chaotique, les comportements stochastiques qui en émergent sont en général simples. Ainsi, du nombre d'Avogadro de degrés de liberté, nécessaires à la description molécule par molécule d'un gaz, émergent quelques quantités telles que la pression, le volume, la température dans sa description à grande échelle. Du microscopique imprévisible car chaotique naît le quasi-déterminisme des grandeurs thermodynamiques.

Bien sûr, le théorème central limite joue ici un rôle considérable en nous apprenant qu'en sommant des variables aléatoires (indépendantes), on obtient des lois gaussiennes qui ont (presque) tout oublié de la loi de probabilité sous-jacente. Et plus grand est le nombre de

variables sommées, plus précise en valeur relative est la prédiction du comportement de la somme. L’universalité est le nom de ce phénomène et n’a rien à voir avec les transitions de phase (contrairement à ce qui est généralement laissé entendre). La surprise n’est donc pas qu’il existe des phénomènes universels en physique: il y en a partout. La surprise est que même les phénomènes critiques en sont le siège.¹⁹ Le théorème central limite est en effet valable pour des variables aléatoires indépendantes et dont la moyenne et la variance existent. Pour Ising en dehors de la criticalité, les spins sont certes corrélés sur des distances typiques de ξ mais comme $\xi \simeq a$, leurs corrélations sont très faibles et le système apparaît comme un ensemble de grumeaux de taille typique ξ , largement indépendants les uns des autres quand bien même les spins à l’intérieur des grumeaux ne le sont pas. Pour cette raison, il est très simple de généraliser le théorème central limite aux systèmes statistiques en dehors de la criticalité et l’universalité fonctionne donc dans ce cas de façon “banale”.

Tel n’est pas le cas des systèmes à la criticalité où tous les spins sont fortement corrélés puisque $\xi = \infty$. Il est donc difficile de savoir *a priori* si une quelconque universalité va survivre à cette situation et si oui quelles seront les “classes d’universalité”, c’est à dire l’ensemble des systèmes pour lesquelles certaines quantités ont le même comportement. La surprise est donc là: oui, malgré les corrélations fortes, il existe de l’universalité dans les phénomènes critiques au sens où il existe pour certaines classes de systèmes et pour certaines quantités, des comportements à grande échelle identiques dans des systèmes microscopiquement différents. Les quantités universelles les plus connues sont les exposants critiques mais il en existe bien d’autres comme par exemple des rapports d’amplitude entre les phases de haute et basse température, telle que par exemple ξ_0^+/ξ_0^- . La prédiction de cette universalité est une des grandes victoires du RG (inaccessible par exemple aux modèles intégrables²⁰) même s’il n’est pas facile de prédire *a priori* les contours d’une classe d’universalité, déjà pour la raison qu’il n’est pas facile de prédire en toute généralité si un système donné subit une transition de phase continue ou non.²¹ La notion de point fixe du RG est ce qui explique le mieux l’universalité dans les phénomènes critiques et il n’est pas étonnant que cette notion soit intimement liée à la généralisation du

¹⁹Que ce soit une surprise vient de la caractéristique majeure de ces phénomènes: la divergence de la longueur de corrélation qui pourrait (de façon erronée) laisser croire que tous les degrés de liberté étant couplés, plus aucun détail du système ne peut être ignoré.

²⁰Avoir une solution exacte pour un modèle donné tel que le modèle d’Ising ferromagnétique en $d = 2$ sur réseau carré avec interaction plus proches voisins ne dit rien sur un autre modèle, intégrable ou non, même s’il est également invariant $\mathbb{Z}_2$: l’intégrabilité ne dit rien sur l’universalité et a fortiori rien sur les contours d’une classe d’universalité. On pourrait penser que les techniques conformes échappent à cette critique puisqu’elles ne s’intéressent qu’à des propriétés de symétrie des modèles mais il est particulièrement difficile avec cette technique de relier un modèle donné avec un jeu donné de data conformes.

²¹On lit souvent que les classes d’universalité sont déterminées par la dimension d’espace d , la symétrie du système et le fait que les interactions sont ou non à courte portée. Ceci laisse sous-entendre que tout système ayant la même symétrie, étant en même dimension et ayant par exemple des interactions à courte portée partagent le même jeu d’exposants critiques. Ceci n’est pas correct pour plusieurs raisons. Tout d’abord, et c’est le plus fondamental, deux tels systèmes peuvent subir des transitions de phase, pour l’un, continue et pour l’autre, du premier ordre: pas d’universalité ici, évidemment. Un exemple simple de cette situation est donné par une théorie dans le continu, en $d = 3$, à un champ $\phi(x)$, de symétrie $\mathbb{Z}_2$ et dont le Hamiltonien a un terme en ϕ^4 avec une constante de couplage très négative et un terme en ϕ^6 avec une petite constante de couplage positive. Ce modèle, bien que de symétrie $\mathbb{Z}_2$, subit une transition du premier ordre et n’est donc évidemment pas dans la classe d’universalité de Ising. Ensuite, la symétrie d’un Hamiltonien n’est pas tout. Un Hamiltonien donné peut avoir différents types d’ordre dans sa phase de basse température (différents schémas de brisure spontanée de symétrie) suivant la valeur de ses constantes de couplage. Le Hamiltonien peut donc être invariant sous un groupe $\mathcal{G}$, indépendant des valeurs des couplages, et les phases de basse température, c’est à dire les états fondamentaux de H (qui dépendent des couplages) peuvent être invariants sous divers groupes $\mathcal{H}_i$ avec donc différents types de transition de phase qui ne sont en général pas dans la même classe d’universalité. Au lieu de parler de la symétrie du modèle, de $\mathcal{G}$ donc, il vaut par conséquent mieux parler du schéma de brisure de symétrie: $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}_1$ ou $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{G} \rightarrow \dots$. De plus, un même système peut subir des transitions critiques, tricritiques et plus généralement multi-critiques. Là non plus les exposants critiques ne sont pas les mêmes selon le degré de multi-criticalité considéré. Finalement, il n’est pas exclu qu’un même système ait plusieurs points fixes critiques du RG, chacun ayant son bassin d’attraction et donc des classes d’universalité différentes. Si ce scénario est en général inaccessible perturbativement, ce n’est certainement pas une preuve de son impossibilité.

théorème central limite à des systèmes fortement corrélés.

- **Brisure spontanée de symétrie et d'ergodicité.** Assez souvent, mais pas toujours²², les transitions de phase sont associées à une brisure spontanée de symétrie. Pour le modèle d'Ising, il s'agit de la brisure complète de la symétrie $\mathbb{Z}_2$ et pour le modèle $O(N)$ défini ci-dessus, de $O(N)$ brisé en $O(N-1)$. Cette brisure de symétrie ne peut avoir lieu qu'à la limite thermodynamique car pour tout volume fini, même si une majorité de spins pointent en moyenne dans une même direction, il existe toujours une probabilité non nulle qu'une fluctuation fasse simultanément changer de direction plus de la moitié des spins. Bien sûr, cette probabilité s'annule lorsque le nombre de spins tend vers l'infini si bien que dans la phase de basse température, lorsque le système a acquis une aimantation spontanée non nulle, cette aimantation ne peut plus changer de direction. Il y a donc également dans ces situations brisure spontanée d'ergodicité car le système ne peut plus explorer l'ensemble des états qui lui sont en principe accessibles.

Pour les systèmes présentant une symétrie continue spontanément brisée à la transition, le théorème de Goldstone prévoit l'existence de modes dont la susceptibilité est infinie dans toute la phase de basse température (mode dit de masse nulle). Le théorème prédit qu'il y en aura autant que de "générateurs brisés", c'est à dire autant que la différence entre le nombre de générateurs du groupe $\mathcal{G}$ du Hamiltonien (symétrie de la phase de haute température) et du nombre de générateurs du groupe $\mathcal{H}$ de l'état fondamental du système (symétrie de la phase de basse température). Dans le cas de $O(N)$ brisé en $O(N-1)$ il y a donc $N(N-1)/2 - (N-1)(N-2)/2 = N-1$ modes de Goldstone dans la phase de basse température.²³

- **Dimension critique supérieure et inférieure.** On constate et ceci sera expliqué dans la suite que pour les modèles d'Ising et $O(N)$, les exposants critiques et plus généralement les quantités universelles, sont correctement prédites par le champ moyen. Cette dimension, appelée dimension critique supérieure, d_c , vaut quatre pour ces modèles.²⁴ Notons qu'il faut faire attention que la notion de dimension critique supérieure n'a de sens que pour les quantités universelles. Pour les quantités non universelles, rien de particulier ne se passe à la traversée de la dimension quatre et elles restent déterminées de façon non exacte par le champ moyen en toutes dimensions supérieures à quatre. Ca n'est en fait qu'en $d = \infty$ que le champ moyen devient exact y compris pour les quantités non universelles.

Il existe aussi pour les modèles $O(N)$ une dimension critique inférieure à partir et en dessous de laquelle il n'y a plus de transition de phase ou, plus exactement, en laquelle la température de transition de phase s'annule. Pour ce qui est du modèle d'Ising, cette dimension critique inférieure est un et pour $N > 1$, il s'agit de deux. La différence entre ces deux cas vient du fait que la symétrie de Ising est une symétrie discrète et pour $N > 1$, une symétrie continue.²⁵ La présence d'une dimension critique inférieure pour $O(N > 1)$ est ce qui permet l'existence d'une théorie de perturbation en $d = 2 + \epsilon$ pour ces modèles, effectuée à partir du modèle sigma non linéaire, le cas $N = 2$ étant là aussi très particulier.

²²Par exemple, dans la transition liquide - vapeur, qui est génériquement du premier ordre mais dont la ligne de premier ordre se termine par une transition du second ordre, il n'y a aucune brisure de symétrie.

²³Il faut faire attention à ne pas sur-interpréter ce résultat. Il se peut en effet que d'autres modes soient également de masse nulle dans la phase de basse température. C'est ce qui arrive pour le modèle $O(N)$ où le dernier mode n'est pas massif non plus à cause de ses interactions avec les modes de Goldstone. L'analyse de champ moyen se trompe sur ce point car il faut tenir compte des fluctuations pour voir apparaître cet effet.

²⁴En $d = 4$, il existe des corrections logarithmiques à la théorie de champ moyen ce qui fait que celui-ci n'est pas tout à fait exact dans cette dimension pour ce qui est des quantités universelles.

²⁵Le théorème de Mermin-Wagner et Coleman assure que pour des systèmes à l'équilibre thermodynamique et ayant des interactions à courte portée, une symétrie continue ne peut plus être brisée en $d \leq 2$. Notons que le cas $N = 2$ et $d = 2$ est à part car il est le siège d'une transition à température finie très particulière car induite par la présence de défauts topologiques, la fameuse transition de Kosterlitz-Thouless.

2.3 Approximation du champ moyen

“Ce qui est simple est faux, ce qui est compliqué est inutilisable.”

Paul Valéry

Toute la difficulté de l’étude des systèmes statistiques tels que les modèles $O(N)$ tient à la présence du très grand nombre de degrés de liberté mis en jeu. La difficulté est encore plus grande proche d’une transition continue car dans ce cas ils sont tous fortement corrélés et on ne peut donc pas *a priori* considérer le système comme une assemblée de petits sous-ensembles essentiellement indépendants les uns des autres.

La première approximation à laquelle on peut penser, l’approximation de champ moyen en mécanique statistique ou l’approximation classique en QFT, va néanmoins consister à approximer la sommation sur les configurations du système dans la fonction de partition d’une manière qui la rend calculable. Il y a quantité de façon de faire cela. Dans tous les cas, la sommation est tronquée ce qui revient à négliger des configurations du système que l’on espère jouer un rôle sous-dominant par rapport à celle(s) que l’on a retenue(s).

Une formulation possible de l’approximation de champ moyen (MF) pour la théorie ϕ^4 consiste à faire sur l’intégrale fonctionnelle dans $\mathcal{Z}[h]$ une approximation de point selle pour laquelle on ne garde que la configuration qui contribue le plus à l’intégrand, c’est à dire celle qui minimise le Hamiltonien. Nous ne considérerons dans la suite de cette section que le cas où le champ magnétique externe est constant et, pour simplifier les notations, seulement le cas $N = 1$, la généralisation à $N > 1$ étant immédiate. La configuration ϕ_0 qui minimise le Hamiltonien à h fixé est supposée indépendante de x puisque h l’est et que le terme de gradient dans H est positif et ne peut qu’augmenter l’énergie. On obtient donc:

$$\mathcal{Z}(h) \rightarrow \mathcal{Z}^{\text{MF}}(h) = e^{-H(\phi_0, h)} \quad (37)$$

où ϕ_0 est défini par

$$\left. \frac{\partial H(\phi, h)}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_0} = 0 \quad (38)$$

ce qui définit ϕ_0 comme une fonction de h .

Montrons qu’à cet ordre d’approximation, ϕ_0 n’est rien d’autre que l’aimantation du système. Pour cela, calculons l’aimantation à partir de Eq. (37):

$$M = m\Omega = \frac{dW}{dh} = - \left. \frac{\partial H(\phi, h)}{\partial \phi} \right|_{\phi_0} \frac{\partial \phi_0}{\partial h} - \left. \frac{\partial H(\phi, h)}{\partial h} \right|_{\phi_0} = \Omega \phi_0 \quad (39)$$

où $\Omega = L^d$ est le volume du système. On en déduit donc que $m = \phi_0$, ce qui était attendu car la configuration des spins correspondant à l’aimantation est certainement celle qui contribue le plus à $\mathcal{Z}$.²⁶ On en déduit l’expression de Γ à ce niveau d’approximation:

$$\mathcal{Z}^{\text{MF}}(h) = e^{-H(\phi_0, h)} = e^{-\Gamma(m) + \Omega m h} \quad (40)$$

ce qui implique le résultat fondamental:

$$\boxed{\Gamma^{\text{MF}}(m) = \Omega V(\phi = m)} \quad (41)$$

où $V(\phi)$ est le potentiel intervenant dans H , appelé aussi potentiel nu, c’est à dire la partie indépendante du champ h et qui est non dérivative, partie qui est, quant à elle, appelée le terme cinétique. Pour la théorie ϕ^4 , $V(\phi(x)) = r_0 \phi^2(x)/2 + g_0 \phi^4(x)/4!$.

²⁶L’aimantation vraie du système, et non pas celle à l’approximation du champ moyen, est différente de ϕ_0 , les fluctuations autour de la configuration de champ moyen venant la modifier. Dans le cas des modèles ferromagnétiques, les fluctuations viennent diminuer l’aimantation par rapport à ce qu’elle est en champ moyen.

Le résultat précédent se généralise très facilement au cas où l'on considère un champ $h(x)$ non constant et l'on trouve alors

$$\Gamma^{\text{MF}}[m] = H[\phi(x) = m(x), h(x)] \quad (42)$$

c'est à dire que Γ n'est autre que la partie du Hamiltonien indépendante du champ magnétique. Ce résultat est crucial pour plusieurs raisons:

- On voit souvent des discussions sur la thermodynamique d'un système effectuées à partir du Hamiltonien (ou du Lagrangien en QFT) de ce système. Ceci est *a priori* incorrect car la physique statistique d'un système se lit sur ses énergies libres et non sur son Hamiltonien. Cependant, la relation précédente nous montre que si l'approximation de champ moyen est une bonne approximation, c'est à dire si les fluctuations autour du champ moyen sont suffisamment petites, alors $\Gamma \simeq \Gamma^{\text{MF}} = H$ et alors ce genre de discussions est licite. Un exemple frappant de ce type d'abus est la discussion de la brisure de symétrie d'un système effectuée sur le Hamiltonien et plus particulièrement sur la forme en double puit (dite en chapeau mexicain) du potentiel nu V . Ce genre de discussion est largement incorrect en général car ce qui compte pour la brisure de symétrie n'est pas V mais le potentiel effectif U défini en Eqs. (28) et (29), voir la suite.²⁷
- L'équation (42) cache un vice qui a quelques conséquences: alors que H peut très bien être une fonction non convexe de ϕ , Γ se doit de l'être de m . Par exemple, si l'on choisit $r_0 < 0$ dans H , Eq. (3), alors le potentiel pour $N = 1$ a une forme de double puit avec des minima en $\pm\sqrt{-6r_0/g_0}$ et un maximum local en 0, voir Fig. 2. Cependant, U ne peut être égal à V

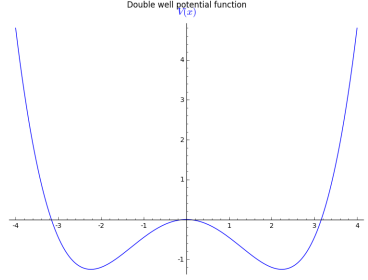


Figure 2: Potentiel nu en double puit. A l'approximation de champ moyen, ce potentiel est identique au potentiel effectif dans la région où il est convexe, c'est à dire en dehors de la région située entre ses deux minima.

que dans sa partie convexe, c'est à dire en dehors de l'intervalle $[-\sqrt{-6r_0/g_0}, +\sqrt{-6r_0/g_0}]$. Ainsi, au niveau du champ moyen, on représente le potentiel effectif U en prenant l'enveloppe convexe de V , c'est à dire une traçant une horizontale entre les deux minima. Il faut noter que cette partie du potentiel effectif est en fait physiquement inaccessible.

- L'approximation de champ moyen prédit qu'une aimantation spontanée voit le jour pour $r_0 < 0$ puisque dans ce cas $h = U'(m) = V'(m)$ (en dehors de la région de non convexité) a les deux solutions non nulles $\pm\sqrt{-6r_0/g_0}$ pour $h \rightarrow 0^\pm$. Il s'agit bien entendu du phénomène de brisure spontanée de symétrie, reproduit correctement au niveau du champ moyen pour des

²⁷Notons qu'il existe des cas où les potentiels nu et effectif sont très différents et du coup l'analyse de la transition de phase effectuée au niveau du champ moyen se trouve être qualitativement fausse. Par exemple, à partir du champ moyen on peut prédire une transition de phase du second ordre alors qu'en réalité elle est du premier, ou vice-versa. Il peut même arriver que l'on prédise l'absence de toute transition de phase sur la foi de l'analyse en champ moyen et qu'en réalité il existe une transition de phase du second ordre. Les exemples abondent: modèle de Potts à 3 états en $d = 2$, systèmes magnétiques frustrés en $d = 3$ sur réseau triangulaire empilé, marches aléatoires avec branchement et annihilation, etc.

dimensions d génériques. On voit cependant qu'une transition est prédite aussi en $d = 1$, ce qui est incorrect. Pour les modèles $O(N > 1)$, il en serait de même pour $d \leq 2$, ce qui est également incorrect et qui signifie que les fluctuations autour du champ moyen sont suffisamment grandes en basses dimensions pour déstabiliser les prédictions que l'on peut en tirer, y compris en un sens qualitatif.

- On peut montrer que l'approximation de champ moyen est exacte en $d = \infty$. Il faut noter ici qu'au delà de la dimension critique supérieure $d_c = 4$, les quantités universelles sont correctement obtenues à partir de l'approximation de champ moyen (voir la suite). Mais il est important de comprendre qu'il n'en est rien pour les quantités non-universelles: elles continuent en général à recevoir des corrections importantes des fluctuations qui peuvent rendre leur approximation de champ moyen très mauvaise. Ce n'est qu'en dimension infinie que ces fluctuations disparaissent.²⁸

On peut aller un peu plus loin dans l'analyse de l'approximation de champ moyen en calculant $G^{(2)}$ et $\Gamma^{(2)}$ ainsi que $\Gamma^{(4)}$. Le calcul de $\Gamma^{(2)}(p, m)$ en présence d'une aimantation m constante est immédiat à l'approximation de champ moyen en utilisant Eq. (42). On commence par calculer la dérivée fonctionnelle première de Γ :

$$\begin{aligned}\Gamma_\alpha^{(1)}[x_1, \mathbf{m}] &= \frac{\delta \Gamma}{\delta m_\alpha(x_1)} \\ &= \int_x \left\{ \nabla m_\alpha(x) \cdot \nabla \delta(x - x_1) + r_0 m_\alpha(x) \delta(x - x_1) + \frac{g_0}{6} \mathbf{m}^2(x) m_\alpha(x) \delta(x - x_1) \right\} \\ &= \left(-\nabla^2 + r_0 + \frac{g_0}{6} \mathbf{m}^2(x_1) \right) m_\alpha(x_1).\end{aligned}\quad (43)$$

On calcule ensuite la dérivée fonctionnelle seconde et on évalue le résultat dans une configuration constante de l'aimantation: $m_\alpha(x) = m_\alpha$:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}^{(2)}(x_1 - x_2, \mathbf{m}) &= \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta m_\alpha(x_1) \delta m_\beta(x_2)} \Big|_{\mathbf{m}(x)=\mathbf{m}} \\ &= \delta_{\alpha\beta} \left(-\nabla^2 + r_0 + \frac{g_0}{6} \mathbf{m}^2 \right) \delta(x_1 - x_2) + \frac{g_0}{3} m_\alpha m_\beta \delta(x_1 - x_2).\end{aligned}\quad (44)$$

Comme prévu, $\Gamma_{\alpha\beta}^{(2)}$ est une combinaison linéaire des deux tenseurs (symétriques) d'ordre deux de $O(N)$ qui peuvent être construits avec le vecteur $\mathbf{m}$, c'est-à-dire $\delta_{\alpha\beta}$ et $m_\alpha m_\beta$. Dans l'espace de Fourier, cela devient:²⁹

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{(2)}(p, \mathbf{m}) = \delta_{\alpha\beta} \left(p^2 + r_0 + \frac{g_0}{6} \mathbf{m}^2 \right) + \frac{g_0}{3} m_\alpha m_\beta. \quad (45)$$

D'après Eq. (25), la fonction $G_{c,\alpha\beta}^{(2)}(p, \mathbf{h} = 0)$ est l'inverse de $\Gamma_{\alpha\beta}^{(2)}(p, \mathbf{m})$ avec $\mathbf{m}$ l'aimantation en champ nul, c'est à dire: $\mathbf{m} = 0$ dans la phase de haute température (symétrique) et $|\mathbf{m}| =$

²⁸D'un point de vue technique, et nous reviendrons sur cela dans la suite, ce sont les fluctuations de très grande longueur d'onde, dites infrarouges, qui déterminent les comportements universels et du coup, la valeur de d_c . Au contraire, les quantités non-universelles dépendent des détails microscopiques du modèle considéré et sont donc modifiées par les fluctuations de courte longueur d'onde, dites UV. Ces fluctuations ne sont en général pas supprimées quand on augmente la dimension et que d devient plus grande que d_c . Il n'y a donc aucune raison pour que les quantités non-universelles soient bien calculées en $d > d_c$.

²⁹Notons que nous avons donné le même nom à $\Gamma_{\alpha\beta}^{(2)}(x_1 - x_2, m)$ et $\Gamma_{\alpha\beta}^{(2)}(x_1, x_2, m)$ alors que cette dernière fonction dépend d'un argument de plus. Sa transformée de Fourier dépend donc de deux moments et est proportionnelle à un delta de conservation du moment total ainsi qu'à $(2\pi)^d$. Lorsque nous nous placerons dans une situation où le système est invariant par translation et conformément à notre convention exposée en Eq. (14), nous n'utiliserons que la transformée de Fourier de la fonction $\Gamma_{\alpha\beta}^{(2)}(x_1 - x_2, m)$ qui ne dépend donc que d'un moment.

$\pm\sqrt{-6r_0/g_0}$ dans la phase de basse température (brisée):³⁰

$$G_{c,\alpha\beta}^{(2)}(p, h = 0) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{p^2 + r_0} \quad \text{pour } T > T_c \quad (46)$$

et

$$G_{c,\alpha\beta}^{(2)}(p, h = 0) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{p^2} - \frac{2|r_0|}{p^2(p^2 + 2|r_0|)} \frac{m_\alpha m_\beta}{\mathbf{m}^2} \quad \text{pour } T < T_c. \quad (47)$$

Sans perte de généralité, on peut prendre $\mathbf{m}$ dans la direction 1, c'est à dire: $m_\alpha = m\delta_{\alpha 1}$. Dans ce cas, on obtient dans la phase brisée ($T < T_c$):

$$\begin{aligned} G_{c,11}^{(2)}(p, h = 0) &= \frac{1}{p^2 + 2|r_0|} \\ G_{c,22}^{(2)}(p, h = 0) &= \frac{1}{p^2} \end{aligned} \quad (48)$$

appelées respectivement susceptibilité longitudinale et susceptibilité transverse (bien entendu, la direction 22 n'a rien de spécial et toutes les directions 33, ..., NN jouent le même rôle). Dans la phase symétrique, ces deux susceptibilités sont bien sûr identiques.

Rappelons qu'une fonction de corrélation en $1/(p^2 + \xi^{-2})$ comporte une décroissance exponentielle à grande distance en $\exp(-r/\xi)$, ce qui identifie ξ à la longueur de corrélation. On voit donc que dans la phase haute température $\xi = r_0^{-1/2}$ et que dans la phase basse température les directions transverses ont une longueur de corrélation infinie (c'est le théorème de Goldstone) et la direction longitudinale permet de définir la longueur de corrélation $\xi = (2|r_0|)^{-1/2}$. En faisant l'hypothèse que r_0 est une fonction régulière de T et est donc développable, elle doit être proportionnelle à $T - T_c$ asymptotiquement proche de la transition et ceci permet de conclure que l'exposant critique $\nu = 1/2$ à l'approximation du champ moyen et qu'il vaut la même chose dans la phase de basse température.³¹ On constate également que les amplitudes $\xi_0^\pm$ de ξ , ne sont pas identiques et que leur rapport vaut $1/\sqrt{2}$, un nombre universel, c'est à dire ici, indépendant de g_0 .

2.4 Propagateur libre et théorie de perturbation

Montrons de façon détaillée que la fonction $G^{(2)}$ est la fonction de Green de l'opérateur différentiel de la partie quadratique de H . Réécrivons pour cela cette partie quadratique:

$$\begin{aligned} H^{\text{quad.}} &= \int_x \phi(x) (-\nabla^2 + r_0) \phi(x) \\ &= \int_{xy} \phi(x) [(-\nabla_x^2 + r_0) \delta(x - y)] \phi(y) \\ &= \int_{xy} \phi(x) A(x, y) \phi(y) \end{aligned} \quad (49)$$

avec A l'opérateur différentiel: $A(x, y) = (-\nabla_x^2 + r_0) \delta(x - y)$. L'équation (49) généralise au cas continu la somme discrète $\sum_{ij} \phi_i A_{ij} \phi_j$ où les ϕ_i seraient les composantes d'un vecteur d'un espace

³⁰L'inverse dans l'espace $O(N)$ est facile à calculer si l'on se souvient que $G_{c,\alpha\beta}^{(2)}$ est aussi un tenseur de $O(N)$ et peut donc aussi se décomposer sur les tenseurs $m_\alpha m_\beta$ et $\delta_{\alpha\beta}$.

³¹Un avertissement est de mise ici. Pour $N = 1$, il n'existe pas de directions transverses et le calcul ci-dessus, bien que quantitativement incorrect car ν reçoit des corrections pour $d < 4$, est qualitativement correct. Pour $N > 1$ par contre, il laisse supposer que $N - 1$ modes sont de longueur de corrélation infinie mais pas le dernier. En fait, le couplage entre les modes transverses et le mode longitudinal rend aussi celui-ci de longueur de corrélation infinie et le champ moyen est ici qualitativement incorrect. Pour autant, on peut quand même définir pour $T < T_c$ une longueur, dite de Josephson, qui sépare le comportement de type Goldstone du comportement critique et, pour les modèles $O(N)$, cette longueur diverge à la transition avec un exposant qui est ν , le même que dans la phase de haute température.

à n dimensions et A_{ij} les éléments de matrice d'une matrice diagonale. Pourvu qu'aucun des A_{ii} ne soit nul, cette matrice est inversible et l'on a bien évidemment $\sum_j A_{ij} A_{jk}^{-1} = \delta_{ik}$. Dans le cas continu, la relation entre l'opérateur A et son inverse s'écrit:

$$\int_y A(x, y) A^{-1}(y, z) = \delta(x - z). \quad (50)$$

Si A est un opérateur invariant par translation et qui s'écrit donc (en lui donnant abusivement le même nom): $A(x, y) = A(x - y)$, alors en transformée de Fourier, $A^{-1}(q) = 1/A(q)$. Ceci s'applique à l'opérateur A de Eq. (49) et la relation d'inversion (50) s'écrit:

$$\begin{aligned} \delta(x - z) &= \int_y [(-\nabla_x^2 + r_0) \delta(x - y)] A^{-1}(y - z) \\ &= (-\nabla_x^2 + r_0) \int_y \delta(x - y) A^{-1}(y - z) \\ &= (-\nabla_x^2 + r_0) A^{-1}(x - z) \end{aligned} \quad (51)$$

qui devient en transformée de Fourier:

$$(p^2 + r_0) A^{-1}(p) = 1 \quad (52)$$

et l'on voit donc que $A^{-1}(p) = G^{(2)\text{MF}}(p)$. On en conclut qu'à l'approximation du champ moyen, la fonction $G^{(2)}$ est l'inverse de la partie quadratique du Hamiltonien. Il est appelé le propagateur libre de la théorie (libre car en QFT, une théorie gaussienne décrit des particules libres). Cette fonction est un des ingrédients essentiels de la théorie de perturbation car celle-ci consiste en un développement de $\mathcal{Z}[h]$ en puissances de g_0 autour de la théorie gaussienne:

$$\mathcal{Z}[h] = \int D\phi \left(1 + g_0 \int_{x_1} \phi^4(x_1) + \frac{1}{2} g_0^2 \int_{x_1 x_2} \phi^4(x_1) \phi^4(x_2) + \dots \right) e^{-H_G[\phi] + \int h\phi} \quad (53)$$

où $H_G[\phi]$ est la partie gaussienne du Hamiltonien à champ nul: $H_G[\phi] = 1/2 \int_x [(\nabla\phi(x))^2 + r_0\phi^2(x)]$.

L'intégrale fonctionnelle gaussienne est la seule que l'on sache calculer en toute dimension:

$$\int D\phi e^{-\frac{1}{2} \int_x \phi(x) A(x) \phi(x) + \int_x h(x) \phi(x)} \propto \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{1}{2} \int_x h(x) A^{-1}(x) h(x)} \quad (54)$$

et, bien entendu, à partir de cette expression, on peut calculer la valeur moyenne d'un produit arbitraire de champ par dérivation fonctionnelle par rapport à $h(x)$. On peut donc calculer n'importe quel terme comme:

$$\int D\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-H_G[\phi] + \int h\phi} \quad (55)$$

et donc tous les termes du développement perturbatif.³² On voit sur l'expression ci-dessus qu'elle fait intervenir l'inverse de l'opérateur A de la partie quadratique, c'est à dire dans notre cas, le propagateur libre, raison de son extrême importance en théorie de perturbation.

³²Ce qui reste difficile en théorie de perturbation n'est donc pas le calcul de l'intégrale fonctionnelle mais le calcul des intégrales "de boucles", c'est à dire les intégrales sur les points $x_1, x_2, \dots$. Il y a autant de ces intégrales (chacune étant à d dimensions) qu'il y a de boucles indépendantes dans les diagrammes de Feynman représentant une contribution donnée du développement perturbatif.

3 Le groupe de renormalisation fonctionnel: introduction et définitions

"L'ignorance est la nuit qui commence l'abîme"

V. Hugo

Ce qui est systématiquement négligé dans l'approximation de champ moyen est, dans l'intégrale fonctionnelle, la contribution des configurations du champ autres que celle correspondant à sa valeur moyenne. On appellera fluctuations autour du champ moyen la contribution de ces configurations. Aller au delà du champ moyen consiste donc à réincorporer ces fluctuations qui ont été négligées au niveau du champ moyen, pour finalement calculer les énergies libres W ou Γ .

L'idée de la renormalisation à la Wilson dans sa version moderne consiste donc à construire une trajectoire partant de la situation de champ moyen où les fluctuations ont été négligées et arrivant à l'énergie libre Γ . Historiquement, c'est plutôt W que Γ qui était visé comme point final de la trajectoire, après intégration des fluctuations. Bien sûr, en principe, il ne fait pas grande différence d'obtenir Γ plutôt que W puisqu'on peut reconstruire l'un à partir de l'autre par transformation de Legendre. Mais en pratique, la mise en œuvre d'approximations ne conduit pas du tout aux mêmes résultats selon la quantité sur laquelle on les implémente: l'équivalence entre les deux formulations n'a plus lieu dans ce cas. Or, et on le sait maintenant mais on ne le savait pas jusqu'à assez récemment, Γ est un bien meilleur point de départ pour implémenter des approximations allant au delà de la théorie des perturbations que ne l'est W .³³

L'idée centrale de la renormalisation à la Wilson est d'organiser la sommation sur les fluctuations échelle de moment par échelle de moment. Dans l'espace réel, ceci correspond à la méthode des blocs de spins de Kadanoff: à l'échelle de la maille du réseau on a le Hamiltonien initial et le poids de Boltzmann correspondant, puis on intègre les fluctuations sur un bloc de spins et on obtient un nouvel Hamiltonien duquel découle un nouveau poids de Boltzmann sur les configurations de spins que l'on n'a pas encore intégré, puis on itère le processus jusqu'à avoir intégré sur toutes les configurations du système. On crée ainsi un flot de Hamiltoniens dépendant de l'échelle via la taille des blocs, reliant le Hamiltonien initial à W . Intégrer ce flot, c'est donc calculer W en fonction de H et c'est donc résoudre le modèle.

L'idée avec un flot de Γ (plutôt que de H ou de W) est très similaire: il s'agit de partir du Hamiltonien, qui est défini à l'échelle de la maille du réseau, et d'intégrer successivement, échelle de moment par échelle de moment, sur les fluctuations. Puisque $H = \Gamma^{\text{MF}}$ et que l'approximation de champ moyen consiste à négliger toutes les configurations dans l'intégrale fonctionnelle sauf une, il va s'agir, à l'échelle de la maille du réseau, de geler toutes les fluctuations de telle sorte que

$$H = \Gamma^{\text{MF}} \quad \text{soit remplacé par} \quad H = \Gamma_\Lambda \quad (56)$$

où Λ est l'inverse d'une échelle de longueur microscopique servant à définir H , par exemple une réminiscence de (l'inverse de) la maille de réseau pour le modèle d'Ising. À l'échelle Λ , l'idée est de remplacer $H = \Gamma$ qui n'est qu'une relation approximative valable seulement à l'approximation de champ moyen, par la relation $H = \Gamma_\Lambda$, en choisissant astucieusement la façon de geler les fluctuations à cette échelle de telle sorte que cette relation devienne exacte. L'idée est ensuite de procéder comme pour les blocs de spins en intégrant petit à petit les fluctuations dans une énergie libre de Gibbs

³³En fait, le relatif oubli des méthodes Wilsoniennes vient de là: pendant longtemps le cadre conceptuel proposé par Wilson était très alléchant mais les résultats pratiques obtenus n'étaient pas à la hauteur des espérances. Que cela venait de l'implémentation pratique des schémas d'approximation choisis et surtout qu'il était possible d'y remédier simplement, n'était pas clair du tout et a de fait demandé des décennies pour être compris et surmonté par l'utilisation de Γ . Entre temps, les adeptes des méthodes perturbatives s'étaient fait une raison: on pense à la Wilson et on calcule à la Feynman.

Γ_k , dépendant d'une échelle k , jusqu'à obtenir Γ à $k = 0$ où, par définition, toutes les fluctuations auront été intégrées: $\Gamma_{k=0} = \Gamma$. On aura ainsi réalisé un flot entre $H = \Gamma_{k=\Lambda}$ et $\Gamma = \Gamma_{k=0}$ où, à une échelle intermédiaire $\Lambda > k > 0$, seules les fluctuations de longueur d'onde comprises entre $a = \Lambda^{-1}$ et l'échelle courante $l = k^{-1}$ auront été intégrées, ce qui est bien l'esprit des blocs de spins, voir Fig. 3.

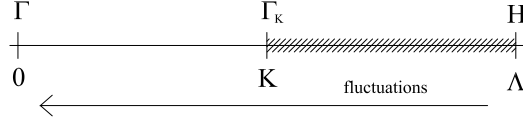


Figure 3: Intégration des fluctuations dans Γ_k . Les fluctuations de grande longueur d'onde, c'est à dire de petit moment par rapport à k , sont gelées et celles de courtes longueurs d'onde sont intégrées sans modification dans Γ_k .

Pour nous résumer, l'idée est de construire une famille d'énergies libres Γ_k à un paramètre interpolant entre le Hamiltonien pour $k = \Lambda$ et l'énergie libre Γ que l'on cherche à calculer à $k = 0$. Pour ce faire, l'idée est de geler à l'échelle k , les fluctuations de moments plus petits que k , c'est à dire les fluctuations de grande longueur d'onde par rapport à k^{-1} : on intègre les modes "rapides" et on gèle les modes "lents". La famille des Γ_k doit donc vérifier:

- $\Gamma_{k=\Lambda} = H$
- $\Gamma_{k=0} = \Gamma$
- Γ_k est l'énergie libre des modes rapides (par rapport à k) qui ont été intégrés.

Il nous faut donc modifier notre modèle pour geler les modes lents à l'échelle k . Ceci est simple à faire car en un sens statistique, un mode est gelé quand il ne participe plus à la fonction de partition, ce qui implique que sa longueur de corrélation soit petite. En effet, imaginons un mode dont la longueur de corrélation est nulle. Son propagateur s'annule aussi (ceci est visible au niveau du champ moyen dans Eq. (46)) et il ne participe plus à la dynamique du système. Pour modifier sa longueur de corrélation, on voit sur Eq. (46) qu'il faut changer la valeur de r_0 en la prenant très grande. Physiquement, ceci revient à mettre le système à très haute température. Dans ce cas, le système est entièrement désordonné (l'énergie thermique kT devient très grande devant l'énergie magnétique J dans les modèles sur réseau Ising et $O(N)$) et il se comporte comme un système de spins n'interagissant pas entre eux: il ne s'agit plus réellement d'un système à grand nombre de corps mais d'une collection de systèmes à un corps indépendants les uns des autres et pour lequel l'approximation de champ moyen devient exacte.

Le problème avec l'idée précédente – changer la température du système tout entier – est qu'elle traite tous les modes de fluctuation, rapides ou lents, sur un pied d'égalité. Or nous souhaitons geler seulement les modes lents (par rapport à k). Le remède est donc de n'attribuer qu'à ces modes un grand r_0 tout en ne modifiant rien pour les autres modes, les modes rapides. On modifie donc le Hamiltonien initial en lui ajoutant un terme qui ne gèle que les modes lents, c'est à dire en leur donnant une "grande masse" via un terme quadratique en champ et qui est quasi nul pour les modes rapides:

$$H[\phi] \rightarrow H_k[\phi] = H[\phi] + \Delta H_k[\phi] = H[\phi] + \frac{1}{2} \int_q R_k(q) \phi(q) \phi(-q) \quad (57)$$

où l'on a écrit $H_k[\phi]$ dans l'espace de Fourier par commodité et où $R_k(q)$, appelé régulateur ou

fonction de coupure (cut-off), a une forme typique donnée en Fig. 4.³⁴ On notera dès à présent les deux propriétés suivantes de R_k :

- $R_{k=0}(q) \equiv 0$ si bien que $H_{k=0}[\phi] = H[\phi]$
- $R_{k=\Lambda}(q) \sim \Lambda^2$ si bien que le terme $\Delta H_{k=\Lambda}$ est très grand par rapport aux autres termes de H .

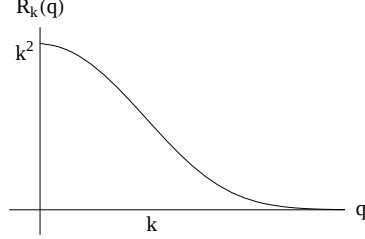


Figure 4: Forme typique du régulateur $R_k(q)$.

La fonction de partition associée à ce modèle est

$$\mathcal{Z}_k[h] = \int D\phi e^{-H_k[\phi] + \int_x h(x)\phi(x)}. \quad (58)$$

On notera le changement de notation par rapport à ce qui précède: désormais, le terme de champ magnétique est explicitement extrait du Hamiltonien H_k qui n'en dépend donc plus. La transformée de Legendre de $W_k[h] = \log \mathcal{Z}_k[h]$, notée $\Gamma_k^{\text{Leg}}[m]$, est comme il se doit

$$\Gamma_k^{\text{Leg}}[m] + W_k[h] = \int_x h(x)m(x). \quad (59)$$

Il est commode pour la suite de réécrire Γ_k^{Leg} sous la forme

$$\Gamma_k^{\text{Leg}}[m] = \Gamma_k[m] + \frac{1}{2} \int_q R_k(q)m(q)m(-q) \quad (60)$$

où $\Gamma_k[m]$, appelée transformée de Legendre modifiée, est l'objet sur lequel on travaillera dans la suite. La différence entre Γ_k^{Leg} et Γ_k est un terme assez trivial en m puisque quadratique mais il est commode de le soustraire de Γ_k^{Leg} pour avoir la propriété $\Gamma_{k=\Lambda} = H$ comme on le montrera dans la suite. On obtient donc:

$$\Gamma_k[m] + W_k[h] = \int_x h(x)m(x) - \frac{1}{2} \int_{xy} R_k(x-y)m(x)m(y) \quad (61)$$

où l'on a écrit ce coup-ci dans l'espace des positions le terme provenant du régulateur.

Bien évidemment, diminuer k dans R_k consiste à intégrer de plus en plus de fluctuations et il en découle une évolution de $\Gamma_k[m]$ avec k , appelée le flot de renormalisation. Dérivons maintenant cette équation.

³⁴On verra dans ce qui suit qu'en fait la valeur en $q = 0$ de $R_k(q)$ n'est pas exactement k^2 car il sera commode d'inclure dans R_k une contribution provenant de la renormalisation du champ. Pour ce qui nous intéresse à cette étape, ceci est un détail mais il faut se souvenir que nous devons revenir sur la forme précise du régulateur.

3.1 Une identité exacte sur $\Gamma_k[m]$ et limite $k \rightarrow \Lambda$

Intuitivement, on se doute que si la fonction $R_k(q)$ devient très grande pour tous les modes de fluctuations quelque soit leur longueur d'onde, les fluctuations du système régularisé par R_k deviendront très petites et l'approximation de champ moyen cessera d'être une approximation pour devenir exacte. C'est ce que nous allons montrer maintenant en nous servant d'une identité exacte satisfaite par Γ_k .

Travaillons pour commencer avec l'exemple d'une théorie mettant en jeu un champ scalaire. On part de Eq. (61) que l'on réécrit:

$$e^{-\Gamma_k[m]} e^{\int_x h(x)m(x) - \frac{1}{2} \int_{xy} R_k(x-y)m(x)m(y)} = \int D\phi e^{-H[\phi] - \frac{1}{2} \int_{xy} R_k(x-y)\phi(x)\phi(y) + \int_x h(x)\phi(x)}. \quad (62)$$

Par ailleurs, en se servant de Eqs. (20) et (60) on obtient

$$\frac{\delta \Gamma_k[m]}{\delta m(x)} = h(x) - \int_y R_k(x-y)m(y). \quad (63)$$

En substituant Eq. (63) dans Eq. (62) on obtient finalement:

$$e^{-\Gamma_k[m]} = \int D\phi e^{-H[\phi] + \int_x \frac{\delta \Gamma_k[m]}{\delta m(x)} (\phi(x) - m(x)) - \frac{1}{2} \int_{xy} R_k(x-y) (\phi(x) - m(x)) (\phi(y) - m(y))}. \quad (64)$$

Cette équation est très intéressante car elle montre trivialement que si $\forall q, R_k(q) \rightarrow \infty$, alors $\Gamma_k = H$ ou, dit autrement, le champ moyen devient exact dans cette limite.

Pour montrer cela, on se sert de l'analogue fonctionnel de la relation

$$\sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{1}{2}ax^2} \underset{a \rightarrow \infty}{\sim} \delta(x) \quad (65)$$

qui est

$$e^{-\frac{1}{2} \int_{xy} R_k(x-y) (\phi(x) - m(x)) (\phi(y) - m(y))} \underset{R_k \rightarrow \infty}{\sim} \delta(\phi - m) \quad (66)$$

où le facteur de proportionalité analogue à $\sqrt{2\pi/a}$ a été omis dans cette équivalence car il est sans importance pour la suite. Lorsque cette relation est valide, on peut donc effectuer l'intégrale fonctionnelle et on en déduit trivialement le résultat annoncé.

Dans la pratique, on aura deux cas:

- soit $R_{k=\Lambda}(q) \equiv \infty$ et alors $\Gamma_\Lambda = H$,
- soit, comme c'est le plus souvent le cas, $R_{k=\Lambda}(q) \simeq \Lambda^2$ et alors $\Gamma_\Lambda \simeq H$ car bien que Λ soit très grand devant la plupart des échelles du problème, il n'est pas infini.³⁵

Pour conclure cette section, on notera donc plusieurs points.

- Le régulateur R_Λ fait bien le travail qu'il est censé faire en gelant les fluctuations des modes $q < \Lambda$ puisque pour $k = \Lambda$, toutes les fluctuations (ou presque) sont gelées et le champ moyen devient exact.
- C'est bien Γ_Λ qui devient égal à H et non $\Gamma_\Lambda^{\text{Leg}}$ défini en Eq. (59) qui, lui, devient $H + \Delta H_\Lambda$, comme il se doit pour la transformée de Legendre de W_Λ .

³⁵Notons que ceci est sans importance pour le calcul des quantités universelles qui sont indépendantes des détails de courte distance, i.e. ultraviolets, mais l'est pour le calcul des quantités non universelles qui nécessitent une description la plus fidèle possible du secteur UV.

- Le terme $-\frac{1}{2} \int_q R_k(q)m(q)m(-q)$ utilisé dans Eq. (60) pour définir la transformée de Legendre modifiée $\Gamma_k[m]$ sert à compenser en valeur moyenne le terme ΔH_k introduit dans la fonction de partition régularisée, Eq. (58). Lorsque toutes les fluctuations sont gelées, c'est à dire pour $k = \Lambda$, ces deux termes coïncident ce qui assure que $\Gamma_\Lambda = H$.
- De ce qui précède, on déduit que le flot de renormalisation de Γ_k permettra de relier le hamiltonien H à l'énergie libre Γ puisque en $k = \Lambda$, condition initiale du flot, $\Gamma_{k=\Lambda} = H$ et en $k = 0$, point final du flot, $\Gamma_{k=0} = \Gamma$ puisque $R_{k=0} \equiv 0$.

3.2 L'équation de flot exacte de $\Gamma_k[m]$

Calculons l'équation de flot de Γ_k dans le cas $N = 1$ pour commencer. Notons d'abord que

$$\partial_{k|h} \neq \partial_{k|m} \quad (67)$$

car à h fixé, m est une fonction de k et réciproquement, à m fixé, c'est h qui devient une fonction de k . La relation entre les deux dérivées s'écrit

$$\partial_{k|m} = \partial_{k|h} + \int_x \partial_k h(x)|_m \frac{\delta}{\delta h(x)} \quad (68)$$

qui est la relation généralisant au cas fonctionnel le changement habituel de dérivée lorsqu'on change le jeu de variables tenues fixes.

On applique maintenant la dérivée précédente à Eq. (61) et on obtient:

$$\partial_{k|m} \Gamma_k[m] + \left(\partial_{k|h} + \int_x \partial_k h(x)|_m \frac{\delta}{\delta h(x)} \right) W_k[h] = \int_x \partial_k h(x)|_m m(x) - \frac{1}{2} \int_{xy} \partial_k R_k(x-y)m(x)m(y). \quad (69)$$

De la définition de $W_k[h]$ découle

$$\frac{\delta W_k[h]}{\delta h(x)} = \langle \phi(x) \rangle = m(x) \quad (70)$$

où la valeur moyenne précédente est calculée en présence du terme ΔH_k . A partir de Eq. (58) on obtient d'autre part:

$$\begin{aligned} \partial_{k|h} W_k[h] &= \frac{1}{Z_k[h]} \int D\phi \left(-\frac{1}{2} \int_{xy} \partial_k R_k(x-y) \phi(x) \phi(y) \right) e^{-H_k[\phi] + \int_x h\phi} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{xy} \partial_k R_k(x-y) \langle \phi(x) \phi(y) \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \int_{xy} \partial_k R_k(x-y) \left(G_{c,k}^{(2)}[x, y; h] + m(x)m(y) \right). \end{aligned} \quad (71)$$

En reportant Eqs. (70) et (71) dans Eq. (69) on obtient:

$$\partial_k \Gamma_k[m] = -\frac{1}{2} \int_{xy} \partial_k R_k(x-y) G_{c,k}^{(2)}[x, y; h]. \quad (72)$$

Comme les fonctions $G_{c,k}^{(2)}[x, y; h]$ et $\Gamma_k^{(2), \text{Leg}}[x, y; m]$ sont inverses l'une de l'autre, voir Eq. (22), on en déduit finalement l'équation de flot

$$\boxed{\partial_k \Gamma_k[m] = -\frac{1}{2} \int_{xy} \partial_k R_k(x-y) \left(\Gamma_k^{(2)}[x, y; m] + R_k(x-y) \right)^{-1}} \quad (73)$$

souvent appelée équation de Wetterich. Cette équation a comme condition initiale $\Gamma_\Lambda = H$ si $R_\Lambda(q) = \infty$.

L'équation précédente peut être généralisée simplement à des modèles à symétrie $O(N)$. Dans ce cas, il est évidemment commode de prendre un terme ΔH_k qui respecte la symétrie:

$$\Delta H_k[\phi] = \frac{1}{2} \int_{xy} R_k(x-y) \phi(x) \cdot \phi(y) = \frac{1}{2} \int_{xy} \phi_\alpha(x) \left(R_k(x-y) \delta_{\alpha\beta} \right) \phi_\beta(y). \quad (74)$$

Tout comme la fonction de coupure: $R_{k,\alpha\beta}(x-y) = R_k(x-y) \delta_{\alpha\beta}$, la fonction $\Gamma^{(2)}$ est elle aussi un tenseur de $O(N)$ comme on le voit sur Eq. (21). En répétant les étapes de la dérivation ci-dessus, on trouve sans surprise pour l'équation de flot

$$\partial_k \Gamma_k[m] = -\frac{1}{2} \text{Tr} \int_{xy} \partial_k R_k(x-y) \left(\Gamma_k^{(2)}[x, y; m] + R_k(x-y) \right)^{-1} \quad (75)$$

où la trace est à prendre sur les indices du groupe, ici $O(N)$.

De façon plus générale, si H est symétrique sous un groupe $\mathcal{G}$, on prendra s'il existe un terme ΔH_k symétrique sous $\mathcal{G}$ et l'équation de flot sera formellement identique à celle ci-dessus avec la trace qui sera à prendre sur les indices de $\mathcal{G}$.

3.2.1 Quelques propriétés de l'équation de flot exacte et des approximations qui seront mises en œuvre

- L'équation de Wetterich (73) est une équation exacte qui, si elle est résolue exactement, donne $\Gamma[m]$ à la fin du flot étant parti de H comme condition initiale, ce qui constitue une solution exacte de la théorie des champs définie à partir de H .³⁶ Cette équation qui semble simple à première vue ne l'est en fait pas: il s'agit d'une équation fonctionnelle, intégrale, non linéaire et aux dérivées partielles. Elle n'est pas soluble exactement en général et nécessite donc des approximations pour être exploitable. Nous verrons dans la suite de ces notes deux schémas d'approximation: le développement dérivatif qui est de loin le plus populaire et la méthode BMW (Blaizot-Méndez-Wschebor), plus puissante mais également plus compliquée à mettre en œuvre.
- Il peut paraître a priori surprenant qu'une équation exacte prétendant calculer l'énergie libre d'un système dépende de façon cruciale d'une fonction de coupure $R_k(q)$ qui, elle, est arbitraire mis à part qu'elle doit s'annuler identiquement à $k = 0$ et tendre vers l'infini pour k tendant vers Λ . La solution à ce paradoxe est bien sûr que $\Gamma_{k=0} = \Gamma$ quelque soit le choix de la fonction de coupure du moment qu'elle vérifie $R_{k=0} \equiv 0$. En d'autres termes, le détail de la trajectoire joignant $\Gamma_\Lambda = H$ à $\Gamma_{k=0} = \Gamma$ importe peu du moment que les points de départ et d'arrivée soient les bons, voir Fig. 5 pour une description schématique du flot. Mais cette assertion est trop lapidaire. Comme déjà dit ci-dessus, le RG n'a d'intérêt que lorsque l'on utilise des approximations pour effectuer de vrais calculs. Et quand on le fait, le résultat final de l'intégration du flot conserve en général une dépendance artificielle dans le choix de la fonction R_k . En d'autres termes, dans l'analogie de la Fig. 5 en présence d'approximations, les flots n'aboutissent pas tous au même point $\Gamma_{k=0}$, c'est à dire qu'ils montrent une dispersion des $\Gamma_{k=0}$.

Pendant longtemps, toute une partie de la communauté physicienne active dans ce champ de recherche a jugé cette dispersion rédhibitoire pour la méthode Wilsonienne de renormalisation,

³⁶Notons que l'on peut aussi formuler une équation exacte pour les théories sur le réseau. Bien entendu, deux théories, l'une dans le continu et l'autre sur réseau, peuvent appartenir à la même classe d'universalité. Leurs quantités universelles seront donc identiques mais les non-universelles seront différentes. La formulation du flot sur le réseau a été mise en œuvre avec grand succès pour le calcul des températures critiques des modèles de spin ferromagnétiques à symétrie $O(N)$ sur réseau cubique tri-dimensionnel avec interaction entre spins plus proches voisins.

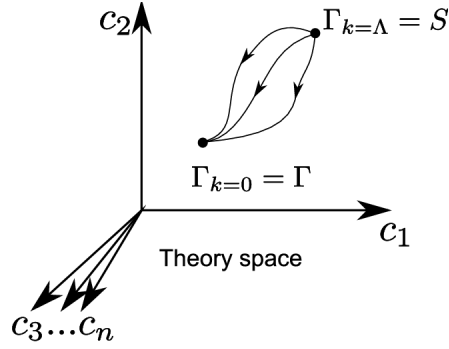


Figure 5: Différents flots exacts de RG dans l'espace des théories correspondant à différents choix de fonction R_k . En QFT, la condition initiale est l'action du modèle, notée S , et en mécanique statistique il s'agit du Hamiltonien H . Les axes représentent schématiquement les différentes constantes de couplage. Elles sont en général en nombre infini car le long du flot de renormalisation tous les couplages (compatibles avec les symétries) sont générés.

ce qui sous-entendait deux choses: (i) une quantité physique ne peut pas dépendre d'un choix non physique, et (ii) cette dépendance est spécifique de la méthode Wilsonienne et la discrédite pour ce qui est des calculs réels, c'est à dire approximatifs. Or il convient d'être très prudent avec les assertions (i) et (ii) ci-dessus.

Tout d'abord, on ne peut qu'être d'accord avec (i) si aucune approximation n'est effectuée. Mais génériquement, et dans tous les domaines de la physique, les résultats de calculs approchés dépendent de la méthode de calcul. Prenons l'exemple simple du calcul perturbatif de la fréquence $\Omega/2\pi$ d'un oscillateur anharmonique classique de Hamiltonien $H = p^2/2m + m\omega_0^2 x^2/2 + gx^4$. La méthode standard de calcul perturbatif de Ω consiste à considérer le terme gx^4 comme une perturbation de l'oscillateur harmonique de fréquence $\omega_0/2\pi$ et à calculer Ω en série de Taylor de g . Mais rien n'empêche de d'abord couper en deux le terme de potentiel harmonique: $m\omega_0^2 x^2/2 = m\omega^2 x^2/2 + m(\omega_0^2 - \omega^2)x^2/2$ et d'effectuer la théorie de perturbation en considérant $m(\omega_0^2 - \omega^2)x^2/2 + gx^4$ comme la perturbation. On trouve alors à tous les ordres de perturbation que Ω dépend de ω , ce qui est clairement un artefact de la théorie de perturbation.³⁷ Ainsi, on trouve qu'il n'y a pas une théorie de perturbation mais, à ordre fini donné, une infinité de façons non équivalentes de construire des théories de perturbation. Ceci est vrai également en théorie des champs et ça n'est pas parce qu'on en choisit une seule que les autres n'existent pas.

Notons qu'en théorie des champs, il existe des théories de perturbation intrinsèquement différentes les unes des autres: développement en $\epsilon = 4 - d$ ou en $\epsilon = d - 2$, développement à d fixée en constante de couplage (par exemple le "massive zero momentum scheme"), développement en $1/N$, pour ne citer que les plus célèbres. Il faut bien comprendre cependant que

³⁷Il faut noter ici que cette dépendance en ω qui pourrait paraître catastrophique, peut au contraire être transformée en un avantage. L'idée est de chercher "le meilleur oscillateur harmonique" autour duquel effectuer le calcul perturbatif. En effet, si g est grand, Ω peut être très différente de ω_0 – on trouve que c'est effectivement le cas – ce qui rend très mauvais le comportement de la série perturbative pour les grandes valeurs de g . L'idée est de choisir ω de telle façon que la différence $\Omega_n - \Omega_{n-1}$, où Ω_n est la valeur de Ω au n -ième ordre de perturbation, soit la plus petite possible ce qui assure la convergence la plus rapide possible de la suite des Ω_n . A tout ordre n , cela fait de ω une fonction de g , ce qui est tout à fait licite puisque ω est arbitraire. Ce faisant, les $\Omega_n = \Omega_n(\omega_0, g, \omega_n(g))$ ne sont plus du tout des séries en puissances de g . Le résultat de cette procédure est que la convergence de ces Ω_n est très rapide contrairement à la série perturbative en g , série qui n'est pas convergente et qui nécessite des resommations assez sophistiquées et de grands ordres de perturbation pour atteindre le même degré de précision. Cette méthode d'amélioration de la théorie des perturbations est parfois appelée "improved perturbation theory". L'optimisation du choix de paramètres non physiques en FRG, la fonction R_k en l'occurrence, va être un thème important de ces notes.

même à méthode perturbative donnée, il y a plusieurs façons non équivalentes de conduire les calculs qui conduisent à ordre fini fixé à des résultats différents. On dit pour cette raison que les résultats obtenus sont dépendants du schéma de renormalisation. Ceci répond au point (ii) ci-dessus: choisir en FRG une fonction de coupure R_k est analogue à choisir un schéma de renormalisation en théorie de perturbation et dans les deux cas, les résultats physiques obtenus à un ordre donné d'approximation dépendent de ce choix. Le FRG n'est donc pas la seule méthode à souffrir de cet arbitraire et tout l'art, que l'on soit ou non perturbatif, consistera à optimiser le choix du schéma, voir la suite pour la sélection optimale de R_k .

Notons enfin que les séries perturbatives n'étant pas en général des séries convergentes, elles nécessitent des resommations (quand c'est possible, ça ne l'est pas toujours) pour pouvoir être exploitées, resommations qui introduisent une dose d'arbitraire supplémentaire puisque les résultats resommés dépendent des méthodes de resommation utilisées.³⁸ Le FRG est dans une meilleure position de ce point de vue, voir la suite.

- Si le Hamiltonien microscopique H (et la mesure fonctionnelle) sont symétriques sous un groupe $\mathcal{G}$ et s'il existe une fonction de coupure R_k telle que le terme ΔH_k respecte cette symétrie, alors Γ_k est symétrique sous $\mathcal{G}$ pour tout k , et donc $\Gamma = \Gamma_{k=0}$ l'est également. On dit alors que la symétrie $\mathcal{G}$ n'a pas d'anomalie: en termes quantiques, la symétrie de la théorie classique, i.e. la symétrie de H ou, plutôt de l'action S , se retrouve au niveau quantique, c'est à dire sur Γ et donc pour toutes les fonctions de corrélation.

Il peut arriver qu'il n'existe aucun terme ΔH_k quadratique dans les champs qui respecte la symétrie $\mathcal{G}$ alors que la théorie, c'est-à-dire Γ , est invariante sous $\mathcal{G}$. Cela signifie que la symétrie est brisée par ΔH_k pour tout k fini et que la symétrie n'est restaurée que pour $k = 0$. Ceci est le cas des symétries de jauge en QFT car ces symétries imposent la nullité de la masse des bosons de jauge et est donc incompatible avec un terme quadratique dans les champs de jauge tel que ΔH_k . Ce terme de brisure de symétrie peut être contrôlé par des identités de Ward (plus exactement de Slavnov-Taylor) modifiées qui deviennent, dans la limite $k \rightarrow 0$, les véritables identités de Ward de la symétrie de jauge.

Une difficulté supplémentaire apparaît cependant dès que l'on implémente des approximations car dans ce cas, le résultat final de l'intégration du flot conserve une dépendance artificielle dans R_k , comme expliqué ci-dessus, et il est donc délicat d'assurer l'invariance de jauge des résultats de l'intégration du flot même à $k = 0$. Ceci est vrai au delà de l'exemple de l'invariance de jauge et se retrouve dans toute situation où un terme de coupure quadratique dans les champs est incompatible avec une symétrie ou avec toute autre propriété du modèle.³⁹

- On peut dériver une équation exacte de flot de RG en présence de fermions. La trace est alors remplacée par une super trace (les fermions contribuent avec un signe opposé des bosons).
- L'équation (73) ressemble beaucoup au résultat à une boucle puisque, à cet ordre:

$$\Gamma_k = H + \frac{1}{2} \text{Tr} \log \left(H^{(2)} + R_k \right). \quad (76)$$

Ainsi, en dérivant par rapport à k et en remplaçant $H^{(2)}$ – qui est $\Gamma^{(2)}$ à l'approximation de champ moyen – par la fonctionnelle $\Gamma_k^{(2)}[m]$, on transforme le résultat à une boucle en un résultat exact!

Il existe une représentation diagrammatique de l'équation de Wetterich mettant en évidence sa structure à une boucle, voir Fig. 7.

³⁸Notons que QED échappe à ce problème tant est petite la constante de couplage servant à ordonner la théorie de perturbation, voir la note de pied de page 11.

³⁹En mécanique statistique hors équilibre thermodynamique, la notion de causalité joue souvent un rôle important et n'est pas à proprement parler une symétrie. Là aussi, il est nécessaire de veiller à choisir un R_k qui ne viole pas cette propriété.

$$G_{k,q,-q'} = q \longrightarrow \longleftarrow -q'$$

Figure 6: Représentation diagrammatique du propagateur complet $G_{c,k}^{(2)}[q, -q'; h]$ en espace de Fourier. Il s'agit d'une fonction des deux variables x et y dans l'espace direct et de deux arguments q et $-q'$ en Fourier car il n'y a pas d'invariance par translation lorsqu'on évalue $G_{c,k}^{(2)}$ dans un champ externe $h(x)$ non constant.

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \quad \text{---} \quad \text{diagramme d'une boucle fermée avec une croix} \quad \text{---}$$

Figure 7: Représentation diagrammatique de l'équation de Wetterich (73). Dans cette équation, les intégrales sur x et y forcent, en espace de Fourier, le deuxième argument de $G_{c,k}^{(2)}[q, -q'; h]$ à être $q' = q$. L'intégrale sur q restante est représentée par une boucle. La croix correspond à $\partial_k R_k(q)$.

- Cette structure à une boucle a une conséquence pratique très importante : une seule intégrale doit être calculée et, lorsqu'on l'évalue dans un champ constant, elle est unidimensionnelle grâce à l'invariance par rotation. Cela est très différent de la théorie des perturbations, où les diagrammes à l boucles nécessitent des intégrales de dimension d fois l . Il s'agit d'une simplification considérable par rapport à la théorie de perturbation.
- Le développement perturbatif peut être retrouvé à partir de l'équation de Wetterich et, par exemple, la preuve de la renormalisabilité perturbative de la théorie ϕ^4 en $d = 4$ est beaucoup plus simple dans ce formalisme que dans le formalisme diagrammatique.
- En raison du terme $\partial_k R_k$ dans l'équation de Wetterich (73), seuls les moments q^2 de l'ordre de k^2 ou moins contribuent au flot à l'échelle k (nous reviendrons en détail sur ce point par la suite). Ainsi, le flot de RG est régulier dans l'ultraviolet. Pour ce qui est de l'infrarouge, le terme en R_k du propagateur: $(\Gamma^{(2)} + R_k)^{-1}$ régularise son comportement à petits moments, ce qui est normal puisque la procédure même de "coarse-graining" consiste à geler les modes de fluctuations de grande longueur d'onde. Toutes les divergences de la théorie des perturbations sont donc évitées : le flot de RG est calculé d'emblée et non d'abord, comme en théorie de perturbation, la relation entre les quantités nues et renormalisées à partir de laquelle est calculé, dans une seconde étape, le flot du RG.
- De ce qui a été dit précédemment, il s'ensuit que k agit comme un régulateur infrarouge (pour $k \neq 0$) un peu similaire à une boîte de taille finie $\sim k^{-1}$. Ainsi, pour $k > 0$, il n'y a pas de transition de phase dans le système régularisé par R_k et donc pas de singularité infrarouge dans Γ_k . À k fini, tout est régulier et peut être développé en série du champ et/ou de ses dérivées. Nous pouvons donc conclure que :
 - (i) les singularités de Γ se construisent à mesure que k diminue et sont donc régularisées par k dans Γ_k ;
 - (ii) le précurseur du comportement critique devrait déjà apparaître à k fini pour des moments beaucoup plus grands que k (et beaucoup plus petits que la coupure ultraviolette Λ ou,

plus exactement que l'échelle de Ginzburg, voir la suite). C'est effectivement ce que l'on constate en calculant (par la méthode BMW, voir la suite) la fonction $\Gamma_k^{(2)}(p, m = 0)$: pour un modèle critique, c'est à dire tel que son hamiltonien H le rende critique, le comportement à petit p : $p \ll k$, est régulier et développable en série de p^2/k^2 alors qu'à $p \gg k$ il s'agit de $p^{2-\eta}$ qui, à la criticalité, est le comportement attendu de $\Gamma_{k=0}^{(2)}(p)$ pour tout $|p| > 0$. On voit donc se construire le comportement critique en p dans la région où k est négligeable devant $|p|$ et à mesure que k diminue, cette région s'étend de plus en plus jusqu'à être tout le domaine en p pour $k = 0$. Nous verrons que la région $p < k$ est la région où le développement dérivatif est valide et au delà duquel il cesse de l'être (voir la suite).

- (iii) Il existe une différence fondamentale entre le flot des Hamiltoniens tel que formulé historiquement par Wilson (ou bien le flot de $W_k[h]$) et le flot de Γ_k : dans le premier cas, k est une coupure ultraviolette car le Hamiltonien effectif de Wilson à l'échelle k , obtenu après intégration des modes rapides (principe des blocs de spins), est le Hamiltonien pour les modes lents, c'est-à-dire pour les modes qui n'ont pas encore été intégrés. Dans le second cas, Γ_k est l'énergie libre (modifiée) des modes rapides, c'est à dire ceux qui ont déjà été intégrés et c'est pour cela que k est une coupure infrarouge pour Γ_k .

Le Hamiltonien Wilsonien à l'échelle k n'a aucune interprétation physique simple car pour lire la physique qui en découle, c'est à dire obtenir l'énergie libre, il faut encore calculer une intégrale fonctionnelle, celle sur les modes lents de fluctuations. Au contraire, Γ_k est une sorte de précurseur de Γ puisqu'il s'agit d'une énergie libre, certes étrange puisque correspondant à l'intégration incomplète sur les fluctuations, mais sur laquelle on peut déjà lire une partie de la physique.

4 Le développement dérivatif

Comme expliqué plus haut, l'équation du flot de Γ_k (73) ne peut pas être résolue en général et le recours à des approximations pour la résoudre est inévitable. La plus célèbre de ces approximations est la théorie de perturbation mais il ne s'agira pas de notre sujet d'étude.

Nous allons voir maintenant que la formulation de la théorie des champs sous la forme de l'équation de Wetterich (73) permet des approximations qui ne sont pas fondées sur la petitesse d'un paramètre, que ce soit l'écart à la dimension critique supérieure ($\epsilon = 4 - d$) ou inférieure ($\epsilon = d - 2$), la constante de couplage g_0 (développement en dimension fixée autour du gaussien) ou l'inverse du nombre de composantes du champ $1/N$ (développement autour du modèle sphérique à $N = \infty$). La plus célèbre de cette série d'approximations est le développement dérivatif de $\Gamma_k[m]$ et c'est celle que nous allons détailler maintenant dans le cas $N = 1$.

Comme expliqué plus haut, les fluctuations des modes lents, responsables des singularités infrarouges à la criticalité, sont coupées dans Γ_k par le régulateur R_k . Il s'ensuit que Γ_k est une fonctionnelle régulière de $m(x)$ même si le système initial, non régularisé, est critique. On peut donc tenter un développement dérivatif de cette fonctionnelle qui, pour $\Gamma_k^{(2)}(p, m = 0)$ par exemple sera un développement en puissances de p^2/k^2 régulier tant que $k \neq 0$. Pour $N = 1$, ce développement est tout à fait analogue à celui donné en Eq. (28):

$$\Gamma_k[m] = \int_x \left\{ U_k(m(x)) + \frac{1}{2} Z_k(m(x)) (\nabla m(x))^2 + O(\nabla^4) \right\}. \quad (77)$$

Dans l'équation précédente, la dépendance en k est portée par les fonctions $U_k, Z_k, \dots$ ⁴⁰ Il en serait de même pour $N > 1$ avec l'analogue de Eq. (29). Bien sûr, la question de la convergence de ce

⁴⁰Rappelons que la fonction $Z_k(m(x))$ n'a rien à voir avec la fonction de partition $Z_k[h]$.

développement est cruciale pour savoir si l'on peut en déduire de la physique non triviale et, comme expliqué plus haut, ceci est bien le cas pour des échelles plus petites que typiquement k . Dans la limite $k \rightarrow 0$, on peut donc espérer calculer de façon fiable avec ce développement les quantités thermodynamiques, c'est à dire celles définies à partir des fonctions de corrélation à moments nuls, ce qui est le cas de la longueur de corrélation, de la susceptibilité, de l'aimantation, de la chaleur spécifique, etc.

L'équation de flot sur Γ_k (73), une fois inséré le développement dérivatif Eq. (77), devient évidemment un ensemble infini d'équations de flot couplées pour les fonctions $\{U_k(m), Z_k(m), \dots\}$. Pour être exploitable, cette tour infinie d'équations doit être tronquée en ne gardant qu'un nombre fini de fonctions correspondant à un ordre fini du développement dérivatif. La plus simple de cette troncature consiste à ne garder comme fonction de k que le potentiel U_k . Il s'agit de l'approximation du potentiel local (LPA) que nous allons maintenant étudier en détail.

4.1 L'approximation du potentiel local dans le cas Ising

Dans cette approximation, on remplace Γ_k par Γ_k^{LPA} donnée par

$$\Gamma_k[m] \rightarrow \Gamma_k^{\text{LPA}}[m] = \int_x \left\{ U_k(m(x)) + \frac{1}{2} (\nabla m(x))^2 \right\}. \quad (78)$$

Du fait de la symétrie $\mathbb{Z}_2$, $U_k(m(x))$ est en fait une fonction de $\rho(x) = m^2(x)/2$ seulement et il sera parfois intéressant de travailler avec ρ plutôt qu'avec m pour rendre manifestement invariante sous $\mathbb{Z}_2$ les équations que nous manipulerons.

On notera que dans la LPA, le terme dérivatif déjà présent dans H a été conservé (mais avec $Z_k(m)$ remplacé par 1) car sinon le système ne présenterait plus aucune dynamique car il n'y aurait plus aucun couplage entre les $m(x)$ en différents points.

Le potentiel U_k est défini à partir de Γ_k par:

$$\Omega U_k(m) = \Gamma_k[m]_{|m(x)=m} \quad (79)$$

où m est constant et Ω est le volume du système.⁴¹ On constate sur cette définition qu'il n'est nul besoin de considérer des champs m dépendant de x pour obtenir la dépendance fonctionnelle en m de U_k , ce qui va s'avérer une simplification drastique.

Le flot de U_k est obtenu en agissant avec l'opérateur ∂_k sur les deux membres de Eq. (79), en remplaçant $\partial_k \Gamma_k$ par le membre de droite de l'équation de Wetterich et en calculant ce membre de droite avec l'ansatz LPA, Eq. (78):

$$\begin{aligned} \partial_k U_k(m) &\stackrel{\text{LPA}}{=} \frac{1}{2} \int_{xy} \partial_k R_k(x-y) \left(\Gamma_k^{(2),\text{LPA}}(x-y, m) + R_k(x-y) \right)^{-1} \\ &\stackrel{\text{LPA}}{=} \frac{1}{2} \int_q \partial_k R_k(q) \left(\Gamma_k^{(2),\text{LPA}}(q, m) + R_k(q) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (80)$$

Le calcul de $\Gamma_k^{(2),\text{LPA}}(x-y, m)$ ne pose aucune difficulté:

$$\Gamma_k^{(2),\text{LPA}}(x-y, m) = (-\nabla_x^2 + U_k''(m)) \delta(x-y). \quad (81)$$

On en déduit le flot LPA de U_k :

$$\partial_k U_k(m) = \frac{1}{2} \int_q \frac{\partial_k R_k(q)}{q^2 + R_k(q) + U_k''(m)}. \quad (82)$$

⁴¹Notons ici qu'il est important de se donner une définition de U_k qui soit valable indépendamment de l'ordre du développement dérivatif auquel on travaille. Ainsi, la seule source d'erreur dans son équation de flot proviendra de la troncature du développement dérivatif et non, en plus, d'une définition qui changerait en fonction de l'ordre considéré.

Il est maintenant temps de faire un choix de fonction de coupure et nous prendrons par exemple:

$$R_k(q) = (k^2 - q^2)\theta(k^2 - q^2) \quad (83)$$

où $\theta(x)$ est la fonction de Heaviside. Ce régulateur a plusieurs avantages: il permet de considérablement simplifier le flot LPA et il est peut-être optimal à la LPA pour ce qui est du calcul des exposants critiques, au sens qu'il conduit aux résultats les plus proches des meilleurs résultats connus en $d = 3$ (aucune preuve rigoureuse de cela n'existe mais c'est une constatation empirique qu'il en est ainsi). On se sert de

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} f(q^2) = 2v_d \int_0^\infty dx x^{d/2-1} f(x) \quad (84)$$

avec $v_d = (2^{d+1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2))^{-1}$ et on obtient finalement:

$$\boxed{\partial_k U_k(m) \underset{\text{LPA}}{=} \frac{4v_d}{d} \frac{k^{d+1}}{k^2 + U_k''(m)}} \quad (85)$$

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles non linéaire mais qui reste tout de même très simple et dont l'intégration numérique est simple et sans surprise en tout cas pour $d > 2$ (nous reviendrons sur le cas $d = 2$).

Pour intégrer cette équation nous avons besoin d'une condition initiale. Elle est donnée dans notre cas par le potentiel "nu" en ϕ^4 , celui du Hamiltonien du système, Eq. (3). En prenant fixe la valeur (positive) de g_0 , il y a plusieurs cas suivant celle de r_0 .

Pour qualitativement comprendre ce qui va se passer lorsqu'on intègre le flot de U_k , rappelons nous que les fluctuations tendent à désorganiser le système si bien que la valeur de la température critique pour un modèle tel que Ising est plus petite que celle de champ moyen: $T_c < T_c^{\text{MF}}$. Pour la théorie ϕ^4 , il en est de même: la valeur de r_0 pour laquelle le modèle est critique est plus faible que celle de champ moyen (qui vaut zéro): $r_{0,c} < r_{0,c}^{\text{MF}} = 0$. Du coup, il y a trois possibilités, décrites qualitativement dans ce qui suit et qui sont confirmées par l'intégration numérique du flot donné en Eq. (85).

(i) Soit $r_{k=\Lambda} = r_0 > 0$ et alors, même au niveau du champ moyen, le système est dans la phase désordonnée car le potentiel initial est convexe, en forme de U. Les fluctuations ne pouvant qu'accentuer cela, le potentiel reste convexe tout le long du flot en se déformant un peu du fait des fluctuations, essentiellement gaussiennes, puisque le système est profondément dans la phase de haute température et sa longueur de corrélation par conséquent petite.

(ii) Soit $0 = r_{0,c}^{\text{MF}} > r_{k=\Lambda} = r_0 > r_{0,c}$ et alors le système a un potentiel nu, c'est à dire de champ moyen, en forme de double puit puisque $r_0 < 0$. Il a donc deux minima en $\pm\sqrt{-6r_0/g_0}$. Cependant, il est dans la phase de haute température si bien que son aimantation spontanée est nulle et le potentiel effectif $U = U_{k=0}$ ne doit avoir qu'un seul minimum à l'origine. On en déduit que le potentiel $U_k(m)$ doit se déformer au cours du flot de telle sorte que ses minima (dépendants de k) se rapprochent de l'origine jusqu'à ce qu'ils la touchent pour une valeur $k_0 > 0$, voir Fig. 8. Pour le reste du flot, c'est à dire pour $k < k_0$, le flot est assez semblable au cas (i): le potentiel continue à se déformer un peu mais reste convexe, en forme de U, jusqu'à $k = 0$.

On peut facilement deviner ce que vaut k_0 : dans la phase de haute température, lorsque la longueur de corrélation est grande et finie, $\xi \gg a = \Lambda^{-1}$, on se rend compte que $\xi < \infty$ seulement pour des échelles de longueur plus grandes ou de l'ordre de la longueur de corrélation: pour des échelles de longueur beaucoup plus petites, tout se passe comme si la longueur de corrélation était infinie. En conséquence, tant que $k \gg \xi^{-1}$, le potentiel évolue beaucoup avec le flot et ses minima se rapprochent de l'origine et lorsque k devient de l'ordre de ξ^{-1} , le système n'apparaît plus critique, le fait qu'il est dans la phase haute température devient manifeste et le seul minimum qui reste est à l'origine. On en déduit que $k_0 \simeq \xi^{-1}$.

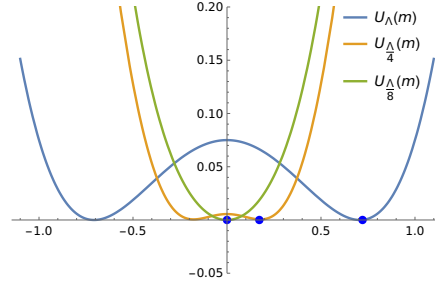


Figure 8: Flot typique du potentiel U_k dans la phase ordonnée ($r_0 > r_{0,c}$). La position du minimum du potentiel, marquée par un point, varie avec l'échelle k et se rapproche de l'origine à mesure que k diminue comme on pouvait s'y attendre puisque les fluctuations tendent à désorganiser le système et donc à réduire l'aimantation spontanée par rapport à ce qu'elle est en champ moyen. A une échelle finie k_0 , les minima atteignent l'origine. Cette échelle est typiquement l'inverse de la longueur de corrélation ξ . Pour $k < k_0$, le minimum reste à l'origine et le potentiel se déforme alors assez peu.

(iii) Soit $r_{k=\Lambda} = r_0 < r_{0,c}$ et alors à la fin du flot le potentiel doit présenter des minima en l'aimantation spontanée $\pm m_{\text{sp.}}$. Dit autrement, les minima du potentiel $U_k(m)$ évoluent avec k jusqu'à atteindre en $k = 0$ une valeur limite non nulle qui donne l'aimantation spontanée, voir Fig. 9. Remarquons que U_k n'est pas nécessairement convexe car il provient d'une transformée de Legendre auquel un terme quadratique a été soustrait pour donner Γ_k . Néanmoins, en $k = 0$, ce terme quadratique s'annule si bien que $U = U_{k=0}$ doit être convexe.

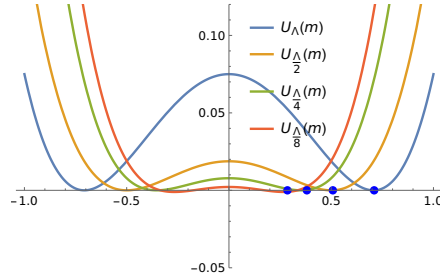


Figure 9: Flot typique du potentiel U_k dans la phase brisée ($r_0 < r_{0,c}$). La position du minimum du potentiel, marquée par un point, varie avec l'échelle k et se rapproche de l'origine à mesure que k diminue. Pour $k \simeq \xi^{-1}$, la position du minimum a presque atteint sa valeur à $k = 0$ qui est celle de l'aimantation spontanée car pour $k < \xi^{-1}$ les fluctuations sont petites si bien que la valeur de ce minimum ne change presque plus. Par contre, le potentiel continue à s'aplatir entre les minima puisque $R_{k=0}(q) \equiv 0$ si bien que $U = U_{k=0}$ est obtenu par une vraie transformée de Legendre et est donc convexe.

Bien sûr, la propriété de convexité pourrait être brisée par la LPA et c'est d'ailleurs bien ce qui se passe pour certains choix de régulateur. Il n'en est pas ainsi pour le régulateur donné en Eq. (83). En fait, en intégrant effectivement le flot, on trouve que les minima de U_k se stabilisent à (approximativement) $\pm m_{\text{sp.}}$ pour une valeur $k \simeq \xi^{-1}$ où U_k est encore loin d'être convexe et que pendant le reste du flot la position des minima ne change presque plus mais la partie interne du potentiel, située entre les deux minima, s'aplatit jusqu'à devenir entièrement plate en $k = 0$.

Remarquons que comme $U'_{k=0}(m) = h$, les deux minima à $\pm m_{\text{sp.}}$ sont atteints dans les limites $h \rightarrow 0^\pm$ et qu'il y a donc discontinuité de l'aimantation en $h = 0$ dans la phase de symétrie

brisée. Une conséquence est que la partie plate du potentiel située entre $\pm m_{\text{sp}}$, n'est pas accessible thermodynamiquement, c'est à dire en changeant un paramètre tel que la température ou le champ magnétique.

La criticalité correspond bien entendu à la situation intermédiaire entre les situations (ii) et (iii), ce qui est confirmé par l'argument qualitatif donné en (ii) conduisant à $k_0 \simeq \xi^{-1}$. Cet argument qualitatif nous apprend aussi qu'à la criticalité, le potentiel U_k présente deux minima tout le long du flot et que ça n'est qu'à la fin du flot, en $k = 0$, que ces minima (et le maximum local situé au milieu des deux minima) atteignent l'origine, voir Fig. 10. Or il faut se souvenir qu'à la criticalité, l'invariance par dilatation est une symétrie émergente du système non régularisé, en tout cas pour des échelles de longueur beaucoup plus grandes que la maille du réseau $a \sim \Lambda^{-1}$. Ceci nous dit que passé un régime transitoire non-invariant d'échelle où $k \lesssim \Lambda$, toute échelle doit avoir disparu du flot pour $k \ll \Lambda$, hormis justement k : le système initial étant critique et, à grande échelle devant a , apparaissant invariant d'échelle puisque $\xi = \infty$, il ne reste que k comme seule échelle dans le système régularisé.

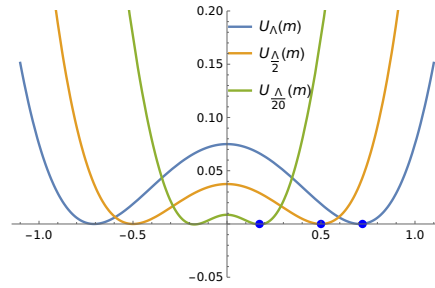


Figure 10: Flot typique du potentiel U_k à la criticalité ($r_0 = r_{0,c}$). La position du minimum du potentiel, marquée par un point, varie avec l'échelle k et se rapproche de l'origine à mesure que k diminue comme dans les cas précédents. Cependant, étant exactement à la criticalité, ça n'est qu'en $k = 0$ que les deux minima parviennent à l'origine. Après un régime transitoire où $k \lesssim \Lambda$, le flot est auto-similaire car plus aucune échelle n'est pertinente pour le flot: Λ est très supérieur à k et ne joue donc plus de rôle et l'inverse de la longueur de corrélation est nulle. On entre alors dans le régime invariant d'échelle. Dans ce régime de $k \ll \Lambda$, le potentiel se déforme mais reste identique à lui même à une dilatation près des deux axes.

Pour comprendre alors ce qui se passe dans le flot, posons-nous la question suivante: qu'est ce qu'un système invariant d'échelle dans lequel on a introduit une longueur étalon $l \sim k^{-1}$? Cette question, pour anodine qu'elle semble être a sa part de subtilité. Imaginons donc que nous soyons dans un vaisseau spatial loin de toute galaxie et que notre monde soit invariant d'échelle (ce qu'il n'est pas en réalité). Dans ce monde, nous pouvons fabriquer une règle qui nous sert d'étalon de longueur nous permettant de mesurer toutes les longueurs de notre monde. Imaginons maintenant que nous discussions par onde radio avec un extra-terrestre à l'autre bout de l'univers. Nous ne pourrions pas lui communiquer la direction dans laquelle pointe notre vaisseau spatial car toutes les directions sont équivalentes dans un univers vide de matière (invariance par rotation), non plus que notre position (invariance par translation). Et nous ne pourrions pas non plus lui communiquer la taille de notre règle étalon puisque par hypothèse notre monde et le sien sont invariants par dilatation: à tout protocole expérimental A, visant à lui communiquer la taille de notre règle, nous pourrions en imaginer un autre, B, où toutes les longueurs seraient changées par un facteur commun et qui aboutirait aux mêmes conclusions physiques. Que notre taille soit de un Angström ou une année-lumière est donc dans ce monde une donnée incommunicable et par conséquent sans intérêt

physique tout comme le sont notre orientation absolue ou notre position absolue dans l'espace.⁴²

Ce qu'il est important de comprendre, c'est qu'à partir de nos explications, notre extra-terrestre pourrait reproduire un vaisseau spatial B en tout point identique à notre vaisseau spatial A, hormis pour sa taille car ce vaisseau serait construit en utilisant un étalon de longueur l_B , qu'il lui est impossible à comparer de façon absolue avec le nôtre de longueur l_A . Par contre, toutes les proportions du vaisseau B seraient bien préservées, c'est à dire tous les rapports entre longueurs: si la longueur de la table du vaisseau A fait $2l_A$, la table du vaisseau B fera $2l_B$. On arrive donc à cette conclusion un peu déroutante: les deux tables de notre exemple précédent ont tout à la fois des longueurs absolues différentes et des longueurs relatives identiques.⁴³ Plus généralement, toute équation vraie dans A où ne figureraient que des longueurs mesurées dans A en unités de l_A serait également valable dans B à condition que les longueurs y soient mesurées en unités de l_B . Dit encore autrement, les équations écrites dans A et dans B ne seraient pas identiques en général si elles mettaient en jeu des longueurs mais elles le deviendraient si elles étaient écrites en fonction de rapports de longueurs, c'est à dire en fonction des longueurs adimensionnées par l_A dans A et adimensionnées par l_B dans B.⁴⁴

Ce long préambule avait comme but de préparer la lectrice à ce qui va maintenant venir: la notion de quantités adimensionnées en termes de k et la notion de point fixe lorsqu'il y a invariance par dilatation.

Remarquons tout d'abord que contrairement à la discussion ci-dessus, en changeant H par $H_k = H + \Delta H_k$ nous n'avons pas fait qu'introduire un étalon de longueur k^{-1} sans influence physique sur l'invariance par dilatation de H : si H est le Hamiltonien d'un système critique, tel n'est pas le cas de H_k lorsque $k > 0$ et l'invariance par dilatation est perdue dans la théorie régularisée. Mais tout comme dans notre exemple ci-dessus, seule l'échelle k a été introduite ce faisant dans H_k . Ainsi, s'il est vrai que l'équation de flot (85) dépend explicitement de k et n'est donc pas la même aux échelles k et k' , tel ne doit plus être le cas pour le flot des quantités adimensionnées en échelle de k . On introduit donc les quantités adimensionnées suivantes:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= k x \\ \tilde{p} &= p/k \\ \tilde{m}(\tilde{x}) &= k^{-\frac{d-2}{2}} m(x) \\ \tilde{U}_k(\tilde{m}(\tilde{x})) &= k^{-d} U_k(m(x))\end{aligned}\tag{86}$$

où les deux premières équations sont triviales et les deux suivantes découlent de Eq. (78) et du fait que $\Gamma_k[m]$ est sans dimension. En fait, il est plus cohérent et plus commode pour la suite d'introduire un "temps de renormalisation", lui aussi adimensionné et défini par $t = \log(k/\Lambda)$ plutôt que de continuer à travailler avec k qui est dimensionné. On définira donc plutôt:

$$\tilde{U}_t(\tilde{m}(\tilde{x})) = k^{-d} U_k(m(x)).\tag{87}$$

⁴²Bien entendu, notre univers n'est pas invariant d'échelle car nous sommes constitués d'atomes qui ont bel et bien des tailles déterminées. Pour autant que nous le sachions, nous ne pouvons pas inventer une expérience B où, par exemple, le rayon de Bohr serait modifié à notre guise: la masse de l'électron semble bien être la même partout dans l'univers et indépendante de tout protocole expérimental. C'est la masse des particules élémentaires qui est à l'origine de la non-invariance par dilatation de notre univers car à partir de cette masse, de $\hbar$ et de la vitesse de la lumière on peut fabriquer une échelle de longueur, la longueur de Compton $\hbar/(mc)$ qui est universelle. Mais le modèle d'Ising n'a que faire de la masse des particules élémentaires et à la criticalité, il apparaît bien invariant d'échelle, en tout cas à des échelles de longueur beaucoup plus grandes que la maille du réseau.

⁴³C'est déroutant, mais c'est une caractéristique générale de toute symétrie. Pour l'invariance par rotation par exemple, les deux vaisseaux spatiaux seraient orientés différemment dans l'espace, mais les positions relatives de tous les éléments internes à chaque vaisseau seraient identiques.

⁴⁴Ce qui précède répond à la question que ce sera peut-être posée la lectrice: l_A est un symbole qui représente une longueur; mais que vaut justement cette longueur si on voulait remplacer le symbole par sa valeur numérique? A priori, la question semble sans réponse puisque pour donner une valeur numérique à l_A , il faudrait mesurer la longueur de la règle étalon et, justement, il n'y a pas de longueur de référence autre que celle de l'étalon. Mais la solution à ce paradoxe est toute simple: l_A vaut 1... en unités de l_A .

On peut réécrire $\Gamma_k^{\text{LPA}}[m]$ en termes de ces variables

$$\Gamma_t^{\text{LPA}}[\tilde{m}] = \int_{\tilde{x}} \left\{ \tilde{U}_t(\tilde{m}(\tilde{x})) + \frac{1}{2} \left(\tilde{\nabla} \tilde{m}(\tilde{x}) \right)^2 \right\} \quad (88)$$

et répéter la dérivation de l'équation de flot du potentiel à la LPA. Il est cependant tout aussi simple d'effectuer le changement de variables directement sur Eq. (85) et de calculer $\partial_t \tilde{U}_t(\tilde{m}) = k \partial_k \tilde{U}_t(\tilde{m})$. Comme d'habitude lorsqu'on effectue ce genre de changement de variables, il faut faire attention que $\partial_{k|m} \neq \partial_{k|\tilde{m}}$. On a:

$$\partial_{t|\tilde{m}} = k \partial_{k|\tilde{m}} = k \partial_{k|m} + k \partial_k m|_{\tilde{m}} \frac{\partial}{\partial m} = k \partial_{k|m} + \frac{d-2}{2} \tilde{m} \frac{\partial}{\partial \tilde{m}} \quad (89)$$

et donc

$$\left(\partial_{t|\tilde{m}} - \frac{d-2}{2} \tilde{m} \frac{\partial}{\partial \tilde{m}} \right) \tilde{U}_t(\tilde{m}) = k \partial_{k|m} (k^{-d} U_k(m)) = -d \tilde{U}_t(\tilde{m}) + k^{1-d} \partial_{k|m} U_k(m) \quad (90)$$

soit

$$\left(\partial_t + d - \frac{d-2}{2} \tilde{m} \frac{\partial}{\partial \tilde{m}} \right) \tilde{U}_t(\tilde{m}) = k^{-d} k \partial_k U_k(m) \quad (91)$$

où il est désormais entendu que les opérateurs ∂_t et ∂_k doivent être calculés dans chaque cas en tenant fixe respectivement $\tilde{m}$ et m et où le membre de droite doit être réécrit en terme de $\tilde{U}_t(\tilde{m})$ pour que l'équation ne fasse intervenir que cette quantité dans les deux membres. En utilisant Eq. (85), on obtient finalement le flot du potentiel adimensionné à la LPA lorsque le régulateur Eq. (83) est utilisé:

$$\partial_t \tilde{U}_t(\tilde{m}) = -d \tilde{U}_t(\tilde{m}) + \frac{d-2}{2} \tilde{m} \tilde{U}_t'(\tilde{m}) + \frac{4vd}{d} \frac{1}{1 + \tilde{U}_t''(\tilde{m})}. \quad (92)$$

Comme annoncé dans la longue discussion ci-dessus, l'échelle k n'apparaît plus explicitement dans cette équation. Elle s'est transmutée en des termes prenant en compte la dimension des différentes quantités mises en jeu: d pour le potentiel et $\frac{d-2}{2}$ pour le champ.⁴⁵

Dans les situations où le potentiel initial définit une théorie critique et où, par conséquent, l'invariance d'échelle émerge à grande distance, c'est à dire pour $t \rightarrow -\infty$, on s'attend à ce que l'évolution du potentiel U_k devienne auto-similaire à petit k , c'est à dire qu'il ne se déforme plus sous l'opération de coarse-graining que conformément à sa dimension. Dit autrement, une fois mesuré en unités de k , le potentiel, $\tilde{U}_t$ donc, ne doit plus évoluer du tout en fonction de l'échelle: $\partial_t \tilde{U}_t(\tilde{m}) = 0$. La solution de cette équation, notée $\tilde{U}^*$, est appelée le potentiel de point fixe du groupe de renormalisation (à la LPA).

On a donc troqué la condition de criticalité pour la condition d'invariance d'échelle (à grande distance) et celle-ci par la condition de point fixe de la théorie régularisée par R_k .⁴⁶ Ceci est très malin d'un point de vue pratique car comme on le verra, cela permet une caractérisation très fine du point critique.

⁴⁵Notons que par une redéfinition de $\tilde{U}_t$ et de $\tilde{m}$, on peut faire disparaître complètement le facteur $4vd/d$ dans l'équation précédente. C'est même conseillé de le faire dans la recherche de solution de cette équation en particulier lorsqu'on fait varier la dimension entre 4 et 2 car alors on évite l'apparition de grands nombres qui peuvent perturber l'analyse numérique.

⁴⁶En termes savants, l'invariance par dilatation se traduit par l'identité de Ward de dilatation sur Γ . La condition de point fixe sur Γ_k , l'annulation du membre de droite de Eq. (92) dans le cas de la LPA, est l'identité de Ward de l'invariance par dilatation sur Γ_k , modifiée par la présence du régulateur et qui devient la vraie identité de Ward de dilatation lorsque le régulateur s'annule, c'est à dire pour $k = 0$.