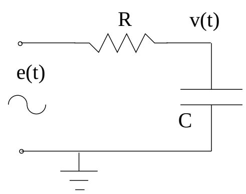
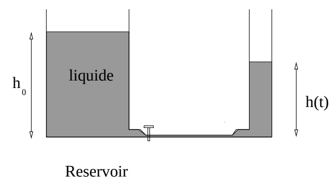
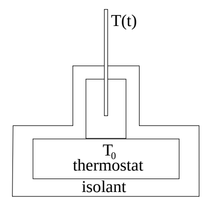
Physique statistique et phénomènes de transport

TD 1

Transfert de la chaleur

I Analogie électrique de la conduction thermique

Nous avons déjà mis en évidence en cours différents aspects de l'analogie entre la conduction de la chaleur et la conduction de l'électricité. Nous allons comparer plus en détail l'échauffement d'un corps en contact avec un thermostat et la charge d'un condensateur dans un circuit RC. Un troisième phénomène qui est analogue aux précédents est le remplissage d'un tube relié, par un tuyau de faible diamètre, à un réservoir d'eau.

Circuit RC	Écoulement hydraulique	Transfert de chaleur
		

Dans l'écoulement hydraulique, il y a un frottement à l'intérieur du tuyau fin. La pression entre l'entrée (1) et la sortie (2) de ce tuyau chute d'une quantité proportionnelle au débit D (phénomène dit de « perte de charge ») : $P_1 - P_2 = B\,D$ où B est un coefficient qui ne dépend que de la géométrie du tuyau et du liquide utilisé. Le réservoir est supposé suffisamment large pour que son niveau reste constant. À $t = 0$, on ouvre le robinet et le tube de droite se rempli peu à peu.

Pour le transfert de chaleur, le thermostat est suffisamment gros pour que sa température T_0 ne change pas (définition d'un thermostat). À $t = 0$, il est mis en contact avec un bloc de métal dont la température est notée $T(t)$. Celui-ci est suffisamment bon conducteur pour que sa température soit toujours uniforme. Par contre, le contact thermique entre le thermostat et le bloc n'est pas très bon. On admet qu'il est équivalent à une couche de conductivité thermique κ et d'épaisseur l suffisamment petite pour que la densité de flux de chaleur j à travers ce contact soit uniforme.

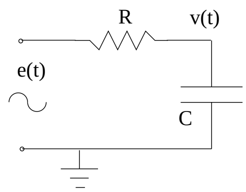
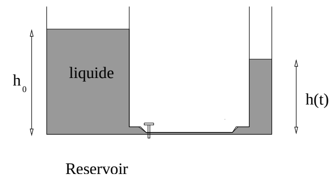
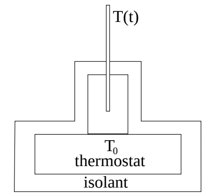
1) Établir l'équation différentielle de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur. On notera $u_0(t)$ la tension en entrée. Quelle est la solution $u(t)$ si la tension en entrée est un créneau d'amplitude E établi à $t = 0$?

2) Quelle est la quantité qui est conservée tout le long du système dans chacun des trois cas ?

3) Établir l'équation différentielle qui décrit l'évolution de la hauteur $h(t)$ dans le cas de l'écoulement. On pensera à utiliser le théorème de Bernouilli.

4) Établir l'équation différentielle qui décrit l'évolution de la température T du bloc.

5) Compléter le tableau suivant.

	Circuit RC	Écoulement hydraulique	Transfert de chaleur
			
Grandeur physique observable	tension $u(t)$ aux bornes du condensateur	hauteur $h(t)$ dans le tube	température $T(t)$ du bloc
Source			
Récepteur			
Organe de transfert			
Quantité conservée			
Équation de conservation			
Équation de transport ou de dissipation			
« Résistance »			
« Capacité »			
Équation différentielle d'évolution			
Constante de temps			
Solution			

6) On place une résistance R' en parallèle à la capacité C du circuit RC. Établir la nouvelle équation différentielle sur u. La résistance R' modifie-t-elle l'évolution dans temps de u en réponse à un signal en créneau ?

7) En faisant l'analogie avec la décharge d'une ligne RC chargée, puis isolée, puis fermée au bout par une résistance, expliquer pourquoi on se brûle en touchant le moule à tarte sortant du four mais que l'on peut toucher la tarte.

II Transfert de la chaleur en géométrie cylindrique

On considère un cylindre troué dans le sens longitudinal, de rayon interne r_1, de rayon externe r_2 et de longueur $L \gg r_2$. On s'intéresse à la conduction de la chaleur à travers une direction radiale du cylindre. La paroi interne est maintenue à la température fixe T_1 et celle externe est maintenue à la température fixe T_2 : on ne s'intéressera donc qu'au régime stationnaire.

1) Écrire la loi de Fourier en coordonnées cylindriques.

2) On considère deux surfaces cylindriques de rayons r et $r + dr$, entre r_1 et r_2. En fonction de $\frac{\partial T}{\partial r}$, écrire l'expression du flux de chaleur à travers chacune. On fera un développement limité à l'ordre 1 en dr pour calculer le flux en $r + dr$.

3) Dans le cas où il n'y a pas de source de chaleur supplémentaire, établir l'équation différentielle qui détermine la variation de la température le long de la direction radiale. Résoudre.

4) Calculer la densité de flux de chaleur j le long de la direction radiale.

III Transfert de la chaleur à travers des objets composés

L'analogie avec la conductivité électrique peut être exploitée pour obtenir les propriétés conductrices de chaleur d'objets composés.

Prenons une paroi composée de deux couches d'épaisseurs L_1 et L_2, conductivités thermiques k_1 et k_2, et avec la même surface A. La surface externe à gauche est maintenue à une température fixe T_1 tandis que la surface à droite est maintenue à une autre température fixe T_3. On est donc en régime stationnaire. L'interface entre les deux couches sera à une température T_2 qu'on déterminera.

1) Est-ce un système en série ou en parallèle ?

2) Calculer la résistance thermique de la paroi composée.

3) En utilisant l'analogie électrique, calculer la température T_2 à l'interface ainsi que le flux de chaleur j traversant l'ensemble.

4) Déterminer la température $T(x)$ en tout point et vérifier que la loi de Fourier est bien suivie.