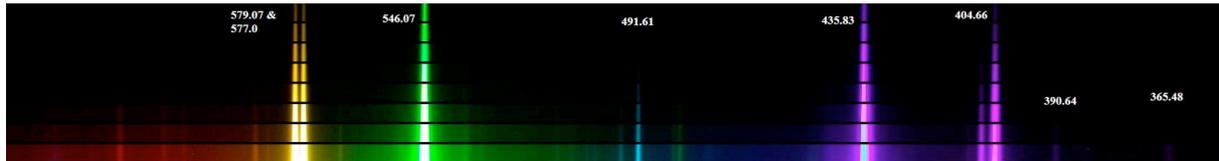


Travaux Pratiques N°3

Raie d'émission atomique

Introduction : le problème physique

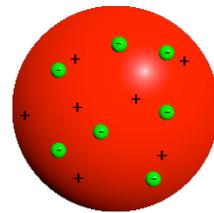
Dans une lampe à décharge où dans un tube fluorescent (qu'on trouve couramment dans le commerce) la lumière est produite par une décharge électrique dans un gaz contenu dans l'ampoule. L'analyse spectroscopique de la lumière émise par une telle lampe (obtenue par exemple grâce à un spectroscopie à prisme ou à réseau) permet de décomposer cette lumière selon ses différentes composantes en termes de fréquence (ou pulsation), d'énergie, ou encore de longueur d'onde des photons associés. Le *spectre d'émission* suivant a été obtenu avec une lampe à mercure (les différentes lignes horizontales dans l'image correspondent à des différents temps d'exposition photographique). En blanc sont notées les longueurs d'onde λ correspondantes aux différentes raies.



En comparant avec le spectre continu de la lumière visible, on comprend que les atomes de mercure émettent de la lumière seulement par bandes étroites autour de longueurs d'onde particulières. L'ensemble de ces longueurs d'onde est caractéristique de l'atome et représente son spectre d'émission.

D'un point de vue quantique, la décharge électrique excite les électrons dans les atomes de mercure en les portant sur des orbitaux plus énergétiques. Ces états excités ont une certaine durée de vie finie, après laquelle l'électron retombe dans son état fondamental avec émission d'un photon. La fréquence ν du photon émis est déterminée par la différence d'énergie $E = E_2 - E_1$ entre les deux états, par la relation : $E = h\nu$. La largeur de la bande émise dépend, elle, de la durée de vie du niveau excité.

Nous allons utiliser ici un modèle classique et très simplifié (mais peu réaliste !) pour décrire ce phénomène. On peut donner une interprétation simple de l'émission en considérant l'**atome de Thompson**. Dans ce modèle, l'atome est composé d'une sphère chargée positivement de manière uniforme, de rayon R , dans laquelle les électrons sont plongés «comme des pruneaux dans un far» (d'où son nom alternatif de «plum pudding model»). Les électrons sont ici des objets ponctuels de masse m_e et charge e .



Pour simplifier le problème, considérons le cas d'un seul électron (atome d'hydrogène). À l'intérieur de la sphère uniformément chargée, le champ électrique est toujours radial et dépend linéairement de la distance r au centre (théorème de Gauss). L'électron est donc lié au centre de la sphère par une force de rappel harmonique :

$$\vec{F} = -e\vec{E} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} = -k\vec{r}$$

Dans ce modèle l'électron se comporte donc comme un oscillateur : déplacé de sa position d'équilibre (son « état fondamental »), son mouvement sera oscillatoire, le long de l'axe défini par son déplacement initial ; on pourra donc se restreindre à une seule direction x dans l'espace et définir la position de l'électron comme $x(t)$.

Pour modéliser l'émission de lumière observée dans une lampe spectrale, il faudra introduire un mécanisme de dissipation de l'énergie : l'électron, en oscillant, perd à petit son énergie, jusqu'à revenir à sa position d'équilibre, au centre de la sphère. On peut modéliser cette dissipation en introduisant un terme de dissipation dans l'équation différentielle qui décrit la dynamique de l'électron, qui devient alors :

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec γ le coefficient d'amortissement, et $\omega_0^2 = \frac{k}{m_e} = \frac{e^2}{4\pi m_e \epsilon_0 R^3}$.

L'atome se comporte alors comme un dipôle oscillant, $\vec{p} = ex(t)\vec{u}_x$, et est donc source de rayonnement électromagnétique. L'onde électromagnétique émise par le dipôle est donc proportionnelle au mouvement de l'électron, $x(t)$. Nous supposons donc que l'intensité de la lumière émise soit $I(t) = C x(t)$, où la constante C prend en compte différents facteurs géométriques et physiques que nous ne calculerons pas.

Dans ce TP, nous allons étudier le mouvement d'une charge liée élastiquement et soumise à frottement comme dans l'atome de Thompson, et donc de la lumière émise. Nous allons faire une analyse spectrale du mouvement de la charge, définir son spectre d'énergie, le comparer à une expression analytique (la loi Lorentzienne) et enfin à des données réels.

Rappel des constantes utiles: $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ (S.I.), $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ (S.I.), $c = 299792458$ (S.I.).

A. Etude du mouvement d'un atome dans le modèle de Thompson

La solution (pour γ petit devant ω_0) de l'équation différentielle décrivant le mouvement de l'électron dans l'atome de Thompson est :

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_0 t)$$

où x_0 est la position initiale. Nous allons d'abord représenter ce signal et voir l'influence des paramètres de l'équation sur son allure.

1. Estimer la valeur de ω_0 pour un atome : on prendra R de l'ordre du rayon atomique (quelques Å). Déterminer la fréquence f_0 correspondante.
2. On prendra, pour commencer, un amortissement γ égale à $0,1 \cdot \omega_0$. Il faut choisir la meilleure manière de représenter (échantillonner) le signal : pour cela, estimer la période T_0 d'oscillation de l'électron, puis prendre un pas de temps $\Delta t = T_0/20$. Estimer maintenant le temps τ caractéristique de la décroissance exponentielle, puis prendre une durée totale $T_e = 30 \tau$. Quel est le nombre de points N résultant pour l'échantillonnage du signal ? ¹
3. Tracer $x(t)$ en fonction du temps (N points) exprimé en secondes (ou une unité multiple) et décrire son allure.
4. Modifier maintenant le coefficient d'amortissement γ et observer comment le signal $x(t)$ en est modifié, puis faire la même chose en modifiant (raisonnablement) la pulsation propre ω_0 . Il peut être utile de tracer différentes courbes sur un même graphe pour les comparer. Utiliser la fonction *zoom* pour mieux visualiser les signaux.

B. Analyse spectrale du signal

La transformée de Fourier (TF) permet de décomposer le signal $x(t)$ en composantes spectrales.

Pour obtenir et tracer la TF, on définira d'abord la résolution en fréquence Δf , la fréquence d'échantillonnage f_e , et le vecteur fréquence correspondant (en Hz). Combien de points contient ce vecteur ?

On calculera donc la *Fast Fourier Transform* (FFT) du signal (commande scilab `fft`), et on en déduira sa TF (en unités homogènes à $[x] \cdot s$).

On rappelle aussi que le spectre obtenu par FFT est périodique : l'intervalle $[f_e/2, f_e]$ est identique à l'intervalle $[-f_e/2, 0]$.

1. Déterminer d'abord la résolution en fréquence Δf , la fréquence d'échantillonnage f_e , à partir des données sur l'échantillonnage de x . Calculer le vecteur fréquence f (contenant N point) et le vecteur pulsation ω .
2. Déterminer numériquement la TF de $x(t)$, $X(f)$, et tracer son module en fonction de la pulsation ω . On pourra éventuellement tracer seulement la première moitié du spectre (entre 0 et $f_e/2$).
3. Observer l'influence le coefficient d'amortissement γ puis de la fréquence propre ω_0 sur le spectre. Utiliser la fonction *zoom* pour mieux visualiser les spectres.
4. Expliquer les résultats observés. Comment peut-on expliquer la forme piquée de la courbe ?

¹ Le nombre N devrait être une puissance de 2 pour que la FFT soit effectivement rapide, mais nous négligerons cette recommandation pour ce TP.

C. Spectre d'énergie du signal et loi Lorentzienne

Le *théorème de Parseval* permet d'écrire l'énergie totale du signal comme l'intégrale de l'énergie associée à chaque composante harmonique $\omega = 2\pi f$ dans la décomposition spectrale :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Le module carré de la TF, $|X(f)|^2$, représente donc la *densité spectrale d'énergie* (ou *spectre d'énergie*) du signal, et donc aussi de l'onde électromagnétique émise. Lors de l'analyse spectroscopique de cette lumière, on mesure justement l'énergie émise par rayonnement en fonction de la fréquence : l'intensité lumineuse $I(\omega)$ mesurée sera donc proportionnelle à la densité spectrale d'énergie : $I(\omega) \propto |X(\omega)|^2$.

Pour pouvoir comparer notre modèle à des spectres d'émission électromagnétique $I(\omega)$ nous allons donc définir et étudier la densité spectrale d'énergie du signal.

1. Tracer la densité spectrale d'énergie du signal en précisant ses unités, en fonction de la pulsation (en Hz ou unité multiple).
2. Le calcul analytique de la TF du signal $x(t)$ (suivi par une approximation valable près du pic) permettent d'obtenir une courbe analytique typique pour le spectre d'énergie observé, appelée *Lorentzienne* :

$$|X(\omega)|^2 = \frac{x_0^2}{4} \frac{1}{\frac{\gamma^2}{4} + (\omega - \omega_0)^2}$$

Vérifier que la forme de la densité spectrale d'énergie obtenue suit bien une loi Lorentzienne en traçant cette fonction analytique sur le même graphe. Attention : la courbe Lorentzienne, écrite comme ci-dessus, donne seulement la raie correspondante à $+\omega_0$.

D. Comparaison à des données spectroscopiques

Les données du fichier **Hg.dat** (disponibles sur la page web de l'UE LP342) sont le résultat de la mesure par spectroscopie de l'intensité lumineuse *relative*, $I(\lambda)/I(\lambda_0)$, de la raie spectrale de longueur d'onde $\lambda_0 = 404.6$ nm d'une lampe à mercure (visible, dans le violet, sur l'image de l'introduction), en fonction de la longueur d'onde *relative*, $\lambda - \lambda_0$, exprimée en nm.

1. Lire les données du fichier (commande scilab `read`), puis les transformer pour obtenir une intensité relative en fonction de la pulsation (non relative) ω de l'onde électromagnétique. Tracer cette intensité.
2. Estimer la valeur de l'amortissement γ en traçant une courbe Lorentzienne (*normalisée*) qui passe approximativement par les points expérimentaux. (Pour tracer une courbe lisse, redéfinir le vecteur des abscisses plutôt qu'utiliser les mêmes points du fichier des données).
3. Que vaut γ ? Que vaut $\Delta\omega$? La comparer à la pulsation ω_0 correspondante au centre de la bande.
4. Que peut-on dire de la durée (et de la longueur) du train d'onde associé au photon émis ?