

## Travaux Dirigés N°7

### Signaux aléatoires

#### I. Filtrage d'un bruit blanc

- 1) Soit  $b(t)$  un bruit blanc de densité spectrale de puissance  $\gamma_b / 2$ .
  - a) Tracez  $\varphi_{bb}(\tau)$ , la fonction d'autocorrélation de  $b(t)$ , et  $S_{bb}(\nu)$  sa DSP (NB :  $\nu = \omega / 2\pi$  représente la fréquence).
  - b) Que vaut sa variance ?
  
- 2) Ce bruit est transmis dans un filtre de réponse impulsionnelle  $h(t) = \frac{1}{\Delta t} \text{Rect}(t / \Delta t)$  et on note  $x(t) = b(t) * h(t)$  le signal à la sortie du filtre.
  - a) Exprimez  $\varphi_{xx}(\tau)$  la fonction d'autocorrélation, déterminez la durée de corrélation et la variance du signal à partir de  $\varphi_{xx}(\tau)$ , et tracez  $\varphi_{xx}(\tau)$ .
  - b) Exprimez  $S_{xx}(\nu)$ , la DSP du signal, déterminez la largeur du spectre et tracez  $S_{xx}(\nu)$ . Déduisez-en la variance du signal.

#### II. Analyse d'un signal en présence de bruit

On mesure un signal  $y(t)$  composé de deux signaux aléatoires  $x(t)$  et  $b(t)$  :  $y(t) = x(t) + b(t)$ . Le signal  $x(t)$  représente une grandeur physique dont on veut caractériser la variance. C'est un signal basses fréquences. Le signal  $b(t)$  est un bruit large bande qui vient perturber la mesure.

- 1) On assimile  $b(t)$  à un bruit blanc de DSP :  $S_{bb}(\nu) = \gamma_b / 2$ , et  $x(t)$  à un signal aléatoire de DSP :
 
$$S_{xx}(\nu) = \frac{\gamma_x}{2} \text{Rect}(\nu / 2B), \text{ où } B \text{ représente sa largeur de bande.}$$
  - a) Exprimez la variance  $\sigma_x^2$  de  $x(t)$  en fonction de  $\gamma_x$  et  $B$ .
  - b) Tracez les fonctions d'autocorrélation :  $\varphi_{xx}(\tau)$  et  $\varphi_{bb}(\tau)$  et les DSP :  $S_{xx}(\nu)$  et  $S_{bb}(\nu)$ .
  - c) Exprimez  $\varphi_{yy}(\tau)$ ,  $S_{yy}(\nu)$  et  $\sigma_y^2$  à partir des fonctions de corrélations et DSP de  $x(t)$  et  $b(t)$ .
  
- 2) On échantillonne les signaux avec un pas d'échantillonnage  $\Delta t$  tel que  $f_e = \frac{1}{\Delta t} \gg B$ . Les signaux sont filtrés avant échantillonnage (fréquence de coupure à  $f_e / 2$ ).
  - a) Tracez les fonctions d'autocorrélation et les DSP des signaux échantillonnés  $x_n$  et  $b_n$ .
  - b) Exprimez la variance  $\sigma_b^2$  du bruit échantillonné en fonction de  $\gamma_b$  et  $\Delta t$ .
  
- 3) Montrez que l'on peut estimer  $\sigma_x^2$  à partir de la mesure de  $y(t)$  à l'aide des deux méthodes suivantes :
  - a) en interpolant  $\varphi_{yy}(\tau)$  en  $\tau = 0$  à partir des points  $\tau \neq 0$
  - b) en interpolant  $S_{yy}(\nu)$  aux basses fréquences.