Mesures Physiques

Travaux dirigés n°5. Résolution d'équations différentielle par transformation de Laplace.

I. Equations différentielles

Résolvez les équations différentielles suivantes en utilisant la transformée de Laplace :

1. $y'' + 4y' + 3y = 0$ avec $y(0)=3$ et $y'(0)=1$
2. $y'' + 3y' + 2y = \delta(t-t_0)$ avec $y(0)=0$ et $y'(0)=0$

II. Réactions en chaîne

Deux réactions chimiques du premier ordre décomposent successivement une espèce A en une espèce B avec une constante de vitesse k_1, puis l'espèce B en une espèce C avec une constante de vitesse k_2 ($k_2 \neq k_1$).

On étudie l'évolution des concentrations de ces trois espèces, notées respectivement a(t), b(t) et c(t) lorsqu'à t=0 la réaction s'initie avec une concentration A_0 pour l'espèce A et des concentrations nulles pour B et C.

1. La vitesse à laquelle l'espèce A diminue est simplement proportionnelle à sa concentration. L'équation différentielle à laquelle obéit a(t) est donc :

$$\frac{da(t)}{dt} = -k_1 a(t)$$

Montrez par intégration directe que sa solution est $a(t)=A_0.\exp(-k_1 t).\Gamma(t)$

2. La concentration de l'espèce B est augmentée par la décomposition de A et diminuée par sa transformation en C. En déduire l'équation différentielle qui régit b(t).
3. Identifiez, dans cette équation, la sollicitation du système (ou 'signal d'entrée') et sa réponse (ou 'signal de sortie'). Par transformation de Laplace, déterminez la transmittance $H_b(p)$ de ce système.
4. En utilisant l'expression de a(t), déterminez l'évolution temporelle de la concentration de B : b(t).
5. Quelle est l'équation différentielle qui régit l'évolution de la concentration c(t) ?
6. Identifiez à nouveau les sollicitation et réponse du système dans cette équation et en déduire l'expression de la nouvelle transmittance $H_c(p)$.
7. Déterminez c(t) en utilisant les résultats précédents.
8. Tracez sur un même graphe les évolutions a(t), b(t) et c(t) en choisissant $k_1=1s^{-1}$ et $k_2=2s^{-1}$.

III. Chaîne de masses liées par des ressorts.

Soient trois masses m semblables reliées deux à deux par des ressorts identiques, de longueurs au repos a et de raideur k. Les masses peuvent se déplacer seulement selon un axe que l'on repérera par (Ox). Tous les frottements seront négligés.

A un instant t, les déplacements des masses par rapport à leur position d'équilibre sont respectivement notés $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$. En choisissant la position d'équilibre de la troisième masse comme origine de l'axe (Ox), les abscisses des masses à l'instant t sont respectivement $u_1(t)-2a$, $u_2(t)-a$ et $u_3(t)$.

Les masses étant au repos, on donne à l'instant t=0 à la troisième masse une impulsion de force $F=F_0\delta(t)$ où F_0 désigne une constante positive.

1. Déterminez les équations différentielles auxquelles obéissent les déplacements des masses.
2. Déterminez l'évolution des déplacements relatifs $u_3(t)-u_2(t)$ et $u_2(t)-u_1(t)$ à l'aide des transformées de Laplace.