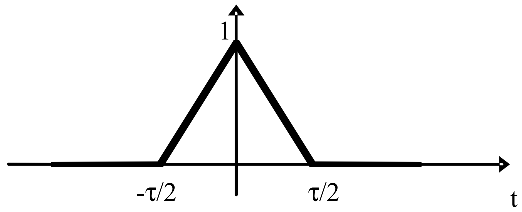
# Mesures Physiques

## Travaux dirigés n°4. Echantillonnage. Résolution d'équations différentielles.

I. Echantillonnage d'une Transformée de Fourier.

Soit le signal triangulaire à temps continu x(t) défini par le graphe suivant :




1. Calculez sa transformée de Fourier et représentez son spectre.
2. Déterminez l'expression des zéros de sa TF : $\omega_k$.

On réalise un échantillonnage signal x(t) avec un pas d'échantillonnage $\Delta t$. L'échantillonnage est tel que la largeur du spectre $\omega_L = \omega_1$, où $\omega_1$ désigne le premier zéro du spectre.

3. Que vaut dans ce cas le pas d'échantillonnage $\Delta t$ ?
4. Représentez le signal échantillonné et son spectre.
5. Que devient ce spectre pour $\Delta t=\tau/8$ ?
6. Afin d'éviter le repliement de bande, le signal est filtré avant l'échantillonnage (toujours avec le pas $\Delta t=\tau/8$ ). Exprimez la pulsation de coupure de ce filtre en fonction de $\omega_1$ et représentez le spectre du signal après échantillonnage.

II. Résolution d'équations différentielles par Transformation de Laplace.

Soit y(t) une fonction définie pour $t\geq 0$. Résolvez les équations différentielles suivantes en utilisant la transformation de Laplace :

1. $y'' + 4y' + 3y = 0$ avec $y(0)=3$ et $y'(0)=1$
2. $y'' + 3y' + 2y = \delta(t-t_0)$ avec $y(0)=0$ et $y'(0)=0$

III. Réactions en chaîne

Deux réactions chimiques du premier ordre décomposent successivement une espèce A en une espèce B avec une constante de vitesse $k_1$, puis l'espèce B en une espèce C avec une constante de vitesse $k_2$ ($k_2 \neq k_1$). On étudie l'évolution des concentrations de ces trois espèces, notées respectivement a(t), b(t) et c(t) lorsqu'à t=0 la réaction s'initie avec une concentration $A_0$ pour l'espèce A et des concentrations nulles pour B et C.

1. La vitesse à laquelle l'espèce A diminue est simplement proportionnelle à sa concentration. L'équation différentielle à laquelle obéit a(t) est donc :

$$\frac{da(t)}{dt} = -k_1 a(t)$$

Montrez par intégration directe puis par transformation de Laplace que sa solution est :

$$a(t)=A_0.\exp(-k_1 t).\Gamma(t)$$

2. La concentration de l'espèce B est augmentée par la décomposition de A et diminuée par sa transformation en C. En déduire l'équation différentielle qui régit b(t).
3. Identifiez, dans cette équation, la sollicitation du système (ou 'signal d'entrée') et sa réponse (ou 'signal de sortie'). Par transformation de Laplace, déterminez la transmittance $H_b(p)$ de ce système.
4. En utilisant l'expression de a(t), déterminez l'évolution temporelle de la concentration de B : b(t).
5. Quelle est l'équation différentielle qui régit l'évolution de la concentration c(t) ?
6. Identifiez à nouveau les sollicitation et réponse du système dans cette équation et en déduire l'expression de la nouvelle transmittance $H_c(p)$.

7. Déterminez c(t) en utilisant les résultats précédents et tracez sur un même graphe les évolutions a(t), b(t) et c(t) en choisissant $k_1=1s^{-1}$ et $k_2=2s^{-1}$.