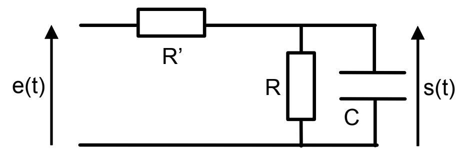
Examen du 24 janvier 2005.

Durée : 2h.
Aucun document autorisé. Téléphones portables éteints.
Calculatrices type collège, non graphiques et non programmable autorisées.
Document fourni : dictionnaire des transformées de Fourier et Laplace.
Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1. Filtre.

Considérer le circuit suivant :



a. Ecrire l'équation différentielle qui relie la tension de sortie $s(t)$ à la tension d'entrée $e(t)$.

b. - Déterminer la réponse du circuit à un signal d'entrée échelon, $e(t)= E_0\, \Gamma(t)$, en utilisant la transformée de Laplace pour résoudre l'équation différentielle trouvée.
- Tracer $e(t)$ et $s(t)$.
- Vérifier la solution trouvée par un raisonnement simple, en se plaçant dans la limite appropriée.

c. On considère maintenant le régime harmonique : évaluer la transmittance du circuit $H(\omega)$ et tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase).

Exercice 2. Echantillonnage.

On considère le signal $x(t) = e^{-at}\, \Gamma(t)$.

a. Tracer le signal et le module de sa transformée de Fourier, en évaluant les fonctions en quelques points significatifs.

b. Le signal est échantillonné avec un pas temporel $\Delta t=1/(2a)$ et sur une durée de $T_e=10/a$. Calculer la fréquence d'échantillonnage f_e, la résolution en fréquence Δf et le nombre de points N (pour une analyse par FFT). Tracer le signal échantillonné et son spectre discret (obtenu par FFT). Pour simplifier les calculs, on pourra prendre $2\pi \sim 6$.

c. Qu'est-ce qu'on aurait trouvé avec un pas d'échantillonnage $\Delta t=1/a$ et la même durée T_e ? Sans faire de calculs, tracer l'allure du spectre discret qu'on obtiendrait dans ce cas.

Exercice 3. Signaux aléatoires.

a. Le signal aléatoire $x(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance (DSP) constante et égale à γ. Exprimer et tracer la fonction d'auto-corrélation $\psi_{xx}(\tau)$. Tracer $S_{xx}(f)$, la DSP de $x(t)$ en fonction de la fréquence f. Que vaut σ_x^2, la variance de $x(t)$?

b. On considère un filtre passe-bas idéal, caractérisé par sa transmittance $H(f)$:
$H(f) = 1$ pour $f < f_0$ et
$H(f) = 0$ pour $f > f_0$.
Le filtre est utilisé pour filtrer le signal $x(t)$. On appellera $y(t)$ le signal filtré. Comment exprime-t-on la DSP $S_{yy}(f)$ du signal filtré en fonction des propriétés de $x(t)$ et de celles du filtre ? Tracer $S_{yy}(f)$.

c. En déduire $\psi_{yy}(\tau)$ et la tracer.

d. Calculer la variance de y(t), σ_y^2, en fonction des paramètres donnés.