Équation de la chaleur

MARIA BARBI (29 NOVEMBRE 2004)

L'équation de la chaleur

On pourra voir une introduction générale à l'équation de la chaleur et aux analogie avec d'autres phénomènes de transport à la page web :

`http ://www.entp.edu.dz/coursonligne/cours1/Chap8.pdf`

Voir aussi, par exemple, les textes suivants :
Benedek-Villars, *Physics with illustrative examples from medicine and biology - Statistical Physics*,
Bouyssy, Davier, Gatty, *Physique pour les sciences de la vie, Vol. 2 - La matière*

PROJET

Solution générale

Moyennant le choix de variables sans dimension, l'équation de la chaleur (à une dimension) peut s'écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0\,,$$

où $u(x,t)$ représente la température du point x d'un barreau à l'instant t. À l'instant initial on se donne la distribution des températures $u(x,0) = \phi(x)$. Soit :

$$\hat{u}(k,t) = \mathcal{F}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi jkx} u(x,t)dx$$

la transformée de Fourier de la solution $u(x,t)$ *par rapport à* x (t est ici un paramètre). Intégrer l'équation différentielle que $\hat{u}$ satisfait. Commenter. Trouver ensuite $u(x,t)$: l'exprimer en fonction de $\phi(x)$ et essayer d'expliquer le résultat obtenu.

Une solution particulière

Expliciter le calcul pour

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2}\,.$$

À quelle situation initiale correspondrait la limite $\alpha \to \infty$? Expliciter la solution dans ce cas.

Simulation numérique

À l'aide des résultats obtenus, écrire un programme pour calculer numériquement la solution $u(x,t)$ à l'instant t pour une condition initiale $\phi(x)$ quelconque. Utiliser ce programme pour tracer l'évolution de la température dans une barreau à temps différents et ainsi simuler sa mise à l'équilibre. On pourra faire l'exercice pour des différentes conditions initiales.