

Partie III - Prévoir

Chapitre 9

Transformée de Laplace (TL)

9.1 Généralisation de la TF : la transformée de Laplace

Dans les derniers chapitres nous avons réussi à définir des transformées de Fourier pour des fonctions pour lesquelles en principe la TF n'est pas définie, avec des passages au limite et grâce à l'introduction de fonctions généralisées ou distributions, en particulier la distribution delta de Dirac. Cependant, il est très utile de pouvoir généraliser un peu l'opération de transformation de Fourier pour pouvoir définir de manière directe une transformée pour une classe plus grande de fonctions, qui ne sont pas à carré sommable. Les avantages de cette généralisation deviendront clairs dans les chapitres 10 et 11, où nous verrons comment elle permet d'abord de définir la transformée des dérivées d'une fonction de manière simple, puis, par conséquent, de définir une méthode très efficace pour résoudre une EDL pour n'importe quelle fonction d'entrée.

Considérons donc maintenant le cas de fonction qui ne sont pas à carré sommable, et essayons de trouver une généralisation de la transformée de Fourier. Si la fonction n'appartient pas à $L^2(\mathbb{R})$, le problème est que l'intégrale dans la définition de TF (6.6) diverge, et on ne peut donc pas la calculer. C'est que la fonction ne tombe pas à zéro assez rapidement pour $t \rightarrow \pm\infty$.

L'idée est alors de rendre la fonction à carré sommable en lui "coupant" la partie $t \rightarrow \pm\infty$ par une exponentielle décroissante. Plutôt que de limiter la durée du signal en la multipliant par une fonction rectangle, qui donne une coupe nette, on va donc l'envoyer à zéro plus doucement, mais de manière suffisamment rapide, en la multipliant par une exponentielle. Evidemment, il faut encore voir si ceci est suffisant pour la rendre à carré sommable : si la fonction croit trop rapidement ou bien si elle diverge à la fois pour $t \rightarrow -\infty$ et $t \rightarrow +\infty$, la méthode peut faillir.

Plus formellement, soit $x(t) \notin L^2(\mathbb{R})$ une fonction quelconque. Si il existe un $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-\alpha t}| dt < \infty \quad \text{pour tout } \alpha > \alpha_0,$$

alors $TF[x(t)e^{-\alpha t}]$ existe et, par définition, est donnée par

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt.$$

Ce résultat nous montre qu'on peut parfois obtenir la TF de la fonction "coupée" $x(t)e^{-\alpha t}$ là où celle de $x(t)$ n'existe pas. Cette opération n'est bien sûr pas la même que de faire une simple TF, mais permet tout de même de "projeter" la fonction sur la base (continue) des fonctions $e^{-i\omega t}$, et donc d'avoir une idée de sa décomposition spectrale. On choisit alors de définir une nouvelle opération de décomposition comme suit.

9.1.1 Définition de TL et TL inverse

Pour une fonction $x(t)$, on définit¹ sa **transformée de Laplace**,

$$X_L(p) = TL[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt \quad \text{TL de } x(t) \quad (9.1)$$

$$\text{où } p = \alpha + i\omega \in \mathbb{C}. \quad (9.2)$$

La TL est donc une fonction de la **variable complexe** $p = \alpha + i\omega$; elle existe si on peut trouver des α pour lesquels l'intégrale est convergente, c'est-à-dire que

la TL existe pour $\alpha \in \Sigma$, où Σ est appelé **intervalle d'existence** : d'après ce que nous avons vu Σ est l'ensemble des $\alpha > \alpha_0$. Si Σ est vide, on ne peut pas définir la TL du signal.

Comme pour la TF, l'application peut être inversée :

Pour $\alpha \in \Sigma$ la TL inverse existe est donnée $x(t)$:

$$x(t) = TL^{-1}[X_L(p)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} X_L(p) e^{pt} dp \quad \text{TL inverse.} \quad (9.3)$$

Le calcul de la TL inverse s'avère donc difficile d'un point de vue mathématique : il faut intégrer dans le plan complexe, sur la variable p qui se déplace le long de la droite $\text{Re}(p) = \alpha$. De plus, il faut toujours faire attention au domaine de définition... C'est en effet très délicat ! De plus, d'après sa définition, la TL d'un signal est une fonction de la variable complexe p . Comment faut-il donc la représenter ? Comment lui associer la notion de spectre, concrètement ?

Heureusement, on dispose de quelques *outils pratiques* qui vont nous faciliter la tâche. Il s'agit de la relation entre TL et TF, du dictionnaire des TF et TL, et des propriétés de ces opérations. Nous allons maintenant les décrire.

¹Attention : une définition différente, appelée transformée de Laplace *monolatère* et définie par $\int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt$, est parfois utilisée. Comme on s'intéresse très souvent à des signaux nuls pour $t < 0$, les deux définitions peuvent être considérées comme équivalentes, mais il faut faire attention pour tous les signaux définis sur tout \mathbb{R} .

9.1.2 Relation entre TF et TL

On montre la propriété suivante :

Si $\alpha = 0 \in \Sigma$, alors la TL calculée pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire pour $p = i\omega$, coïncide avec la TF :

$$\begin{array}{l} X_L(p)|_{p=i\omega} = X(\omega) \\ \text{(TL)} \qquad \qquad \text{(TF)} \end{array} \quad (9.4)$$

La TL est donc plus générale que la TF mais elle coïncide avec la TF pour les fonctions ou la TF existe. Pour nous, c'est cela qui est important. Pour calculer un spectre, on aura toujours recours à la TF. D'autre part, la TL peut être calculée pour une classe beaucoup plus grande de fonctions, et en particulier pour les fonctions constantes, les fonctions harmoniques, et aussi pour un grand nombre des signaux dits **causals**, c'est-à-dire tels que

$$x(t) \neq 0 \quad \text{seulement pour } t > 0 \quad (\text{signal causal})$$

pour lesquels la TF n'est pas en principe définie ou est définie seulement par un passage au limite qui fait intervenir des distributions. Dans tous ces cas, on pourra se servir de la TL.

En pratique, on aura affaire à dans deux cas différents :

- Soit on s'intéresse au spectre d'un signal d'énergie finie : dans ce cas, la TF existe, et on pourra définir le spectre directement par la TF, ou bien passer par la TL pour en déduire la TF et donc le spectre.
- Soit on s'intéresse à la réponse d'un système physique à un signal en entrée : Dans ce cas, comme on le verra un peu plus loin, il n'est pas tant important d'analyser le spectre quant de disposer d'une méthode pour faire la décomposition en composantes harmoniques : le TL sera alors parfaitement adaptée à nos besoins et on va l'utiliser de manière préférentielle, sans se soucier de pouvoir en déduire la TF, vue sa généralité.

9.2 Calculer des TL

9.2.1 Deux exemples : TL de la fonction rectangle et de la fonction échelon

Comme premier exemple, essayons de calculer la TL d'une fonction à carré sommable, la fonction rectangle

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 \quad \text{pour } -T \leq t \leq T, \quad 0 \text{ ailleurs} \\ &= x_0 \text{Rect}(t/T); \end{aligned} \quad (9.5)$$

dont nous avons déjà calculé la TF. Selon la définition de TL, nous avons

$$\begin{aligned} TL[x_1(t)] = X_{L1}(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)e^{-pt} dt = \int_{-T}^{+T} x_0 e^{-pt} dt = \\ &= -x_0 \frac{1}{p} [e^{-pt}]_{-T}^{+T} = -x_0 \frac{e^{-pT} - e^{+pT}}{p} = \\ &= x_0 2i \frac{\sin(pT/i)}{p} = x_0 2iT \frac{\sin(pT/i)}{pT} = x_0 2T \operatorname{sinc}(pT/i). \end{aligned}$$

L'intervalle d'existence de cette TL est $\Sigma = \mathbb{R}$, car l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)e^{-pt} dt$ existe pour $p = \alpha + i\omega$ avec tout α réel. $\alpha = 0$ appartient donc à l'intervalle d'existence, et on a

$$TF[x_1(t)] = X_1(\omega) = TL[x_1(t)]|_{p=i\omega} = X_{L1}(i\omega) = x_0 2T \operatorname{sinc}(\omega T),$$

en accord avec ce que nous avons trouvé précédemment.

Calculons maintenant la TL d'une fonction pour laquelle la TF n'est pas définie au sens des fonctions, et en particulier une fonction qui va nous intéresser très souvent par la suite : la fonction **échelon** (ou **fonction de Heaviside**) :

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \quad \text{fonction échelon.} \quad (9.6)$$

On a

$$TL[\Gamma(t)] = X_L^\Gamma(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} 1 e^{-pt} dt$$

cette intégrale existe, si $p = \alpha + i\omega$, pour $\alpha > 0$: on a donc $\Sigma = \mathbb{R}^+$. Dans ces conditions, on obtient

$$TL[\Gamma(t)] = X_L^\Gamma(p) = -x_0 \frac{1}{p} [e^{-pt}]_0^{+\infty} = -\frac{0 - 1}{p} = \frac{1}{p}. \quad (9.7)$$

9.2.2 Dictionnaire et propriétés des TL

Le *dictionnaire* de l'annexe A contient aussi, pour chaque fonction $x(t)$, sa TL, notée $\mathcal{L}(x(t))$, et son intervalle de validité (notre Σ). Il y a une différence de notation à remarquer dans le dictionnaire, qui est que la variable complexe p est ici appelée s :

$$p = \alpha + i\omega \leftrightarrow s \quad \text{sur le dictionnaire.}$$

Nous y retrouvons notamment, pour la fonction échelon, le résultat (9.7)

$$TL[\Gamma(t)] = \frac{1}{p}. \quad (9.8)$$

La TF de la fonction échelon n'est pas définie au sens des fonctions. Mais, comme nous le dit le dictionnaire, elle est définie au sens des distributions et a une définition un peu plus complexe : elle est égale à la TL évaluée en $p = i\omega$, c'est-à-dire à $1/i\omega$, partout sauf en $\omega = 0$ (voir la définition de "VP", ou *valeur principale*, dans la partie commentaires) ; en $\omega = 0$, où la fonction $1/i\omega$ diverge, elle est remplacée par un delta de Dirac multiplié par π .

C'est un exemple de ce qu'on discutait avant : là où la transformée de Fourier ne peut pas être définie directement, la TL est généralement plus simple à calculer, à écrire, et donc plus pratique à utiliser.

L'annexe B aussi contient, lorsque qu'elle est possible, la généralisation des propriétés des TF aux TL. Les principales propriétés des TF restent valables, ce qui permet de calculer les TL de fonctions non standard comme nous l'avons vu pour la TF.

Chapitre 10

TF et TL des dérivées d'une fonction

10.1 Introduction

Nous avons maintenant à disposition tous les outils de décomposition en fonctions harmoniques : SF et TF, plus la TL qui est plus générale et permet de retrouver la TF dans une grande partie des cas, qu'elle soit définie au sens des fonctions (*asdf*) ou des distributions (*asdd*).

D'autre part, nous n'avons pas oublié que le but de cette décomposition n'était pas seulement l'analyse du signal et de son contenu fréquentiel : on cherchait aussi un outil pour pouvoir déterminer la *réponse d'un système linéaire* à une sollicitation extérieure.

La question est donc de déterminer $s(t)$ pour une entrée $e(t)$ quelconque. Reprenons à ce propos notre schéma, introduit dans le cours 5. Pour une fonction en entrée harmonique (ou exponentielle complexe), nous savons que la réponse du système est harmonique (ou exponentielle complexe) et caractérisée par la même pulsation ω :

signal en entrée harmonique :

$$e(t) = a \cos(\omega t + \Delta) \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{EDL}} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} s(t) &= aT(\omega) e(t) \\ &= a|T(\omega)| \cos(\omega t + \Delta + \theta_T(\omega)) \end{aligned}$$

ou exponentiel complexe :

$$e(t) = a e^{in\omega t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{EDL}} \quad \rightarrow \quad s(t) = aT(\omega) e^{in\omega t}$$

où la fonction de transfert $T(\omega)$ peut-être déterminée simplement à partir de l'EDL, en remplaçant les fonction $e(t)$ et $s(t)$. Par conséquent, nous avons déterminé la réponse du système à un signal périodique, après l'avoir développé en série de Fourier :

signal en entrée périodique :

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{EDL}} \quad \rightarrow \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n T(n\omega) e^{in\omega t}$$

Nous savons maintenant qu'un même développement est possible pour une fonction quelconque, par transformée de Laplace. La question est donc : pouvons nous utiliser le développement en TF/TL pour déterminer la réponse du système? Schématiquement :

signal en entrée quelconque :

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega / 2\pi \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{EDL}} \quad \rightarrow \quad ?$$

$$= \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} X_L(p) e^{pt} dp$$

10.1.1 Exponentielles complexes, dérivées et transformées

On peut commencer à réfléchir à cette question en reprenant une idée que nous avons discuté lors de l'introduction de la notation complexe : nous avons vu, à ce moment là, pourquoi il était particulièrement pratique d'utiliser des exponentielles complexes, et c'est suite à cette observation que nous avons développé les décompositions en série et transformée de Fourier sur la base de ces fonctions. L'avantage de ce choix venait de la propriété des exponentielles sous dérivation :

$$\frac{d}{dt} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}.$$

En remplaçant une solution de ce type dans l'EDL alors on pouvait transformer toutes les dérivées en multiplications par des termes du type $(i\omega)^n$, et réduire l'EDL à une simple équation algébrique.

Exemple :

Reprenons l'EDL du circuit RC : $RC\dot{s}(t) + s(t) = e(t)$:
en prenant $e(t) = \text{Re}(\hat{E}_0 e^{i\omega t})$ et $s(t) = \text{Re}(\hat{S}_0 e^{i\omega t})$ en remplaçant les fonctions complexes, on obtient

$$i\omega RC \hat{S}_0 e^{i\omega t} + \hat{S}_0 e^{i\omega t} = \hat{E}_0 e^{i\omega t}$$

$$(i\omega RC + 1) \hat{S}_0 = \hat{E}_0$$

$$\hat{S}_0 = \hat{E}_0 / (i\omega RC + 1)$$

d'où on peut déduire la réponse $s(t)$ (et aussi déterminer la fonction de transfert $T(\omega) = \hat{S}_0 / \hat{E}_0 = 1 / (i\omega RC + 1)$).

Cette propriété des exponentielles sous dérivation est toujours valable : comment pourrait-on l'exploiter une fois écrit le développement en TF de la fonction d'entrée

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} ?$$

Que vaut la dérivée d'une telle fonction ? Comment déterminer ses composantes harmoniques ? En d'autres termes, quelles sont **la TF et la TL de la dérivée d'une fonction** ? Nous devons à présent répondre à cette question.

10.2 TF et TL des dérivées d'une fonction

10.2.1 Fonctions continues et dérivables

Soit $x(t)$ une fonction **continue et dérivable** avec dérivée $\dot{x}(t)$ continue par morceaux. Alors

$$TF[\dot{x}(t)] = i\omega TF[x(t)] \quad (10.1)$$

$$TL[\dot{x}(t)] = p TL[x(t)]. \quad (10.2)$$

On peut prouver ces relations de manière simple en intégrant par parties. On a, par exemple pour la TL :

$$\begin{aligned} TL[\dot{x}(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{dt} e^{-pt} dt \\ &= [x e^{-pt}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x (-p) e^{-pt} dt \\ &= p \int_{-\infty}^{+\infty} x (-p) e^{-pt} dt \\ &= p TL[x(t)] \end{aligned}$$

Pour les dérivées d'ordre supérieure on a donc par itération

$$TF[x^{(n)}(t)] = (i\omega)^n TF[x(t)] \quad (10.3)$$

$$TL[x^{(n)}(t)] = p^n TL[x(t)]. \quad (10.4)$$

Un résultat symétrique existe enfin pour les primitives :

$$TF\left[\int_{-\infty}^t x(t') dt'\right] = \frac{1}{i\omega} TF[x(t)] \quad (10.5)$$

$$TL\left[\int_{-\infty}^t x(t') dt'\right] = \frac{1}{p} TL[x(t)]. \quad (10.6)$$

Ces résultats sont suffisants pour la résolution d'EDL lorsque les fonctions d'entrée sont *continues et dérivables*, mais ce n'est pas toujours le cas. Au contraire, nous sommes le plus souvent amenés à trouver la réponse d'un système linéaire à une entrée qui devient non nulle seulement pour $t > 0$. En d'autres mots, nous devons nous confronter, à partir de notre schéma de départ,

$$e(t) \rightarrow \boxed{\text{EDL}} \rightarrow s(t),$$

à des problèmes où le signal en entrée $e(t)$ discontinu. Or, d'une part, les dérivées du signal d'entrée peuvent apparaître dans l'équation différentielle, et d'autre part, nous ne pouvons pas être sûr que le signal de sortie soit continu et dérivable si l'entrée ne l'est pas, nous devons nous intéresser aux transformées des dérivées des fonctions discontinues.

10.2.2 Fonctions discontinues et nulles pour $t < 0$

Nous allons nous limiter au cas le plus fréquent, qui est le cas des fonctions $x(t)$ **discontinues en $t = 0$ et nulles pour $t < 0$** .

Soit donc $x(t)$ une fonction telle que

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \text{ pour } t < 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) &= x(0+), \text{ fini} \end{aligned} \quad (10.7)$$

Par définition, la TL de $\dot{x}(t)$ est

$$TL[\dot{x}(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \dot{x}(t) e^{-pt} dt ;$$

en intégrant par parties, nous avons

$$\begin{aligned} &= [x e^{-pt}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x(t) (-p e^{-pt}) dt = 0 - x(0+) + p \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt \\ &= -x(0+) + p TL[x(t)]. \end{aligned}$$

On obtient donc que

$$TL[\dot{x}(t)] = p TL[x(t)] - x(0+) : \quad (10.8)$$

la TL de la dérivée d'une fonction $x(t)$ nulle en $t < 0$ est donné par p fois la TF de la fonction $x(t)$, comme pour le cas des fonctions continues, plus un terme $-x(0+)$ qui prend en compte la discontinuité (le saut en $x = 0$) de la fonction.

Attention, dans le cas d'une fonction $x(t)$ qui ne converge pas à $+\infty$, le calcul que nous venons de faire fonctionne pour la TL, parce que $\exp(-pt) = \exp(-(\alpha = i\omega)t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$ (et donc $[x e^{-pt}]_0^{+\infty} = 0 - x(0+)$). Par contre, *on n'aurait pas pu obtenir un résultat si simple avec la TF*. C'est pour cela qu'on utilise la TL pour la résolution d'équations différentielles! Cela permet de trouver une solution aussi pour des sollicitations qui ne sont pas à carré sommable.

A partir de la TL de la dérivée première, il est aussi possible d'obtenir la TL des dérivées suivantes, toujours dans le cas d'une fonction discontinue en zéro (10.7). Pour la **dérivée seconde** en appliquant deux fois le résultat (??) on obtient

$$\begin{aligned} TL[\ddot{x}(t)] &= p TL[\dot{x}(t)] - \dot{x}(0+) = p TL[p TL[x(t)] - x(0+)] - \dot{x}(0+) \\ &= p^2 TL[x(t)] - p x(0+) - \dot{x}(0+). \end{aligned}$$

Plus en général, on peut obtenir pour la **dérivée n-ieme** de la fonction la formule suivante :

$$TL[x^{(n)}(t)] = p^n TL[x(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} x^{(k)}(0+). \quad (10.9)$$

C'est une formule apparemment un peu compliquée mais très utile, qui permet d'obtenir la TL d'une EDL d'ordre quelconque très rapidement.

10.3 Utilisation des distributions pour le calcul des TL des dérivées

10.3.1 Cas des fonctions d'entrée discontinues : fonction échelon

Les expressions des TL des dérivées données par les équations (10.8) et (10.9) vont nous permettre de prendre en compte les conditions initiales dans la résolution des EDL. Cependant, lorsque la fonction en entrée $e(t)$ est discontinue en $t = 0$ et nulle pour $t < 0$, il est préférable d'en prendre en compte la discontinuité d'une manière plus directe, qui fait intervenir les TL au sens des distributions et permet une écriture plus compacte. Soit donc

$$\begin{aligned} e(t) &= 0 && \text{pour } t < 0, \\ e(t) &= f(t) && \text{pour } t \geq 0. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Pour pouvoir prendre en compte la discontinuité de manière implicite, le plus simple est d'introduire la **fonction échelon**

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

et d'écrire

$$e(t) = f(t)\Gamma(t). \quad (10.11)$$

L'utilisation de la fonction échelon permet d'obtenir la TL de $e(t)$ sans devoir explicitement utiliser la valeur de sa discontinuité : Par exemple, pour $f(t) = 1$, nous avons $e(t) = \Gamma(t)$ et donc $E_L(p) = 1/p$. Les TL d'un certain nombre d'autres fonctions du type $f(t)\Gamma(t)$ est donné par notre dictionnaire, et permet de calculer $E_L(p)$ dans la plupart des cas.

Mais pourquoi ? Pourquoi la discontinuité de la fonction $\Gamma(t)$ ne pose pas de problème alors qu'on vient de voir que les points de discontinuité doivent être pris en compte explicitement dans le calcul de la TL des dérivées ? C'est parce que on peut, encore une fois, élargir l'ensemble des fonctions pour y inclure les distributions, et redéfinir alors les dérivées de sorte à pouvoir les traiter comme des fonction continues. Nous allons voir comment tout de suite.

10.3.2 Dérivées au sens des distributions

Dans le cas où on utilise la fonction échelon pour décrire la discontinuité du signal d'entrée $e(t)$, on s'attend à trouver une fonction en sortie qui est aussi proportionnelle à $\Gamma(t)$. Comment va-t-on prendre en compte la discontinuité des deux fonctions dans le calcul des dérivées qui interviennent dans l'EDL ?

Si on accepte d'utiliser des fonctions spéciales (discontinues) comme $\Gamma(t)$, alors il faut décider comment on va en définir les dérivées. Pour ce qui est de la fonction échelon, on peut montrer par un passage à la limite que

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \delta(t) : \quad (10.12)$$

comme on peut le comprendre à la forme de la fonction elle même, la dérivée de l'échelon est une distribution delta de Dirac, nulle partout et infinie au point de discontinuité $t = 0$. Cette dérivée n'est donc pas une fonction ordinaire mais une distribution. Si on accepte cette définition élargie de la dérivée de $\Gamma(t)$, on a immédiatement :

$$TL[\dot{\Gamma}(t)] = TL[\delta(t)] = 1. \quad (10.13)$$

En d'autres termes, une fois définie la dérivée de $\Gamma(t)$ **au sens des distributions**, la TL de cette dérivée est elle aussi définie au sens des distributions : si la fonction échelon n'est pas traitée comme une fonction discontinue mais comme une fonction dont la dérivée peut être infinie à certains endroits, alors il n'y a plus besoin de traiter séparément ses points de discontinuité, ils sont automatiquement traités par l'introduction de delta de Dirac.

Cette idée peut se généraliser à n'importe quelle fonction discontinue de manière à pouvoir en définir une dérivée en tout point de discontinuité. Considérons une fonction $x(t)$ telle que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) &= x(0+) \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) &= x(0-) \end{aligned}$$

alors, on peut définir la **dérivée au sens des distributions (ASDD)** de $x(t)$:

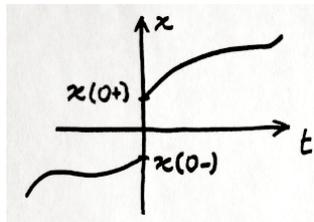


FIG. 10.1 – Fonction discontinue $x(t)$.

$$\dot{x}_{ASDD}(t) = \{\dot{x}(t)\}_{t \neq 0} + [x(0+) - x(0-)]\delta(t) \quad (\text{dérivée ASDD}) \quad (10.14)$$

où $\{\dot{x}(t)\}_{t \neq 0}$ coïncide avec la dérivée ordinaire ou **dérivée au sens des fonctions (ASDF)** de $x(t)$ là où elle est définie et vaut zéro en $t = 0$.

Dans la pratique, nous allons toujours utiliser cette dérivée au sens des distributions directement pour les signaux d'entrée, qu'on écrira souvent en utilisant la fonction échelon. Grâce à cette généralisation du concept de dérivée, comme nous l'avons vu, *le calcul des TL en résulte simplifié*. En effet, si les dérivées sont prises ASDD, on a toujours

$$TL[\dot{x}_{ASDD}] = pTL[x]. \quad (10.15)$$

Pour le cas qui nous intéresse des fonctions d'entrée nulles pour $t < 0$,

$$e(t) = f(t)\Gamma(t), \quad (10.16)$$

on écrira donc, très simplement, *comme pour la TL de la dérivée d'une fonction continue*

$$TL[\dot{e}(t)] = pTL[e(t)], \quad (10.17)$$

en assumant implicitement que la dérivée est prise ASDD.

Pour mieux comprendre pourquoi la dérivation ASDD facilite le calcul, il est utile de donner une démonstration pour le cas (10.16). On a

$$\dot{e}_{ASDD} = \{\dot{f}(t)\}_{t \neq 0} + f(0+) \delta(t) :$$

quand on calcule la dérivée au sens des distributions de $e(t)$, on a deux contributions, une régulière pour tout $t \neq 0$ plus le delta au point de discontinuité. Par conséquent, la TL de cette dérivée se compose de deux parties,

$$TL[\dot{e}_{ASDD}] = TL[\{\dot{f}(t)\}_{t \neq 0} + f(0+) \delta(t)] = pTL[\{\dot{f}(t)\}_{t \neq 0}] + f(0+) \cdot 1 ;$$

mais alors, en utilisant la formule (10.8) pour la TL de la dérivée régulière $\{\dot{f}(t)\}_{t \neq 0}$, on obtient

$$\begin{aligned} &= pTL[f(t)] - f(0+) + f(0+) = \\ &= pTL[f(t)]. \end{aligned} \quad (10.18)$$

c'est-à-dire le résultat cherché (10.17).

Résumons : pour la dérivée des fonctions discontinues, qu'on écrira à l'aide de fonctions échelons $\Gamma(t)$, on peut écrire la TL *comme pour les fonctions continues* ($TL[\dot{x}(t)] = pTL[x(t)]$), pourvu que leur dérivée soit définie ASDD (avec des deltas de Dirac aux points de discontinuité). Ce résultat simplifie la résolutions des EDL, car on n'aura, en pratique, jamais besoin de prendre en compte explicitement les discontinuités des fonctions d'entrée.

Chapitre 11

Resolution d'EDL par TL

11.1 Résolution d'EDL par TL

Nous savons que déterminer la réponse d'un système linéaire signifie trouver la solution d'une équation différentielle linéaire (EDL) à coefficients constants dont l'inconnue est le signal de sortie $s(t)$ et qui contient le signal d'entrée $e(t)$ (et éventuellement ses dérivées, même si cela sera rarement le cas pour nous) comme terme extérieur. Dans sa forme la plus générale, l'EDL s'écrira donc

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t) \quad (11.1)$$

où le second membre de l'équation, complètement déterminé par la connaissance de la fonction d'entrée $e(t)$, représente le terme connu $f(t)$ d'une EDL non homogène tel que nous l'avons déjà introduit dans le premier cours. Dans la plupart des exemples que nous aborderons, ce second membre se réduit simplement à la seule fonction $e(t)$ (c'est-à-dire qu'on se place dans le cas où $b_0 = 1$ et $b_n = 0$ pour $n \neq 0$). Nous avons appris dans le chapitre 10 à traiter par TL toutes les dérivées qui apparaissent dans l'EDL (11.1). Comment fait-on donc en pratique pour la résoudre? Voyons cela d'abord sur deux exemples concrets.

11.1.1 Exemple 1. Des fonctions continues et dérivables.

Considérons pour commencer de vouloir trouver la solution de l'EDL de premier degré

$$a\dot{s}(t) + bs(t) = e(t),$$

avec une certaine fonction en entrée $e(t)$ donnée, que pour cette fois nous considérons continue et dérivable. On suppose alors que $s(t)$ sera aussi continue et dérivable, et on peut appliquer la formule (10.2) et écrire la TL de l'EDL,

$$\begin{aligned} ap S_L(p) + bS_L(p) &= E_L(p) \\ (ap + b) S_L(p) &= E_L(p) \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$S_L(p) = \frac{1}{(ap + b)} E_L(p) : \quad (11.2)$$

nous avons donc une expression explicite de la TL de la fonction en sortie, solution de l'EDL, qui ne dépend que des paramètres de l'EDL et de la TL de la fonction en entrée, connue. Il suffit donc de calculer la transformée de Laplace inverse pour avoir la solution :

$$s(t) = TL^{-1}[S_L(p)].$$

Les seules opérations à faire consistent à calculer la TL de $e(t)$ et à déterminer la TL inverse de l'expression (14.9). Cette dernière tâche demande parfois un peu plus d'attention mais est faisable de manière analytique dans un grand nombre des cas qui nous intéressent. Remarquons que l'équation (14.9) rappelle de très près ce que nous avons déjà obtenu en régime harmonique avec la fonction de transfert : dans ce cas on aurait trouvé $S(\omega) = T(\omega)E(\omega)$. Nous verrons dans un moment que en effet la relation (14.9) est la généralisation de la résolution en régime harmonique au cas d'une fonction d'entrée quelconque.

11.1.2 Exemple 2. Entrée discontinue et conditions initiales

Soit encore

$$a\dot{s}(t) + bs(t) = e(t)$$

l'EDL à résoudre, mais supposons cette fois que la fonction en entrée $e(t)$ soit discontinue en $t = 0$ et nulle pour $t < 0$. Dans ce cas, nous nous intéressons seulement au comportement du système pour $t > 0$. Dans ce cas, comme nous le savons par la résolution classique des EDL, la solution du problème ne dépendra pas seulement de l'excitation $e(t)$ mais aussi des **conditions initiales** pour $s(t)$: pour une équation du premier ordre on aura une seule condition initiale, soit

$$s(0) = x_0.$$

Remarquons que, si nous ne nous sommes pas posé cette question dans l'exemple précédent, c'est parce que le signal en entrée continu et dérivable $e(t)$ était présent en principe depuis $t = -\infty$: ce n'est que lorsque l'excitation est "allumée" à un instant donné que la question de l'état du système à cet instant initial se pose.

Quand on prend la TL de l'EDL, il faut donc explicitement prendre en compte les conditions initiales sur le signal de sortie dans les TL de ses dérivées :

$$\begin{aligned} a\{pS_L(p) - x_0\} + bS_L(p) &= E_L(p) \\ (ap + b)S_L(p) &= 1E_L(p) + ax_0 \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$S_L(p) = \frac{1}{(ap + b)} E_L(p) + \frac{ax_0}{(ap + b)}. \quad (11.3)$$

Remarquons que nous n'avons pas eu besoin de prendre en compte la discontinuité de l'entrée $e(t)$, en premier lieu parce que cette EDL ne contient pas ses dérivées. Mais même

si ces dérivées étaient présentes, on aurait pu éviter de prendre en compte explicitement la discontinuité de $e(t)$ en l'écrivant sous la forme (10.16) comme expliqué en 10.3.2. Nous avons donc encore une fois une expression explicite de la TL de la solution de l'EDL, qui cette fois dépend, en plus que des paramètres de l'EDL, des conditions initiales (imposées sur la solution elle-même). Encore une fois, il faudra calculer la transformée de Laplace inverse $TL^{-1}[S_L(p)]$ pour avoir la solution $s(t)$.

11.1.3 Résolution d'EDL par TL, formule générale.

Le cas d'EDL de degré supérieur peuvent être résolus en procédant comme nous l'avons fait dans les exemples précédents, et en tenant compte du fait que, pour une EDL d'ordre n , il faut donner n conditions initiales (en général la valeur de la fonction et de ses dérivées jusqu'à la $n - 1$ -ème) pour que la solution soit déterminée de manière univoque.

La généralisation des résultats précédents à une EDL quelconque peut être formulée de la manière suivante. Soit l'EDL à coefficients constants

$$a_n s^{(n)}(t) + a_{n-1} s^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 s'(t) + a_0 s(t) = b_m e^{(m)}(t) + \dots + b_1 e'(t) + b_0 e(t) \quad (11.4)$$

où $e(t)$ est une fonction connue. Alors, la TL $S_L(p)$ de la solution $s(t)$ de l'EDL est donné par

$$S_L(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} E_L(p) + \frac{\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^i p^{i-i} s^{(i-1)}(0)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (11.5)$$

que nous pouvons récrire, de manière schématique, comme

$$S_L(p) = H(p) E_L(p) + \{C.I.\} \quad (11.6)$$

où $\{C.I.\}$ indique le terme qui dépend des conditions initiales et

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} \quad \text{transmittance} \quad (11.7)$$

est nommé **transmittance** du système linéaire régi par l'EDL.

11.2 La résolution d'EDL en pratique

11.2.1 Réponse libre (transitoire pur) et réponse forcée (régime permanent)

Essayons d'abord d'interpréter le sens physique du résultat de la formule (11.5) (ou (11.6)) à partir de quelques observations.

- D'une part, si $e(t) = 0$ (cas d'une EDL homogène), on a $E_L(p) = 0$ et seul le terme lié aux conditions initiales $\{C.I.\}$ reste : c'est le cas où il n'y a pas de sollicitation extérieure, et on a alors la **réponse libre** du système à des conditions initiales données et sans forçage ;

- La **réponse libre** est aussi appelée **transitoire pur** : en effet, pour tout système réel, il y a dissipation d'énergie et par conséquent la réponse libre finit par s'annuler. Le terme $\{C.I.\}$ donne (après TL^{-1}) une solution $s(t)$ qui tend à zéro pour $t \rightarrow \infty$;
- La considération précédente reste valable même si $e(t) \neq 0$, le terme $\{C.I.\}$ correspond toujours au transitoire pur ;
- La partie donnée par $H(p) E_L(p)$ donne donc la partie de la solution due à la sollicitation extérieure $e(t)$, qu'on appelle **réponse forcée** ou **régime permanent** du système, qui reste une fois que la partie de la solution associée aux conditions initiales s'est annulée ;
- La réponse forcée est aussi la seule présente dans le cas de conditions initiales toutes nulles (système initialement à repos) ;
- Bien que la réponse forcée associée (par TL^{-1}) à $H(p) E_L(p)$ soit la seule qui dépend de la sollicitation extérieure $e(t)$, on remarque que cette sollicitation intervient seulement à travers $E_L(p)$, et que la fonction $H(p)$ ne dépend que des coefficients de l'EDL.

11.2.2 La transmittance $H(p)$

La dernière remarque devrait nous rappeler quelque chose ! En effet, considérons la réponse forcée $S_L(p) = H(p) E_L(p)$ et prenons maintenant $p = i\omega$: on obtient alors

$$S_L(i\omega) = H(i\omega) E_L(i\omega)$$

et donc, si les TF de $s(t)$ et $e(t)$ existent, $S(\omega) = H(\omega) E(\omega)$: à ω donnée, la fonction $H(\omega)$ donne le rapport entre les amplitudes $S(\omega)$ et $E(\omega)$ correspondantes à la pulsation ω . Mais c'est exactement ce que nous avons déjà écrit pour la réponse d'un système linéaire en régime harmonique, où on avait

$$S(\omega) = T(\omega) E(\omega).$$

Dans le cas de la réponse harmonique, on considérait une entrée sinusoïdale de pulsation ω , avec $E(\omega)$ l'amplitude (complexe) associée. La fonction de transfert $T(\omega)$ permettait alors de calculer l'amplitude (complexe) $S(\omega)$ de l'oscillation (de pulsation ω) obtenue en sortie. Dans le cas présent, si on prend en entrée une fonction sinusoïdale, on doit avoir la même chose :

$$H(i\omega) = T(\omega). \quad (11.8)$$

$H(p)$ n'est donc rien d'autre que la **transmittance** ou **fonction de transfert** du système linéaire, c'est à dire le coefficient (complexe) qui donne l'amplification et le déphasage d'une composante spectrale du signal en entrée. Mais maintenant, grâce aux TF et TL, nous sommes en mesure de prendre en compte **toutes les contributions spectrales à la fois**, et de déterminer en un seul passage le spectre du signal en sortie pour un signal en entrée quelconque.

11.2.3 Mode opératoire

Avons nous bien la réponse à la question de départ ? Oui : à partir de l'EDL, nous sommes maintenant capables d'écrire d'abord la transmittance $H(p)$ sous la forme d'un rapport de polynômes :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} \quad \text{transmittance ;} \quad (11.9)$$

à partir de la, on peut calculer la TL du signal en sortie du système pour n'importe quelle sollicitation en entrée, de manière à prendre en compte en même temps les conditions initiales s'il y en a.

La figure 11.1 illustre schématiquement la manière de procéder.

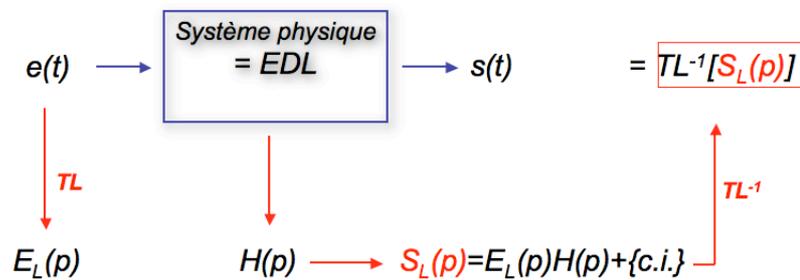


FIG. 11.1 – Résolution d'EDL par TL.

Pour la réponse forcée, une fois déterminé la transmittance $H(p)$ à partir de l'EDL, on calcule la TL $E_L(p)$ de l'entrée $e(t)$. On multiplie donc ces deux grandeurs et on en cherche la TL inverse, qui donne la sortie $s(t)$. Dans certains cas, on ne donne pas de conditions initiales, ce qui veut dire qu'on s'intéresse seulement à la réponse forcée du système, celle qu'on obtiendrait une fois les distorsions transitoires éventuelles seront dissipées (ou pour conditions initiales nulles). Il n'y a donc pas besoin de prendre en compte le terme $\{C.I.\}$. En d'autres cas, l'effet lié aux conditions initiales est intéressant et il faut donc calculer aussi la TL inverse de ce terme.

Décomposition en éléments simples

Le calcul des TL inverses est souvent assez facile à l'aide du dictionnaire, mais peut nécessiter une manipulation des rapports de fonctions en entrée pour les récrire en somme de fonctions plus simples. Plus particulièrement, on a souvent besoin d'opérer une **décomposition en éléments simples**, c'est-à-dire de réduire une fraction rationnelle en somme de fractions ayant pour dénominateurs des puissances de polynômes du premier degré et pour numérateurs un polynôme de degré inférieur au polynôme irréductible du dénominateur.

En d'autres termes, si $P(\omega)$ et $Q(\omega)$ sont deux polynômes, on veut décomposer la fraction rationnelle P/Q . On commence par chercher les pôles de la fraction, c'est à dire

les valeurs de ω qui annulent le dénominateur $Q(\omega)$. Un pôle est dit d'ordre p s'il est une racine d'ordre p de Q . Un théorème assure alors que, si z est un pôle de la fraction P/Q d'ordre p , P/Q peut toujours s'écrire comme

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha_1}{\omega - z} + \frac{\alpha_2}{(\omega - z)^2} + \dots + \frac{\alpha_p}{(\omega - z)^p} + \frac{P_1}{Q_1} \quad (11.10)$$

avec P_1/Q_1 une autre fraction pour laquelle on pourra procéder de la même manière. En déterminant tous les racines de Q on peut donc récrire la fraction P/Q sous la forme d'une somme de fractions simples (généralement on a des pôles d'ordre deux au plus). A ce points, pour déterminer les coefficients α_i , une méthode qui est toujours réalisable consiste à réduire au même dénominateur le membre de droite de la décomposition et à identifier les coefficients des numérateurs ordre par ordre : on verra un exemple un peu plus loin.

11.3 Caractérisation d'un système

Nous sommes maintenant capables de déterminer la réponse d'un système linéaire à une sollicitation quelconque. Parmi les sollicitations possibles, il y en a trois qui sont particulièrement intéressantes à considérer, car elles permettent de *tester* le système de manière à avoir accès facilement à ses grandeurs caractéristiques. On parle ainsi de **caractérisation d'un système**. Les trois méthodes qu'on utilise couramment pour déterminer le comportement du système sont d'étudier

- sa *réponse fréquentielle* : la réponse à $e(t) = \exp(i\omega t)$;
- sa *réponse impulsionnelle* : la réponse à $e(t) = \delta(t)$;
- sa *réponse indicielle* : la réponse à $e(t) = \Gamma(t)$.

Ce ne sont pas les seules méthodes possibles, car évidemment l'étude de la réponse d'un système à n'importe quelle fonction d'entrée donnera toujours des informations sur le système. Mais ces trois cas sont simples à interpréter, parfois simples à mettre ne place expérimentalement, et souvent utilisés en pratique.

Pour mieux comprendre leur fonctionnement prenons un exemple concret :

Exemple : le circuit RC. Nous connaissons l'EDL associée à ce système,

$$RC \dot{s}(t) + s(t) = e(t).$$

Par TL, on obtient

$$p RC S_L(p) + S_L(p) = E_L(p).$$

Si nous sommes intéressés au caractéristiques *propres* au système, nous choisirons de nous affranchir de l'influence des conditions initiales et de considérer le *régime forcé*; on pourra donc écrire comme nous l'avons vu

$$S_L(p) = H(p) E_L(p)$$

avec

$$H(p) = \frac{1}{pRC + 1} = \frac{1/RC}{p + 1/RC} = \frac{-p_1}{p - p_1}.$$

où nous avons mis en évidence le pôle $p_1 = -1/RC$.

Cherchons donc la réponse de ce système aux trois signaux d'entrée particuliers.

11.3.1 Réponse fréquentielle

Nous avons déjà rencontré ce cas important dans la première partie de ce cours : c'est le cas où le signal en entrée est harmonique. Nous avons vu comment déterminer en particulier la fréquence propre du système $\omega_0 = 1/RC$ à partir de la courbe de résonance : retrouvons le même résultat en utilisant maintenant la méthode de résolution d'EDL par TL. Soit donc $e(t) = \exp(i\omega t)$. On a (sur le dictionnaire)

$$E_L(p) = 2\pi \delta\left(\frac{p}{i} - \omega\right)$$

d'où

$$S_L(p) = H(p) E_L(p) = \frac{-p_1}{p - p_1} 2\pi \delta\left(\frac{p}{i} - \omega\right).$$

La fonction précédente est nulle partout sauf en $p/i = \omega$, c'est-à-dire en $p = i\omega$: on peut donc remplacer $p = i\omega$ dans l'expression de $H(p)$ sans modifier le résultat, et on a alors

$$S_L(p) = \frac{-p_1}{i\omega - p_1} 2\pi \delta\left(\frac{p}{i} - \omega\right)$$

(attention à ne pas faire confusion : ici la variable est p , et non pas ω , qui est fixé par le choix de la fonction harmonique en entrée). Par TL^{-1} on obtient

$$\begin{aligned} s(t) &= TL^{-1}[S_L(p)] = TL^{-1}\left[\frac{-p_1}{i\omega - p_1} 2\pi \delta\left(\frac{p}{i} - \omega\right)\right] \\ &= \frac{-p_1}{i\omega - p_1} 2\pi TL^{-1}\left[\delta\left(\frac{p}{i} - \omega\right)\right] \\ &= \frac{-p_1}{i\omega - p_1} 2\pi \exp(i\omega t) \\ &= H(i\omega) \exp(i\omega t) = T(\omega) \exp(i\omega t). \end{aligned} \quad (11.11)$$

On retrouve donc bien le résultat connu : la réponse du système à une sollicitation harmonique est une oscillation harmonique de même fréquence dont l'amplitude complexe est donné par la fonction de transfert ou transmittance du système $T(\omega)$ évaluée à cette fréquence. Ici,

$$T(\omega) = \frac{-p_1}{i\omega - p_1} = \frac{1}{1 + i\omega/\omega_0}$$

dépend de la pulsation propre

$$\omega_0 = -p_1 = 1/RC :$$

La mesure de l'amplitude de la réponse $s(t)$ et de son déphasage par rapport à l'entrée $e(t)$ permettent donc de remonter au paramètre caractéristique du système, RC .

11.3.2 Réponse impulsionnelle

Considérons maintenant la réponse du système à une impulsion, modélisée par un delta de Dirac : $e(t) = \delta(t)$. On a donc très simplement

$$E_L(p) = TL[\delta(t)] = 1$$

et donc

$$S_L(p) = H(p) E_L(p) \quad (11.12)$$

d'où

$$s(t) = TL^{-1}[H(p)] = h(t) \quad \text{réponse impulsionnelle :} \quad (11.13)$$

la réponse impulsionnelle est donnée par la TL inverse de la fonction de transfert $H(p)$, notée généralement $h(t)$. Comme pour la réponse fréquentielle, il est aisé d'obtenir la valeur des paramètres typiques du système en étudiant cette réponse. Dans le cas du circuit RC, on a par exemple (en utilisant le dictionnaire) :

$$h(t) = TL^{-1}\left[\frac{-p_1}{p - p_1}\right] = -p_1 e^{p_1 t} \Gamma(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \Gamma(t)$$

La décroissance exponentielle en t/RC de cette fonction permet de déterminer facile-

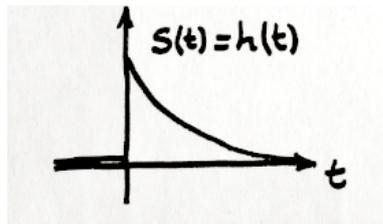


FIG. 11.2 – Réponse impulsionnelle $h(t)$ du circuit RC.

ment le paramètre caractéristique RC .

11.3.3 Réponse indicielle

Le troisième cas qu'on considère typiquement est la réponse indicielle, ou réponse à une sollicitation en entrée en échelon, $e(t) = \Gamma(t)$. La TL de l'entrée est :

$$E_L(p) = TL[\Gamma(t)] = \frac{1}{p},$$

d'où

$$S_L(p) = H(p) \frac{1}{p} \quad (11.14)$$

et dans notre exemple

$$S_L(p) = \frac{-p_1}{p - p_1} \frac{1}{p}.$$

On doit donc déterminer la TL^{-1} de cette fonction, mais elle n'est pas dans le dictionnaire : nous rencontrons donc le problème typique de ce genre de calcul, qui consiste à devoir récrire une fonction de manière plus simple, comme somme de fonctions dont on sais facilement déterminer la TL inverse. Comme nous l'avons anticipé plus haut, la méthode de choix est de faire une **décomposition en éléments simples**.

Nous avons décrit les principes de cette méthode en 11.2.3; utilisons-la sur cet exemple. Il faut réussir à récrire la fraction comme une somme de fractions simples, chacune associée à une racine du dénominateur. Ici les deux racines (d'ordre 1) sont $p = p_1$ et $p = 0$, donc le résultat (11.10) assure qu'on peut toujours trouver les paramètres α et β tels que

$$\frac{-p_1}{p - p_1} \frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p - p_1} + \frac{\beta}{p}.$$

Pour déterminer α et β on factorise,

$$\frac{-p_1}{p - p_1} \frac{1}{p} = \frac{\alpha p + \beta(p - p_1)}{(p - p_1)p}$$

puis on identifie les numérateurs (car les dénominateurs sont identiques !)

$$-p_1 = \alpha p + \beta(p - p_1).$$

On a ici l'identité entre deux polynômes en p : pour qu'ils soient équivalents les coefficients de chaque puissance de p doivent être identiques, et on doit donc résoudre le système d'équations

$$\begin{aligned} -p_1 &= -\beta p_1 && \text{ordre 0} \\ 0 &= (\alpha + \beta)p && \text{ordre 1} \end{aligned}$$

qui donne tout de suite $\beta = 1$, $\alpha = -\beta = -1$. En utilisant le dictionnaire, on peut déterminer le signal en sortie comme

$$s(t) = TL^{-1}\left[\frac{-1}{p - p_1} + \frac{1}{p}\right] = (-e^{-t/RC} + 1) \Gamma(t),$$

car les fonctions qui apparaissent sont maintenant plus simples. Encore une fois, on a

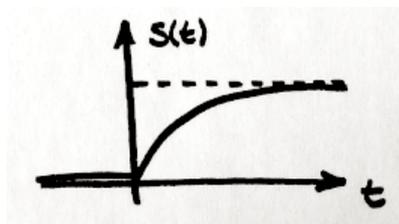


FIG. 11.3 – Réponse indicielle $h(t)$ du circuit RC.

une décroissance exponentielle en t/RC à partir de laquelle sera facile d'évaluer RC .

•Exercice

Que vaut $s(t)$ pour $e(t) = \exp(i\omega t) \Gamma(t)$? Utiliser le dictionnaire!

\triangle Une animation du site web "[Figures animées pour la physique](http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/sismo.html)" permet d'observer le comportement d'un sismographe, qui est en fait un oscillateur mécanique sensible aux vibrations du support sur lequel il est posé. Il est possible d'observer sa réponse à une sollicitation sinusoïdale (réponse fréquentielle) et à une courte impulsion (approchant la réponse impulsionnelle), mais aussi à une rampe, ce qui correspond pratiquement à un saut brusque d'un déplacement donné à zéro. C'est un joli exemple qui illustre comment les réponses d'un même système à des excitations différentes contiennent toutes des informations sur les paramètres physiques du système.

<http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/sismo.html>

Voir aussi la page sur les équations différentielles pour une description plus mathématique des EDL de premier et second ordre et des tracés des signaux en réponse à plusieurs signaux d'entrée et pour différentes conditions initiales. En manipulant la figure on peut changer la valeur des différents paramètres et observer les variations qui en résultent.

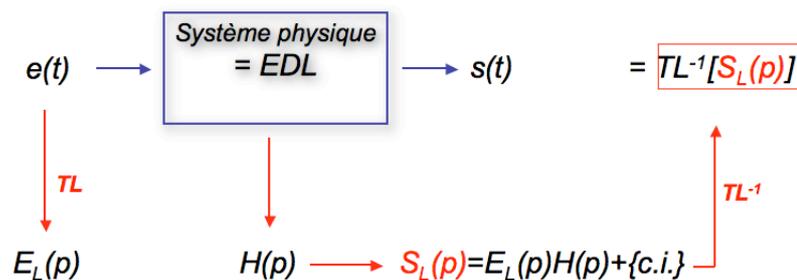
<http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/equadiff/equadiff.html>

Chapitre 12

Un point de vue alternatif : la convolution

12.1 Décomposer l'entrée dans le domaine du temps

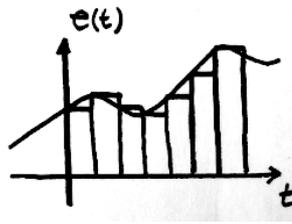
Revenons encore une fois à la figure 11.1 :



nous avons ici un outil puissant, permettant de résoudre une EDL pour n'importe quelle fonction en entrée (et éventuellement avec conditions initiales). En observant ce diagramme, on remarque que, à partir d'un problème défini dans le *domaine temporel*, on est passé au domaine de la variable complexe p (associé comme nous le savons au *domaine fréquentiel*) où le problème est plus simple à résoudre, pour revenir finalement au domaine temporel pour déterminer la réponse cherchée.

On peut donc se poser la question : il n'y a pas un moyen de trouver la solution directement dans le domaine temporel ? En d'autres mots, maintenant que nous connaissons la solution, il ne serait pas possible de l'écrire d'une manière différente, qui ne fait pas appel à la TL et qui ne fait pas apparaître la variable complexe p ? La réponse est oui, et pour le faire, on a besoin de la réponse impulsionnelle $h(t)$. D'un point de vue mathématique les calculs sont un peu compliqués, mais nous allons encore une fois prendre un point de vue plus physique et essayer de comprendre l'idée très simplement plutôt que de donner une démonstration rigoureuse du résultat.

Considérons donc un signal en entrée $e(t)$ quelconque, et supposons maintenant de le découper en fines tranches :

FIG. 12.1 – Réponse indicielle $h(t)$ du circuit RC.

on peut voir la fonction comme une succession de segments, chacun au sommet d'un rectangle étroit de largeur Δt ,

$$e(t) \simeq \sum_n e_n(t) \quad \text{où } e_n(t) = \begin{cases} e(t_n) & \text{pour } t \in [t_n, t_n + \Delta t] \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (12.1)$$

où $t_n = n \Delta t$ est la position du n -ième rectangle. Nous savons que si on prend des intervalles Δt de plus en plus étroits, on approche de mieux en mieux la fonction $e(t)$. Pour ce faire, on peut écrire plus précisément

$$e_n(t) = e(t_n) \cdot \Delta t \cdot \begin{cases} 1/\Delta t & \text{pour } t \in [t_n, t_n + \Delta t] \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (12.2)$$

de manière à avoir $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} e_n(t) = e(t_n) \delta(t - t_n)$. La somme de l'équation 12.1 devient donc, à la limite $\Delta t \rightarrow 0$, une somme infinie d'impulsions de Dirac : on arrive donc à l'identité

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t') \delta(t - t') dt'. \quad (12.3)$$

Nous avons retrouvé ici une des propriétés de la distribution delta de Dirac que nous avons énoncé lors de son introduction : l'intégrale en dt' d'une fonction fois $\delta(t - t')$ (ou $\delta(t' - t)$, par symétrie) donne la valeur de la fonction en t . Cette propriété a donc un sens profond : elle exprime la possibilité de décomposer une fonction en une succession infinie de pic infiniment étroits, chacun multiplié par sa valeur au point correspondant. On peut remarquer tout de suite qu'on est entrain ici de faire une décomposition de la fonction $e(t)$ dans le domaine *temporel*, justement ce qu'on voulait faire...

12.2 Déterminer le signal de sortie

Maintenant, comment peut-on déterminer la sortie $s(t)$? Grâce à la linéarité du système (et de l'EDL), la réponse à une somme de fonctions est la somme des réponses à chaque fonction. On peut donc approcher $s(t)$ avec la somme des réponses à chaque rectangle et donc, après passage à la limite, comme intégrale des réponses à chaque delta de Dirac. Et la réponse à une delta de Dirac est la *réponse impulsionnelle*, $h(t)$, qu'on peut déterminer à partir de l'EDL comme TL^{-1} de la fonction de transfert $H(p)$ où mesurer expérimentalement comme réponse à une impulsion. On a donc

$$\begin{array}{ll}
 \text{entrée} & \rightarrow \text{sortie} \\
 \delta(t) & \rightarrow h(t) \\
 \delta(t-t') & \rightarrow h(t-t') \\
 a \delta(t-t') & \rightarrow a h(t-t')
 \end{array}$$

il suffit donc de prendre à la place de la constante a la valeur de la fonction en t' , $e(t')$, et d'intégrer le résultat, pour avoir

$$e(t') \delta(t-t') \rightarrow e(t') h(t-t')$$

et finalement

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t') \delta(t-t') dt' \rightarrow s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t') h(t-t') dt' \quad (12.4)$$

C'est notre résultat : la réponse d'un système linéaire à un signal d'entrée $e(t)$ peut être déterminée comme une intégrale sur les réponses impulsionnelles $h(t-t')$ multipliées par les valeurs $e(t')$ de la fonction à chaque instant t' . L'opération que nous faisons ici s'appelle **produit de convolution**. Nous allons maintenant l'introduire formellement.

12.3 La réponse du système comme produit de convolution

On note $f * g$ le produit de convolution entre deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ défini comme suit :

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') g(t-t') dt'. \quad (12.5)$$

$f * g$ est donc *une fonction* de t . Le résultat (12.4) s'écrit donc aussi

$$s(t) = e * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t') h(t-t') dt' \quad (12.6)$$

où $e(t)$ est le signal d'entrée et $h(t) = TL^{-1}[H(p)]$ la réponse impulsionnelle du système.

Nous avons trouvé une méthode alternative pour la détermination de la réponse d'un système, qui fait appel à la réponse impulsionnelle plutôt qu'à la fonction de transfert et qui s'écrit directement dans le domaine du temps. Dans ce cas, il est nécessaire de calculer le produit de convolution entre deux fonctions, ce qui est souvent un peu plus compliqué que de passer par les TL, sauf dans certains cas simples (et particulièrement lorsque une des deux fonctions est un Dirac!), mais ça reste une possibilité.

On peut se poser la question de la relation entre cette méthode et la résolution par TL, pour laquelle nous avons écrit $S_L(p) = E_L(p) H(p)$ et

$$s(t) = TL^{-1}[E_L(p) H(p)].$$

Est-ce que les deux solutions sont bien identiques? La réponse est oui, car on peut montrer la propriété suivante pour le produit de convolution.

Soient f et g deux fonctions, $F(\omega)$ et $G(\omega)$ leurs TF et $F_L(p)$ et $G_L(p)$ leurs TL. Alors,

$$TF[f * g] = F(\omega) G(\omega) \quad (12.7)$$

$$TL[f * g] = F_L(p) G_L(p) : \quad (12.8)$$

les transformées de Fourier et Laplace du produit de convolution entre deux fonctions sont les produits ordinaires des transformées des deux fonctions.

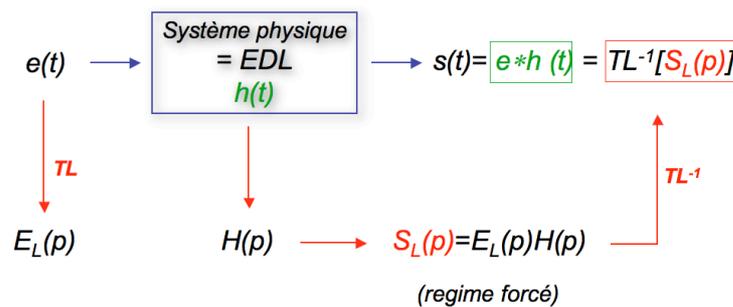


FIG. 12.2 – Résolution d'EDL : par TL ou par convolution.

Il est donc équivalent de calculer $TL^{-1}[E_L(p) H(p)]$ ou $e * h(t)$, et les deux fonctions $H(p)$ et $h(t)$ donnent deux manières équivalentes de caractériser le système, l'une dans le domaine des fréquences, l'autre dans le domaine temporel. Nous pouvons donc compléter notre schéma, comme illustré par la figure 12.2.

12.4 Exemples de convolution

Il est utile, pour mieux comprendre le sens mathématique de l'opération de convolution, de tracer quelques schémas sur un exemple concret. Nous avons écrit

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t-t') dt'$$

comme on intègre sur t' , $f * g(t) = \mathcal{F}(t)$ est une fonction de t . Quelle opération nous permet concrètement de construire $\mathcal{F}(t)$ pour un t donné? On prend d'une part $f(t')$:

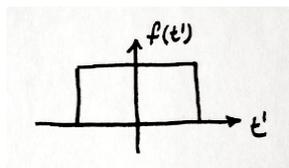
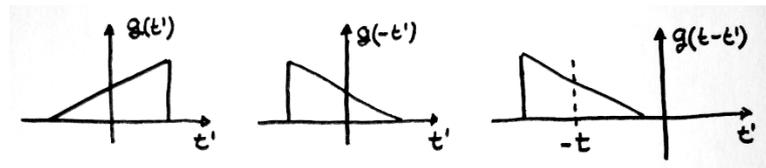


FIG. 12.3 – $f(t')$ en f de t' p ex rectangle centré en zéro

FIG. 12.4 – $g(t')$, $g(-t')$, $g(t-t')$ p ex triangle rectangle

D'autre part, on prend $g(t')$ mais inversée, $g(-t')$, puis décalée du temps t qui nous intéresse, $g(t-t')$:

c'est donc dans le décalage de la fonction g que le temps t intervient. Chaque instant t correspond à un décalage différent entre $f(t')$ et $g(t-t')$.

Finalement, on multiplie ces deux fonctions et on intègre la fonction qui en résulte :

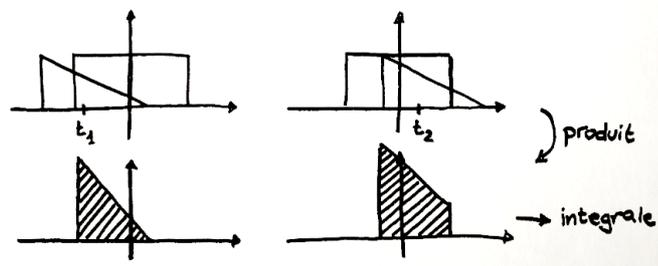


FIG. 12.5 –

Sur notre exemple, lorsque $|t|$ est grand, les deux fonctions ne se recouvrent pas, et leur convolution $\mathcal{F}(t)$ est donc nulle ; pour des t opportuns, plus proches de zéro, on aura un recouvrement des deux fonctions : leur produit est dans ce cas non nul et son intégrale, non nulle aussi, donne $\mathcal{F}(t)$. En d'autres termes, on pourrait dire que le produit de convolution est une mesure du degré de recouvrement de deux signaux en fonction du décalage temporel entre les deux.

△ Quelques animations sur internet permettent de mieux visualiser l'opération ; voir par exemple

http://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_de_convolution

<http://www.jhu.edu/~signals/convolve/index.html>

Chapitre 13

Oscillations et ondes.

Dans le chapitre 3 nous avons rapidement discuté le problème de la transmission d'une oscillation au milieu environnant, qui rend possible de la capter et l'étudier. Nous allons revenir maintenant sur cette question pour mieux comprendre comment cette transmission est possible, comment décrire une onde, et surtout pour mettre en évidence l'étroite analogie entre oscillations et ondes. Le but de cette comparaison est de se rendre compte que les méthodes d'analyse que nous avons introduit dans ce cours en considérant des signaux temporels sont en réalité parfaitement applicables à des fonctions d'une variable différente, par exemple de la position.

13.1 Oscillations et ondes

Dans les problèmes de l'oscillateur mécanique que nous avons abordé au chapitre 2, l'oscillateur est un système isolé, décrit par la simple variable $x(t)$ décrivant la position de la masse. Mais supposons maintenant que cet oscillateur soit la membrane d'un haut-parleur. Sa position est encore définie par une variable locale, mais sa vibration rapide perturbe l'air environnant, produisant des compressions et des décompressions qui se transmettent de proche en proche aux molécules du gaz (via les chocs moléculaires) : c'est le son ! Une onde sonore, générée par la membrane—"source", se propage dans le milieu environnant. De la même manière, on peut imaginer de mettre en vibration un atome dans un solide : cette vibration se transmet aux atomes voisins et une onde sonore est créée dans le solide. Si l'oscillateur-source est attaché à l'extrémité d'une corde, une onde transversale traversera la corde. On peut créer une onde de compression dans un ressort, une onde de surface dans un liquide... Le *couplage* de l'oscillateur aux milieu extérieur produit une onde.

Un des cas les plus intéressants est quand c'est une charge électrique qui se met à osciller : il peut s'agir de la charge des électrons qui se déplacent dans un circuit électrique ou des vibrations du nuage électronique d'un atome. Dans tous les cas, une onde électromagnétique est émise, et cette fois elle peut se propager le milieu de propagation est *l'espace vide*, dont les propriétés locales "champs électrique" E et "champs magnétique" B sont modifiés par la perturbation¹.

¹L'onde électromagnétique peut évidemment se propager aussi dans un milieu diélectrique.

Il y a donc une relation directe entre oscillateurs et ondes. A bien voir, nous pouvons aussi remarquer que toutes les méthodes développées dans ce cours sont basées sur la décomposition des signaux sur des exponentielles complexes, et que ces mêmes exponentielles sont utilisées dans la description des ondes électromagnétiques ! Quel est le rapport précis entre un oscillateur et une onde ? Nous savons que une onde est aussi caractérisée par une oscillation, mais cette oscillation est plus complexe et comprends à la fois une variation au cours du temps et une variation dans l'espace. On va essayer de clarifier ce point, et de bien comprendre les différences et les points communs entre oscillateurs et ondes. Voyons brièvement comment décrire une onde se propageant dans un milieu.

13.1.1 Onde progressive

Si on se limite pour simplifier à une seule dimension spatiale y , une onde progressive est par définition une fonction $\psi(y, t)$ qui donne la perturbation de la caractéristique d'intérêt du milieu (pression, déplacement transversale, champs électrique..) au point y et à l'instant t . Attention, j'ai choisi de noter la position par y ici car elle désigne la position dans l'espace où l'onde se propage, et non pas un déplacement local comme dans l'exercice sur l'oscillateur. Si par exemple on considère un oscillateur-source en $y = 0$ attaché à une corde allongée le long d'un axe y , le déplacement transversal x de l'oscillateur correspondra à la valeur du champs ψ en $y = 0$: $\psi(0, t) = x(t)$. Si l'onde se propage (sans atténuation) à la **vitesse de propagation** v , alors, par définition, la perturbation générée en $y = 0$ rejoint un point y après un temps $t = y/v$ (voir figure 13.1).

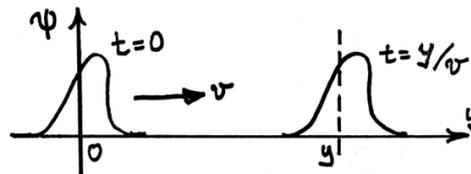


FIG. 13.1 – Onde progressive.

Si on connaît $\psi(0, t) = f(t)$ définissant le comportement de la source en fonction du temps, alors on sait que la même perturbation passera en y au temps retardé $t = y/v$: on a donc

$$\psi(0, t) = f(t) \Rightarrow \psi(y, t) = f\left(t - \frac{y}{v}\right) : \quad (13.1)$$

les deux variables y et t ne sont *pas indépendantes* mais apparaissent toujours sous la forme combinée $q = (t - y/v)$.

En particulier,

FIG. 13.2 – Perturbation en $y = 0$ et en y au cours du temps.

- en un point $y = y_0$ donné, $\psi(y_0, t) = f(t - \frac{y_0}{v})$ est une fonction de t uniquement (évolution temporelle en un point donné),
- à $t = t_0$ fixé, $\psi(y, t_0) = f(t_0 - \frac{y}{v})$ est une fonction de y uniquement ("photographie" de l'onde à temps fixé).

Mais dans les deux cas, c'est toujours la même fonction f qui est en jeu : la description d'une onde progressive comme fonction de l'espace ou du temps sont strictement liées et on peut remonter de l'une à l'autre.

13.1.2 Onde progressive périodique

Précisons ultérieurement la nature de l'onde en supposant que le mouvement de la source soit périodique (comme dans le cas de l'oscillateur libre) de **période** T . Alors,

$$f(t + nT) = f(t) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (13.2)$$

d'où

$$\psi(y_0, t + nT) = f(t + nT - \frac{y_0}{v}) = f(t - \frac{y_0}{v}) = \psi(y_0, t), \quad (13.3)$$

et

$$\begin{aligned} \psi(y, t_0) &= f(t_0 - \frac{y}{v}) = f(t_0 - \frac{y}{v} - nT) = f(t_0 - \frac{y + nvT}{v}) \\ &= \psi(y + nvT, t) = \psi(y + n\lambda, t) : \end{aligned} \quad (13.4)$$

la périodicité temporelle (T) est donc associée à une *périodicité spatiale* décrite par la **longueur d'onde** $\lambda = vT$.

13.1.3 Onde progressive périodique sinusoïdale

Si, de plus, le mouvement de la source est sinusoïdal, c'est-à-dire si $f(t) = a \cos(\omega t)$ avec $\omega = 2\pi/T$, alors

$$\psi(y, t) = f(t - \frac{y}{v}) = a \cos\left(\omega\left(t - \frac{y}{v}\right)\right) = a \cos(\omega t - ky) \quad (13.5)$$

où $k = \omega/v = 2\pi/vT = 2\pi/\lambda$ est le **nombre d'onde**.

On retrouve donc finalement la dépendance en $(\omega t - ky)$ des ondes électromagnétiques : en notation complexe, on pourra donc écrire $\cos(\omega t - ky) = \text{Re}(\exp j(\omega t - ky))$. De plus, nous venons de retrouver les deux relations fondamentales entre les variables période et pulsation, longueur d'onde et nombre d'onde :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (13.6)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (13.7)$$

avec $k/\omega = v$.

En conclusion, une onde qui se propage dans un milieu transporte avec elle une oscillation qui est partout proportionnelle à l'oscillation de la source qui génère l'onde :

	temps	espace
période	T	$\lambda = v/T$
pulsation	$\omega = 2\pi/T$	$k = 2\pi/\lambda = \omega/v$
fréquence	$f = 1/T = \omega/2\pi$	

TAB. 13.1 – Principales grandeurs caractéristique des ondes.

on peut donc capter l'onde à n'importe quelle position pour avoir un signal contenant l'information sur le mouvement de cette source. Les ondes sont donc décrites d'une manière très proche aux oscillateurs, sauf que deux variables (couplées) interviennent. Dans ce cours, je vais toujours parler de fonctions du temps, typiquement de $x(t)$, où x n'est pas forcément une position mais une quelconque grandeur variable au cours du temps (charge, température, différence de potentiel...). Cependant, tout le formalisme qu'on va développer s'applique aussi bien aux fonction du temps que de l'espace, et donc aux ondes et plus en particulier à la variabilité dans l'espace d'une onde "photographiée" à un instant t donné.

Chapitre 14

Signaux aléatoires

14.1 Rappels de probabilité

Nous allons finalement nous intéresser dans ce dernier chapitre aux signaux aléatoires, c'est-à-dire aux signaux pour lesquels la variable à chaque instant ne peut pas être déterminée avec certitude mais on peut seulement donner la probabilité avec laquelle elle aura telle ou telle valeur. Ce type de signaux représente en fait la plupart des signaux réels, car, comme nous l'avons discuté dans le premier chapitre, toute mesure est soumise à un bruit et est donc intrinsèquement aléatoire.

Pour aborder ce type de signal il faut donc prendre en compte son caractère probabiliste et introduire des *outils statistiques*. Avant même de commencer avec l'étude des signaux aléatoires, faisons donc quelques rappels de théorie de la probabilité pour réintroduire les notions de base que nous allons réutiliser par la suite.

Distribution de probabilité et moments

Considérons donc une **variable aléatoire** physique à mesurer X . Pour l'instant X n'est pas un signal (dépendant du temps) mais une variable unique, une seule mesure, comme par exemple la longueur d'onde émise par un atome ou la température dans une pièce.

Si on mesure X plusieurs fois, on aura donc une série de **réalisations de X** ,

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \dots$$

chacune d'entre elles étant une valeur précise de X obtenue dans la mesure correspondante. Le résultat d'une mesure peut donc varier et il n'est prévisible qu'en termes de probabilité. Si la variable X est continue, alors **la probabilité d'obtenir la valeur x** dans un intervalle dx lors d'une mesure est donné par

$$\mathcal{P}(x < X < x + dx) = P(x) dx, \quad (14.1)$$

avec $P(x)$ la **densité de probabilité** associée. La connaissance de $P(x)$ est le maximum d'information qu'on puisse avoir sur X . Typiquement, on ne connaît $P(x)$ exactement que pour une variable aléatoire qu'on a défini de manière mathématique; pour

une variable réelle issue d'une mesure, dont on ne connaît pas exactement la forme mathématique, on peut tout de même **estimer** $P(x)$ à partir d'un assez grand nombre N de mesures en construisant l'**histogramme** de ces mesures, qui approche $P(x)$ de mieux en mieux lorsque $N \rightarrow \infty$.

D'autre part, la densité de probabilité $P(x)$ est caractérisée par un certain nombre de paramètres, les **moments de la distribution**, dont les plus importants sont ceux d'ordre plus faible :

1. le **moment d'ordre 1** ou **espérance mathématique** de X :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)dx. \quad (14.2)$$

On reconnaît dans cette expression la définition courante de **valeur moyenne** \bar{x} de x .

Une **estimation** opérationnelle de $E[X]$ peut donc être obtenue, à partir d'un grand nombre N de mesures, en calculant la *moyenne d'ensemble* sur ces mesures, qui doit tendre à cette moyenne mathématique pour $N \rightarrow \infty$:

$$E[X] = \bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (14.3)$$

2. Le **moment d'ordre 2** ou **variance** de X , qui n'est rien d'autre que l'espérance mathématique de $(X - \bar{x})^2$:

$$E[(X - \bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 P(x)dx. \quad (14.4)$$

C'est l'expression usuelle de la **variance** σ_X^2 de x .

Une **estimation** opérationnelle de $E[(X - \bar{x})^2]$ sera donc obtenue à partir d'un grand nombre N de mesures, en calculant la variance de ces mesures, qui doit tendre à cette variance mathématique pour $N \rightarrow \infty$:

$$E[(X - \bar{x})^2] = \sigma_X^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (14.5)$$

3. Plus généralement, le **moment d'ordre n** de X est défini comme l'espérance mathématique de $(X - \bar{x})^n$:

$$E[(X - \bar{x})^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^n P(x)dx, \quad (14.6)$$

et peut aussi être estimé à partir des mesures comme

$$E[(X - \bar{x})^n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^n. \quad (14.7)$$

Remarquons que, en général, l'estimation de n'importe quelle fonction $f(X)$ de la variable aléatoire X peut se faire à partir des mesures, en calculant $\sum_{i=1}^N f(x_i)$. Plus N est grand, meilleure sera l'estimation.

On peut montrer que la connaissance de tous les moments d'une distribution de probabilité équivaut à la connaissance (mathématique) de la distribution.

D'autre part, on peut parfois connaître théoriquement la forme mathématique de $P(x)$, grâce à des informations complémentaires sur le type de processus aléatoire qui génère la variable X . Par exemple, on peut savoir que la variable à laquelle on s'intéresse suit une loi de probabilité Gaussienne, ou binomiale, ou de Poisson. Ces distributions ont des formes mathématique relativement simples (que vous pouvez retrouver facilement sur n'importe quel texte de probabilité) pour lesquelles les moment d'ordre plus élevé sont nuls. Il suffit alors d'estimer ces premiers moments pour obtenir toute la distribution, grâce à la connaissance théorique de sa forme générale.

Exemple. Un exemple important est lié au *théorème de la limite centrale*. Ce théorème affirme que si X est la somme de N variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, alors pour grand N elle tend vers une variable aléatoire Gaussienne dont la loi de probabilité est donnée par

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_X^2}\right) \text{ distribution Gaussienne.} \quad (14.8)$$

C'est un exemple particulièrement intéressant parce que des nombreuses variables physiques peuvent être considérées comme somme de variables aléatoires : un exemple pour tous est la vitesse des atomes dans un gaz ou dans un liquide, qui, sur des échelles de temps suffisamment longues, peut être vu comme la somme d'une grands nombre de forces de choc aléatoires.

Covariance

Dans certains cas, l'étude d'un système physique peut nous amener à considérer plusieurs variables aléatoires à la fois. Il peut alors être important de déterminer si ces variables sont indépendantes, ou bien si les valeurs mesurées pour l'une dépendent, et en quelle mesure, de celle mesurées pour l'autre. Cette interdépendance entre deux variables peut être caractérisée par un autre paramètre statistique dont on va se servir plus tard : la **covariance**.

Soient X et Y deux variables aléatoires, alors on définit leur covariance

$$C_{XY} = E[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})(y - \bar{y})P(x, y) dx dy \text{ covariance,} \quad (14.9)$$

où $P(x, y)$ est la densité de probabilité conjointe d'avoir la valeur x pour la variable X et la valeur y pour la variable Y . On note parfois la covariance $\text{cov}(X, Y)$ ou encore σ_{XY} .

Essayons de comprendre le sens de cette quantité en considérant des cas limites :

1. si X et Y sont complètement indépendants, alors on a, par définition,

$$P(x, y) = P(x)P(y) :$$

d'où la covariance est nulle :

$$C_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})P(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \bar{y})P(y)dy = 0 \quad (X \text{ et } Y \text{ indépendants}). \quad (14.10)$$

2. Dans le cas opposé où $X = Y$, es deux sont complètement dépendants, car une fois déterminée la valeur de X on connaît avec certitude la valeur de Y . On obtient alors directement par la définition

$$\begin{aligned} C_{XY} &= E[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})] = E[(X - \bar{x})(X - \bar{x})] & (14.11) \\ &= C_{XX} = \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 & (\text{si } X = Y). \end{aligned}$$

A partir de la covariance il convient alors de définir une quantité adimensionnée appelée **coefficient de corrélation** ρ_{XY} et donnée par

$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (14.12)$$

(avec $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$ et $\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2}$), de telle sorte que

$$\begin{aligned} \rho_{XY} &= 0 & \text{pour } X \text{ et } Y \text{ indépendants,} \\ \rho_{XY} &\in]0, 1[& \text{pour } X \text{ et } Y \text{ partiellement dépendants,} \\ \rho_{XY} &= 1 & \text{pour } X \text{ et } Y \text{ entièrement dépendants } (X = Y). \end{aligned}$$

La figure 14.1 montre des exemples où les deux variables x et y sont variables plus ou moins corrélées. Plus le coefficient de corrélation est grand, plus la la valeur mesuré pour y s'approche de celle de x : les points s'alignent donc sur la droite $y = x$. On peut aussi avoir une dépendance particulière entre le deux variables, $y = f(x)$, vérifiée plus ou moins bien selon le degré de corrélation : les points s'aligneront dans ce cas sur une courbe différente.

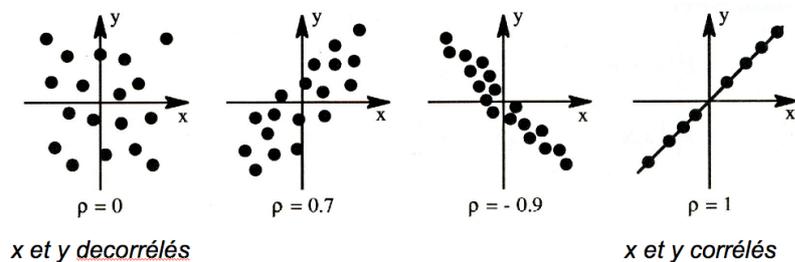


FIG. 14.1 – Exemple de variables plus ou moins corrélées.

14.2 Signaux aléatoires

Considérons maintenant des signaux aléatoires, c'est-à-dire des signaux temporels pour lequel la valeur à *chaque instant de temps* t est une variable aléatoire, dont on ne connaît la valeur que avec une certaine distribution de probabilité :

$$x(t) \text{ variable aléatoire } \forall t.$$

Voyons quelques exemples. AJOUTER Commentaires : signaux discrets ou continus, avec

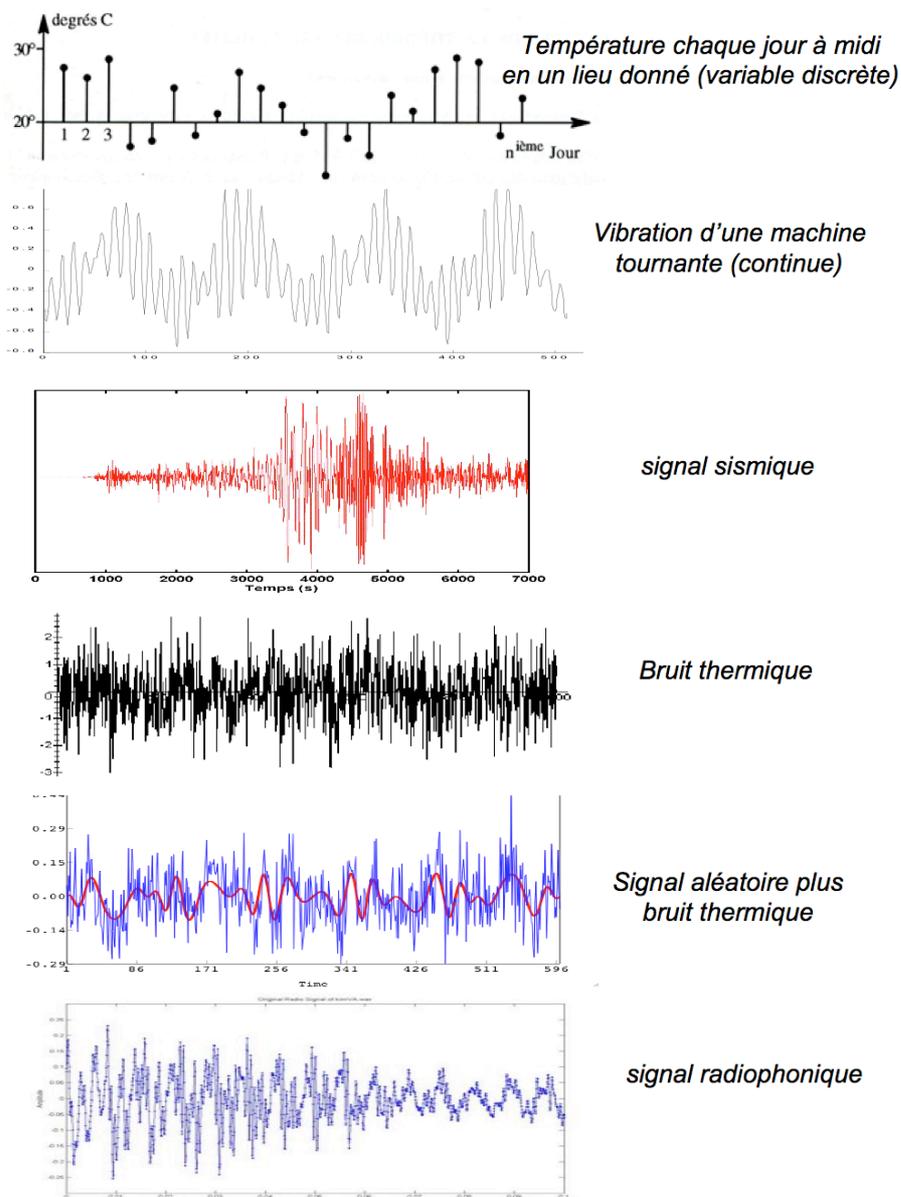


FIG. 14.2 – Exemples de signaux aléatoires.

une certaine régularité et des échelles de temps reconnaissables ou rapidement variables et plus

« imprévisibles », de durée limitée ou pas, éventuellement issu le la somme de plusieurs signaux aléatoires.

Ces signaux peuvent aussi contenir plus ou moins d'information : il est clair par exemple que le signal issu du bruit thermique ne contient pas autant d'information que un signal radio, qui est fait justement pour transporter de l'information. On peut d'ailleurs se demander si ce dernier est véritablement un signal aléatoire : d'une part, en connaissant le

« message » transporté, on doit pouvoir reproduire - et donc prévoir - la même forme de signal ; d'autre part, on peut s'attendre à que ce signal ne soit pas parfait mais affecté d'un certain degré de bruit additionnel. De toutes manières, il est sûr que, si on le prend tel quel, on ne peut pas en prévoir la suite. On est donc porté à le qualifier d'aléatoire et à le traiter comme tel. Et, en réalité, la question est mal posé : même pour le cas du bruit thermique, par exemple dans un gaz, si on pouvait connaître exactement toutes les forces en jeu, la position initiales de tous les atomes, et déterminer les trajectoires de tous les atomes, on pourrait en principe déterminer l'évolution du système de manière parfaite et donc aussi le bruit qu'il en résulte ! Or évidemment ceci n'est pas possible à cause de la grande complexité du système, mais on est donc un peu dans la même situation que pour le signal radio : notre incapacité de prévoir l'évolution du signal vient de notre connaissance incomplète des causes qui le déterminent. Ce même raisonnement peut donc s'appliquer même à des signaux issus de mécanismes bien plus simples, mais dont on ne connaît pas, ou on ne veut pas prendre en compte, l'origine : un bon exemple c'est celui de la température d'une usine au cours de la journée. Cette température évolue dans le temps de manière complètement prévisible car elle a été programmée par un opérateur ; cependant, si on ne veut pas connaître exactement son évolution mais simplement en déterminer par exemple la valeur moyenne ou la variabilité (variance), on peut la traiter comme un signal aléatoire, et lui appliquer les mêmes outils statistiques qu'aux autres signaux aléatoires.

14.2.1 Stationnarité et ergodicité

Statistique

L'étude des signaux aléatoires nécessite les mêmes outils statistiques que celle des variables aléatoires que nous avons vu en introduction, évidemment en prenant en compte la variable temps et donc en définissant les grandeurs statistiques à chaque instant. Par exemple, on introduira l'**espérance mathématique** ou moyenne de $X(t)$ comme

$$E[X(t)] = \bar{x}(t) \quad (14.13)$$

ou sa **variance**

$$E[(X(t) - \bar{x}(t))^2] = \sigma_X^2(t). \quad (14.14)$$

Ces grandeurs sont encore à calculer comme des moyennes d'ensemble : pour chaque instant, l'espérance mathématique d'une fonction $f(X(t))$ du signal $X(t)$ doit être calculée, théoriquement, sur la base de la probabilité $\mathcal{P}(x(t))$ d'avoir la valeur $x(t)$ au

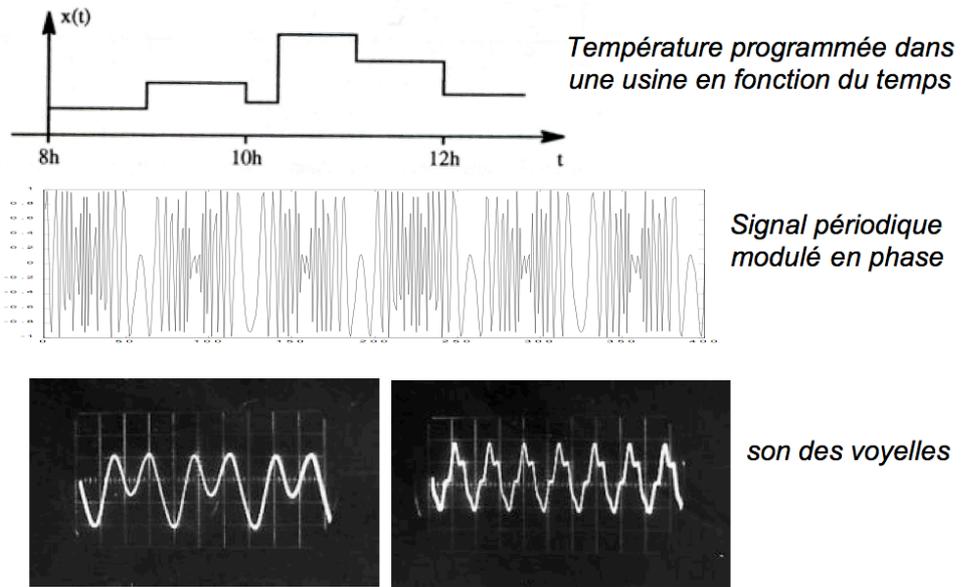


FIG. 14.3 – Exemples de signaux déterministes qu'on peut avoir intérêt à traiter comme signaux aléatoires.

temps t , où, pratiquement, sur la base de l'ensemble des valeurs $x(t)$ obtenues au temps t sur plusieurs réalisations du processus aléatoire.

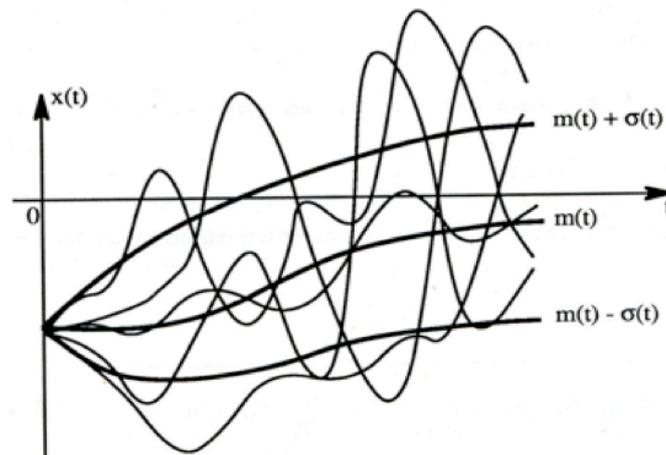


FIG. 14.4 – Caractéristiques statistiques (fonctions du temps) d'un signal aléatoire calculées à chaque instant sur la base d'un ensemble de réalisations.

Stationnarité

Dans certains cas, ces moyennes d'ensemble s'avèrent être indépendantes du temps : on parle alors de **signaux stationnaires** :

un signal aléatoire $X(t)$ est dit **stationnaire** si **toutes ses caractéristiques statistiques sont indépendantes de l'origine des temps**.

On aura donc par exemple

$$\bar{x}(t) = \bar{x} \quad (14.15)$$

$$\sigma_X^2(t) = \sigma_X^2 \quad (\text{si } X(t) \text{ est un signal stationnaire}) \quad (14.16)$$

$$(14.17)$$

etc. pour tous les autres grandeurs statistiques.

On comprend mieux la définition de signal stationnaire en considérant quelques exemples de signaux qui ne le sont pas. En figure 14.5 on a représenté trois exemples de signaux non stationnaires : pour le premier, la moyenne reste constante au cours du temps, mais pas la variance ; pour le deuxième, l'une et l'autre augmentent avec le temps. Le troisième signal semble avoir une moyenne et une variance constantes, mais il est évident que ses caractéristiques générales ne le sont pas, et particulièrement que la fréquence caractéristique de ses oscillations varie au cours du temps : nous n'avons pas encore sous la main une méthode statistique appropriée pour estimer cette grandeur (on devine qu'il va s'agir typiquement d'en calculer le spectre), mais on peut de toutes manières dire que ce signal n'est pas stationnaire, car par définition *toutes* ses caractéristiques statistiques doivent être indépendantes du temps.

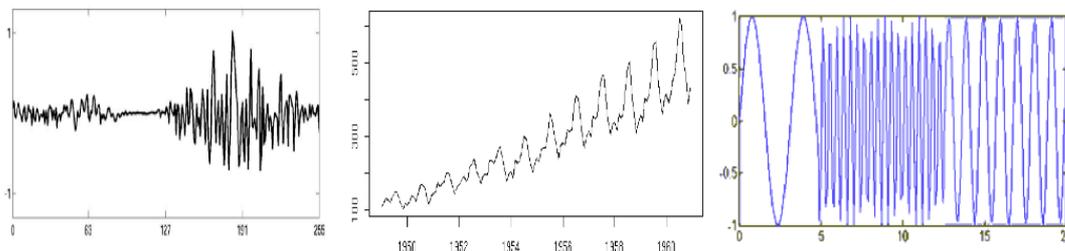


FIG. 14.5 – Exemples de signaux non stationnaires.

Ergodicité

Une autre caractéristique importante d'un signal aléatoire est son ergodicité. Dans la pratique, on ne dispose souvent que d'une seule réalisation du phénomène aléatoire. Il devient donc difficile de caractériser statistiquement le signal aléatoire : comment faire des moyennes d'ensemble ? L'hypothèse d'ergodicité consiste à admettre que l'évolution d'un signal aléatoire au cours du temps apporte la même information qu'un ensemble de réalisations. Par conséquent, la moyenne d'ensemble et la moyenne temporelle coïncident :

stationnaire, mais pas ergodique : on ne peut pas remplacer la moyenne d'ensemble, qui prends en compte toutes les différentes réalisations, par une moyenne temporelle sur l'une d'entre elles. La vérification de l'hypothèse d'ergodicité peut dépendre de quel type

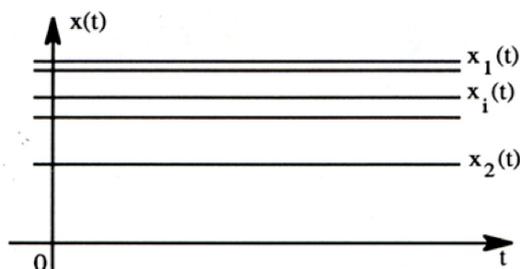


FIG. 14.7 – Signal stationnaire non ergodique.

de statistique on veut faire, de quelles expériences on veut comparer. Si par exemple on effectue une mesure de la tension due au bruit de fond d'un amplificateur chaque jour à la même heure, et donc dans les mêmes conditions, et si on peut supposer que le temps d'échauffement soit négligeable et les signaux obtenus stationnaires (premiers trois graphes de la figure 14.8), alors on peut raisonnablement supposer que les moyennes temporelles effectuées un jour donné ne soient pas différentes de celles faites les autres jours et des moyennes d'ensemble, et assumer l'ergodicité du signal. En revanche, on peu vouloir étudier le même bruit de fond pour des amplificateurs différents (derniers quatre graphes de la figure 14.8), on peut être confronté à des différences intrinsèques à l'électronique de chacun : faire l'hypothèse d'ergodicité signifie en ce cas assumer que la moyenne sur l'ensemble des amplificateurs est équivalente à la moyenne temporelle sur l'un d'entre eux, ce qui n'est pas forcément vrai car les amplificateurs peuvent se comporter de manière différente. On devra donc soit refuser cette hypothèse, soit essayer de montrer qu'elle est valable en comparant moyennes temporelles et moyennes d'ensemble (comme vous le verrez dans un TP).

Stationnarité et ergodicité sont deux hypothèses importantes car elle facilitent considérablement l'étude des signaux aléatoire et en particulier de leur propriétés spectrales, comme nous allons le voir.

14.2.2 Fonction de corrélation

Fonction de covariance

Revenons maintenant à la question de l'intercorrélation, mais en considérant deux signaux temporels à la place de deux simple variables aléatoires. Par exemple on peut vouloir comparer le flux radiatif provenant du soleil $x(y)$, mesuré pendant une journée, à la température $y(t)$ au sol enregistrée en même temps au même endroit (figure 14.9). En observant les données, on se rend compte facilement que les deux quantités sont en effet corrélées l'une à l'autre pendant la journée, comme on peut s'attendre car le flux radiatif entraîne une augmentation de température, mais on remarque la présence d'un certain retard τ_0 entre l'arrivée du flux et l'augmentation de température. Pour mettre

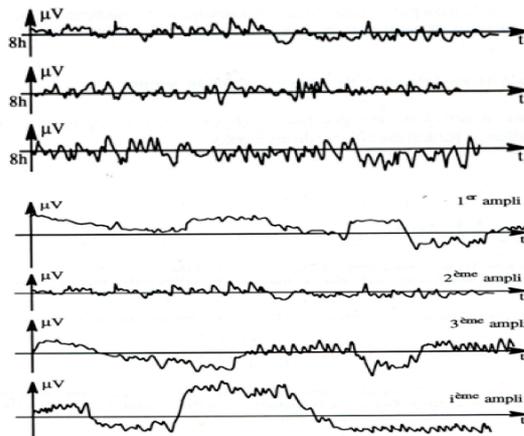


FIG. 14.8 –

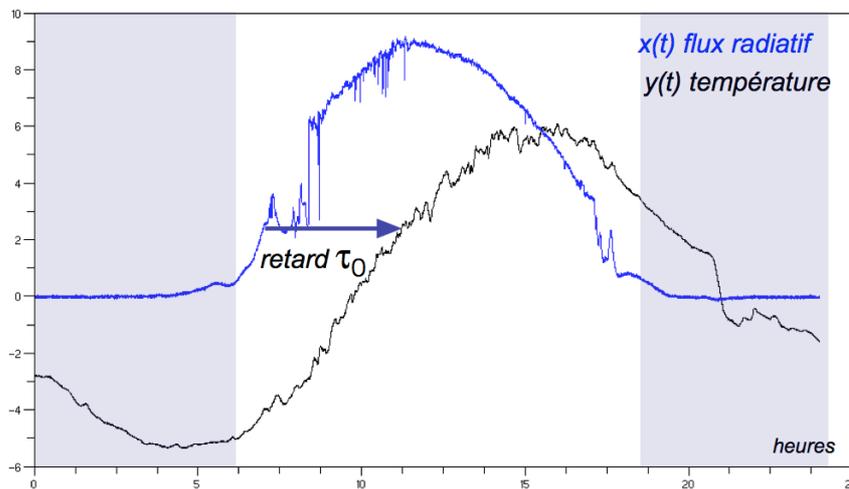


FIG. 14.9 – Température (noir) et flux radiatif (bleu) au sol pendant une journée (en grisée les périodes de nuit).

en évidence la corrélation entre ces deux signaux il ne suffira donc pas de calculer la covariance des deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ à un temps t donné. Il est plutôt plus intéressant de calculer la covariance entre le signal $x(t)$ et le signal **retardé d'un temps τ** $y(t+\tau)$ en fonction du retard τ (et du temps t) : c'est la **fonction de covariance entre deux signaux**

$$C_{xy}(t, \tau) = E[(X(t) - \bar{x}(t))(Y(t + \tau) - \bar{y}(t + \tau))]. \quad (14.22)$$

On aura une covariance maximum lorsque τ est égale au retard τ_0 qui intervient effectivement entre les deux signaux.

Corrélation

Cette idée de calculer l'interdépendance entre deux signaux pris à deux temps différents suggère qu'on pourrait faire la même chose pour un seul signal $x(t)$, en le comparant à lui-même à un temps décalé. Considérons donc la covariance entre $x(t)$ et $x(t + \tau)$:

$$C_{xx}(t, \tau) = E[(X(t) - \bar{x}(t))(X(t + \tau) - \bar{x}(t + \tau))]. \quad (14.23)$$

Quelle information nous donne cette grandeur? Quelques parts, on peut dire qu'elle mesure la **mémoire du signal** : si le signal retardé $x(t + \tau)$ dépend de $x(t)$, la covariance sera non nulle, alors qu'elle sera zéro si la valeur du signal en T n'a aucune influence sur celle en $t + \tau$. Or la covariance C_{xx} dépend de τ mais aussi de t : la dépendance entre les deux signaux peut changer avec le temps initial. Cependant, les choses se simplifient beaucoup dans le cas d'un signal stationnaire :

si le signal $x(t)$ est stationnaire, alors

$$C_{xx}(t, \tau) = C_{xx}(0, \tau) \quad (14.24)$$

et on peut définir la **fonction de corrélation** $\varphi_{xx}(\tau)$

$$\varphi_{xx}(\tau) = C_{xx}(0, \tau) \quad \text{fonction de corrélation de } x(t). \quad (14.25)$$

De par sa définition, $\varphi_{xx}(\tau)$ mesure donc l'interdépendance entre un signal stationnaire à un temps donné et le même signal retardé, en fonction du retard. Elle contient beaucoup d'information et nous renseigne sur la nature du signal dans plusieurs sens :

1. **Périodicités cachées.** D'une part, la fonction de corrélation peut être utile pour étudier un signal aléatoire mais caractérisé par des événements répétés avec une fréquence caractéristique. Considérons par exemple un morceau musical ; dans la figure 14.10, le signal temporel d'une musique de Strauss. Même si le signal n'est

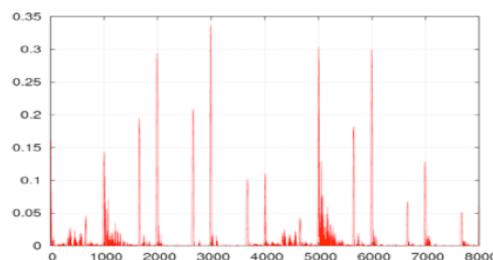


FIG. 14.10 – Signal temporel issu de la musique 'Danube bleu' de Strauss, en fonction du temps en secondes.

pas périodique, le rythme musical fait qu'il y a un certain degré de répétition : on peut alors s'attendre à que la fonction de corrélation soit sensible à cette répétition, parce que le signal retardé

» au

ble plus

signal d'origine pour des retards multiples de la période typique de répétition T_0 que pour d'autres retards. Et en effet, la fonction corrélation qu'on obtient, montrée

«rassem-

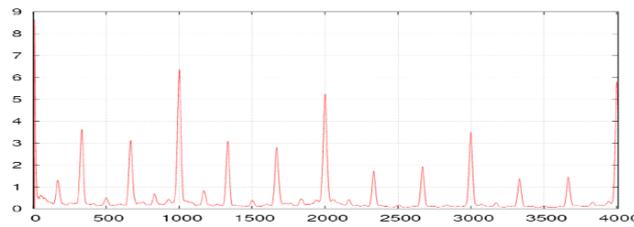


FIG. 14.11 – Fonction de corrélation pour le signal de musique 'Danube bleu' de Strauss, en fonction du retard en millisecondes.

en figure 14.11, présente des pics bien nets pour tous les retards $\tau = mT_0$. La fonction de corrélation permet donc d'identifier des **périodicités cachées dans un signal**.

2. **Mémoire.** D'autre part, même en l'absence de périodicité dans le signal, la fonction de corrélation nous renseigne sur le degré de **persistance** d'un signal : si le signal a tendance à varier doucement, donc à rester proche d'une valeur initiale pendant un certain temps, alors $\varphi_{xx}(\tau)$ sera non nulle pour des valeurs du retard suffisamment petites, pour s'annuler seulement pour des retards tels que le signal a perdu toute dépendance de sa valeur initiale. Au contraire, pour un signal qui varie très rapidement, la valeur à un temps retardé aura tendance à être très rapidement décorrélée de la valeur initial, et la fonction de corrélation s'annulera donc beaucoup plus rapidement (figure 14.12). Dans ce sens, $\varphi_{xx}(\tau)$ est une mesure de

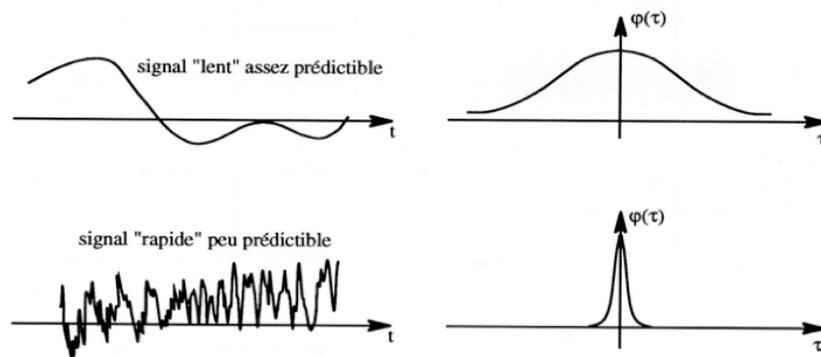


FIG. 14.12 – Cas de signaux

» ou

» et fonctions de corrélation correspondantes.

«lent

«rapide

la **mémoire** du signal $x(t)$ (et donc du phénomène physique qui est à l'origine du signal), et du degré de dépendance de la valeur du signal à un instant donné de son histoire précédente.

3. Anti-persistance. Un signal peut donc avoir une certaine persistance, mais le cas opposé existe aussi : on parle ainsi de signal **anti-correlé** quand après un certain retard sa valeur a tendance à être opposée à celle initiale. Sa corrélation devient alors

«bonne
 mémoire »
 négative en correspondance de ce retard. Cela signifie aussi que le signal a tendance à osciller sur une échelle de temps donné, car une fois qu'il a pris le signe opposé, il va renverser son signe encore une fois : il peut varier rapidement mais il n'a pas de moins une mémoire de son histoire précédente. Des exemples possibles (mais pas sûrs !) d'un tel comportement peuvent être envisagés dans l'évolution de la température de la planète ou dans l'évolution des cours boursiers.

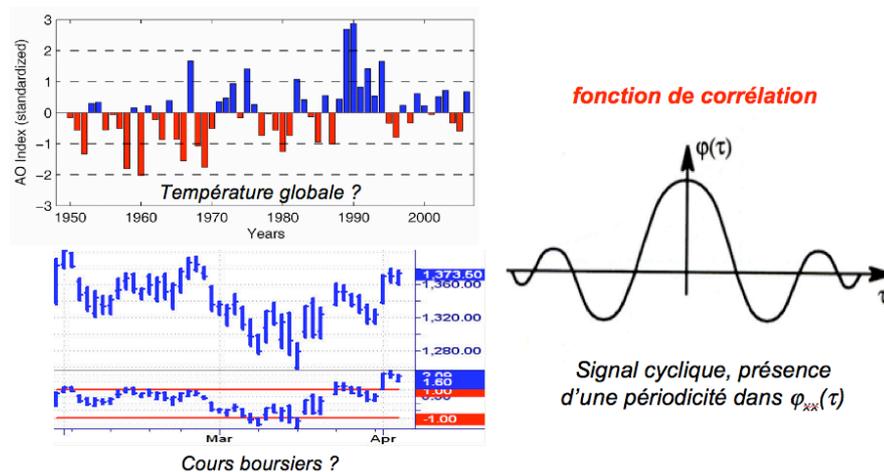


FIG. 14.13 –

En résumé, la fonction de corrélation nous fournit une information assez riche sur les propriétés d'un signal aléatoire et particulièrement sur son évolution temporelle.

Propriétés de la fonction de corrélation

Il est utile de connaître les **principales propriétés de la fonction de corrélation** :

- Par définition, $\varphi_{xx}(0) = E[(X(t) - \bar{x})(X(t) - \bar{x})] = \sigma_{xx}^2$:
la fonction de corrélation évaluée à retard nul $\tau = 0$ coïncide avec la variance du signal.
- $\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{xx}(-\tau)$:
La fonction de corrélation est paire.
- $|\varphi_{xx}(\tau)| \leq \varphi_{xx}(0) \forall \tau$:
Le module de la fonction de corrélation est toujours inférieure à sa valeur en $\tau = 0$: le signal $x(t)$ est toujours parfaitement corrélé au signal $x(t)$ lui même, sans retard !
- En général, $\varphi_{xx}(\tau) \rightarrow 0$ pour $\tau \rightarrow \infty$:
un signal aléatoire finit par perdre l'information sur sa valeur d'origine au tendre à l'infini du retard. Ceci n'est pas vrai pour un signal déterministe, dont l'évolution à tous temps est déterminé par sa valeur initiale.

- Dans des nombreux cas, on peut définir une **durée de corrélation** τ_0 caractéristique du phénomène aléatoire, donnant justement une mesure du retard après lequel le signal a perdu la mémoire de sa valeur initiale. Plusieurs définitions sont possibles. Un choix simple est de définir τ_0 comme le temps tel que le module de la fonction de corrélation est divisé par deux :

$$|\varphi_{xx}(\tau_0)| = \frac{\varphi_{xx}(0)}{2} \quad (\text{déf. 1}). \quad (14.26)$$

Si $\varphi_{xx}(\tau)$ décroît de manière exponentielle, comme c'est souvent le cas¹, on peut aussi être un peu plus précis et calculer τ_0 comme l'échelle caractéristique de cette décroissance (en faisant un fit de la fonction pour τ assez grand par exemple) :

$$|\varphi_{xx}(\tau)| \propto \exp(-\tau/\tau_0) \quad (\text{déf. 2}). \quad (14.27)$$

14.3 Cas des signaux déterministes

Nous venons d'introduire la fonction de corrélation comme une mesure du degré de mémoire d'un signal. Quels sont les cas limites de ce point de vue ? Existe-t-il des signaux avec une mémoire infinie ou sans mémoire ? Pour le premier cas, nous connaissons la réponse : un signal complètement déterministe est, par définition, complètement déterminé par sa valeur initiale, via sa loi d'évolution. On peut toujours calculer la covariance $C_{xx}(t, \tau)$ pour un tel signal, dont l'allure dépendra de la forme du signal lui-même ; si le signal peut aussi être considéré comme stationnaire, on peut aussi définir sa fonction de corrélation. Pour pouvoir considérer le signal comme stationnaire il faut que ses propriétés ne dépendent pas de l'origine des temps : il nous faut donc exclure par exemple toutes les fonctions qui s'annulent pour $t \rightarrow \infty$: l'exemple typique d'un signal déterministe stationnaire est par contre un signal périodique. Dans ce cas, la fonction de corrélation est elle aussi parfaitement périodique, avec la même période, car elle est maximale à chaque fois que $x(t + \tau) = x(t)$.

Il est aussi intéressant de voir l'allure de la fonction corrélation d'un signal périodique auquel on a rajouté du bruit (figure 14.14) : dans ce cas, la périodicité cachée du signal, peu visible sur le signal lui-même, résulte assez clairement dans l'allure oscillante de la fonction de corrélation, bien que estompée pour des retards de plus en plus importants. Le bruit additif finit par détruire la corrélation du signal.

14.4 Un signal sans mémoire : le bruit blanc

L'autre cas extrême qui nous intéresse est le cas d'un signal sans aucune mémoire. Un signal rigoureusement sans mémoire n'existe pas naturellement, mais il est très utile d'introduire un signal idéal avec cette propriété car il est un bon modèle pour des nombreux cas réels. On l'appelle **bruit blanc**, et on le définit comme suit :

¹Il est intéressant de noter cependant que certains phénomènes aléatoires sont caractérisés par une décroissance particulièrement lente de la fonction de corrélation, tellement lente qu'il devient impossible de définir une durée de corrélation finie. Typiquement la fonction $\varphi_{xx}(\tau)$ décroît dans ces cas comme une puissance de τ . On parle alors de **corrélation longue portée**.

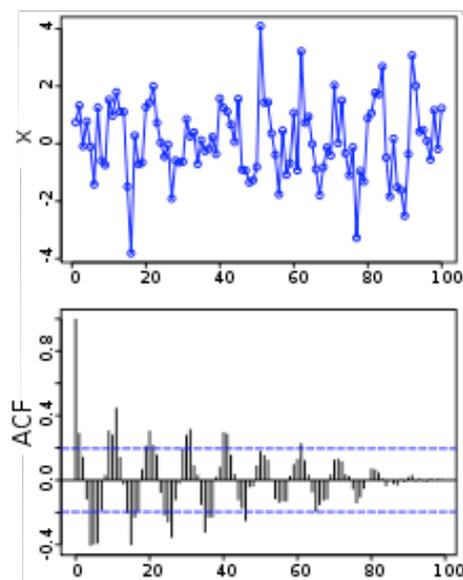


FIG. 14.14 –

Le **bruit blanc** $b(t)$ est un signal stationnaire idéal pour lequel

$$\bar{b}(t) = 0 \quad \text{signal de moyenne nulle} \quad (14.28)$$

$$v_{P_{bb}}(\tau) = \gamma \delta(\tau) \quad \text{fonction de corrélation nulle pour } \tau \neq 0. \quad (14.29)$$

Pour n'importe quel retard $\tau \neq 0$, la valeur de $b(t+\tau)$ est indépendante de celle de $b(t)$: le signal n'a pas de mémoire, il est immédiatement décorrélé de la valeur précédente. Par contre nous savons que la corrélation ne peut pas s'annuler en $\tau = 0$, et on a toujours $v_{P_{bb}}(0) = \sigma_{bb}^2 = \infty$ pour un bruit blanc : sa variance est infinie.

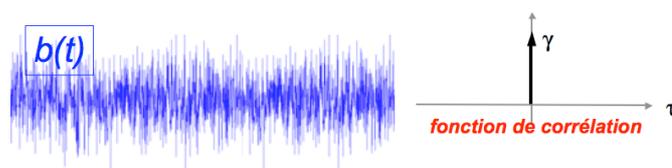


FIG. 14.15 –

Pourquoi appelle-t-on ce signal $b(t)$ un **bruit** ? C'est parce que ce signal est un bon modèle de bruit, en particulier du bruit thermique. Nous savons que la mesure physique est toujours affectée d'un bruit thermique résultant de la somme d'un grand nombre de phénomènes aléatoires (les chocs des molécules dans un gaz ou des électrons dans un conducteur) Ces forces microscopiques agissent sur des échelles de temps données et en général très courtes par rapport au temps d'observation, et nous savons que si on observe

le signal résultant sur des pas de temps² Δt grands par rapport aux temps caractéristiques de ces forces alors chaque mesure sera indépendante de la mesure précédente. Sur cette échelle de temps le signal sera donc totalement aléatoire et décorrélé : c'est pour cela que le bruit blanc est un bon modèle pour ce bruit, à l'échelle d'observation Δt .

Et pourquoi bruit

«blanc

» ? Pour répondre à cette question, il faut aller un peu plus loin dans la théorie des signaux aléatoires, et arriver finalement à la généralisation de la notion de **spectre** pour ce signaux.

14.5 Spectre d'un signal aléatoire

Nous avons parlé de périodicités cachées dans un signal. Pourquoi ne pas les rechercher en faisant une transformée de Fourier, comme nous l'avons appris ? Pour un signal déterministe, cette opération permet d'obtenir le spectre du signal et donc les fréquences caractéristiques, qui donnent généralement des pics bien identifiables sur le spectre. En effet, la détermination d'un spectre pour un signal aléatoire est un peu plus délicate.

Le problème est lié justement au caractère aléatoire du signal. Pour avoir une information pertinente sur le processus aléatoire, nous avons besoin de faire recours à une analyse statistique, moyennant sur des grands nombres de réalisation (ou sur des temps très longs pour des signaux ergodiques). Une seule réalisation n'est généralement pas suffisante, car elle ne contient pas suffisamment d'information sur le processus aléatoire : en effet, si on calcule la TF d'un signal aléatoire individuel, on n'obtient en général que peu d'information. La figure 14.16 montre un exemple où on a calculé la TF de trois réalisations d'un même phénomène aléatoire.

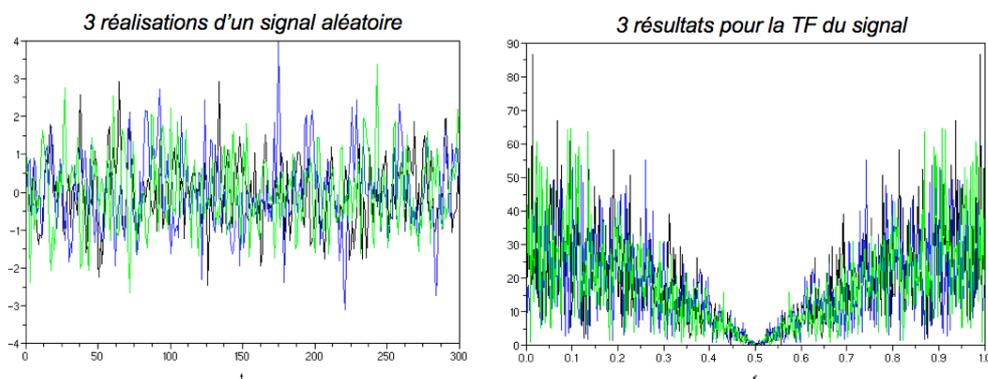


FIG. 14.16 –

On peut en déduire que la TF d'un signal aléatoire n'est pas un élément caractéristique. Ce qu'il nous faudrait, c'est probablement de calculer la moyenne des TF

²Remarque : nous faisons implicitement référence dans cette section au bruit blanc *continu*. Le cas du bruit thermique observé sur une échelle de temps Δt correspond plutôt à un bruit blanc échantillonné donc discret : dans ce cas, la fonction de corrélation est aussi une fonction discrète et vaut σ_{bb}^2 en zéro, zéro partout ailleurs.

d'un grand nombre de réalisations du même signal. C'est une solution pratique à laquelle on va finir par arriver ; mais nous allons suivre ici une autre piste.

Nous pouvons en effet mieux exploiter ce que nous avons fait jusqu'ici pour l'étude des signaux aléatoires, et nous dire que nous avons déjà un outil statistique qui contient de l'information par exemple sur la répétition du signal : c'est la fonction de corrélation. Cette fonction du temps présente en effet des oscillations caractéristiques si le signal contient des périodicités cachées, décroît à une vitesse caractéristique de la perte de mémoire dans le signal : on peut donc se dire que la **TF de la fonction de corrélation** pourrait être un bon candidat pour obtenir une sorte de spectre du signal, car on peut s'attendre à des pics caractéristiques de ses oscillations, à une TF d'autant plus étroite que la fonction de corrélation est étendue dans le temps... Voyons donc qu'est-ce qu'on peut obtenir.

14.5.1 La densité spectrale de puissance (DSP)

Définissons la **Densité Spectrale de Puissance (DSP)** d'un signal aléatoire $X(t)$ comme la fonction de la fréquence f donnée par la TF de la fonction de corrélation du signal :

$$S_{xx}(f) = TF[\varphi_{xx}(\tau)] \quad \text{DSP de } x(t). \quad (14.30)$$

Les deux **propriétés principales de la DSP** suivent directement de celles de $\varphi_{xx}(\tau)$:

- $S_{xx}(f) = S_{xx}(-f)$:
La DSP est une fonction paire ;
- $S_{xx}(f) > 0 \forall f$:
La DSP est toujours positive.

la figure 14.17 montre schématiquement quelques exemples de TF de fonctions de corrélation mettant en évidence les caractéristiques typiques de la DSP : comme nous l'avons prévu, elle présente des pics en présence de périodicité de la fonction de corrélation (et donc du signal) ; sa largeur est inversement proportionnelle à la largeur de la fonction de corrélation et donc de la durée de corrélation caractéristique du signal. En général, la DSP tombe à zéro pour $f \rightarrow \infty$, comme conséquence de la présence d'une vitesse maximale de variation de $\varphi_{xx}(\tau)$, ce qui permet de définir une largeur de bande. Il y a cependant une exception importante à ce comportement et c'est le cas où la fonction de corrélation présente une variation infiniment rapide : c'est le cas du bruit blanc, pour lequel

$$\varphi_{bb}(\tau) = \gamma \delta(\tau) \Rightarrow S_{bb}(f) = \gamma \quad \text{DSP de } b(t). \quad (14.31)$$

Le bruit blanc a une densité spectrale de puissance plate, constante : d'ici vient son nom, par analogie avec la lumière blanche, où toutes les fréquences sont également représentées avec la même intensité.

14.6 Théorème de Wiener-Khintchine

Mais pourquoi la TF de la fonction de corrélation s'appelle-t-elle *sité spectrale de puissance*

» ?

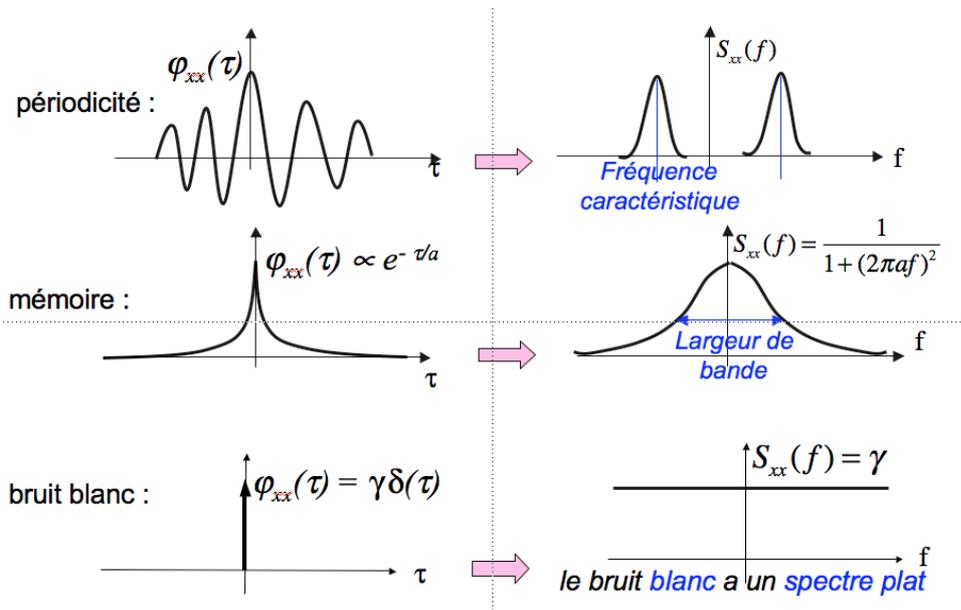


FIG. 14.17 –

Pouvons nous montrer que $S_{xx}(f)$ contient bien l'information sur comment la *puissance* (l'énergie) du signal est distribuée entre les différents modes d'oscillation, les différentes fréquences? C'est vraiment un *spectre*, au sens où nous l'avons entendu jusqu'à maintenant?

La réponse à ces questions - affirmative! - vient d'un théorème important que nous allons énoncer sans démonstration, et qui va nous permettre de réinterpréter la DSP.

Théorème de Wiener-Khintchine. Soit $x(t)$ un signal ergodique, stationnaire et centré (tel que $\bar{x} = 0$)³. On peut alors prouver que

$$TF[\varphi_{bb}(\tau)] \equiv S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T x(t) e^{-i2\pi ft} dt \right|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \quad (14.32)$$

où $X_T(f)$ est la TF de $x(t)$ limité à l'intervalle $[0, T]$:

$$\begin{aligned} X_T(f) &= TF[x_T(t)], \\ x_T(t) &= x(t) \text{Rect}(0 \text{ à } T). \end{aligned}$$

14.6.1 DSP et puissance

Le théorème de Wiener-Khintchine est important pour deux raisons. La première vient de la relation de Parseval, qui nous dit que l'**énergie** d'un signal s'écrit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt.$$

³Si le signal n'est pas centré on pourra toujours le centrer en soustrayant sa valeur moyenne, $x(t) - \bar{x}$ centré.

On peut alors appliquer le théorème de Parseval à la fonction limitée $x_T(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 dt,$$

puis diviser par T et faire la limite pour $T \rightarrow \infty$: on obtient

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 dt :$$

en supposant de pouvoir inverser la limite avec l'intégration (vrai dans la plupart des cas), on reconnaît dans le premier terme l'intégrale de la DSP de $x(t)$, dans le deuxième la puissance $P(x)$ de $x(t)$, car

$$P(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \quad (14.33)$$

et on considère que le signal $x(t)$ est nul pour $t < 0$. On obtient donc au final

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S_{xx}(f)|^2 df = P(x) : \quad (14.34)$$

la densité spectrale de puissance porte donc bien son nom ! Il s'agit bien de la **distribution de la puissance du signal parmi les différentes fréquences** ; en d'autres mots $|S_{xx}(f)|^2$ est la fraction de puissance qui est engagée sur le mode d'oscillation de fréquence f . Le théorème de Wiener-Khintchine permet d'interpréter la DSP comme une distribution de puissance.

Une dernière considération utile. On reconnaît, dans la puissance définie par l'équation (14.35), la moyenne temporelle du module carré du signal $x(t)$, effectuée sur une durée T . Comme le signal est ergodique, cette moyenne coïncide avec la moyenne d'ensemble de $|x(t)|^2$, et donc avec la **variance** du signal. D'autre part, nous savons que la variance est égale à la valeur de la **fonction de corrélation** en $t = 0$.

On a donc, pour tout signal $x(t)$ (stationnaire et ergodique), la série de relations suivante entre DSP, puissance, variance et fonction de corrélation :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S_{xx}(f)|^2 df = P(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sigma_x^2 = \varphi_{xx}(0). \quad (14.35)$$

Il est utile de se rappeler ces relations lorsqu'on veut calculer une de ces grandeurs !

14.6.2 Estimateurs de la DSP : le périodogramme

D'autre part, le théorème de Wiener-Khintchine nous a permis de relier la DSP, que nous avons défini initialement comme la TF de la fonction de corrélation, à la TF du signal lui-même. De manière exacte, la DSP s'écrit selon l'équation 14.32 comme

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2,$$

c'est à dire comme le rapport entre le module carré de la TF du signal et sa durée, pour une **durée infinie**.

Pratiquement, lorsqu'on analyse le signal issu d'une mesure, on aura affaire à un signal de durée limitée : tout ce qu'on pourra calculer est alors la grandeur

$$\frac{1}{T}|X_T(f)|^2, \quad (14.36)$$

avec T la durée du signal. Le théorème de Wiener-Khintchine nous permet de comprendre que la DSP est bien liée à la TF du signal de la même manière que la puissance pour un signal déterministe : c'est le **module carré de la TF du signal** qui est **associé à sa distribution de puissance**. Pour un signal de durée finie, cependant, la grandeur de l'équation 14.36 peut être considérée comme un **estimateur** de la DSP, mais, comme nous l'avons vu, il ne contiendra pas beaucoup d'information, surtout pour des durées T pas très importantes.

On peut cependant améliorer la statistique en recourant à une **moyenne d'ensemble** : en moyennant $\frac{1}{T}|X_T(f)|^2$ sur plusieurs réalisations du signal, on obtient ce qu'on appelle le **périodogramme** :

$$\text{Périodogramme} = \langle \frac{1}{T}|X_T(f)|^2 \rangle_{N \text{ réalisations}} \sim S_{xx}(f).$$

La moyenne sur plusieurs réalisation

pense

»

partiellement la durée finie du signal enregistré (ergodique) et permet de mieux approcher la limite théorique de définition de la DSP.

De la même manière, on peut obtenir une estimation raisonnable de la fonction de corrélation d'un enregistrement de durée limité d'un signal en moyennant sur plusieurs réalisation. Cela s'appelle le **corrélogramme** :

$$\text{Corrélogramme} = \langle \varphi_{x_T x_T}(t) \rangle_{N \text{ réalisations}} \sim \varphi_{xx}(t).$$

la figure 14.18 montre un exemple d'utilisation de périodogramme et corrélogramme sur un signal aléatoire construit de manière à contenir une partie corrélé. On voit bien comment, à l'augmenter du nombre de réalisations, les estimateurs approchent de mieux en mieux leur limite théorique (une fonction triangle pour la fonction de corrélation, d'où un sinus cardinal carré pour la DSP).

14.6.3 Spectres des signaux aléatoires et des signaux déterministes

Une dernière remarque s'impose à propos de ces définitions et des définitions qu'on a pu introduire dans les cours précédents à propos des signaux déterministes. Nous venons de voir que la DSP est bien une distribution de puissance parmi les différentes fréquences, et représente donc le spectre du signal aléatoire, au même sens que le module carré de la TF d'un signal déterministe représente son spectre d'énergie (cours 4). On a donc écrit, d'une part, pour un signal $x(t)$ **déterministe**

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df,$$

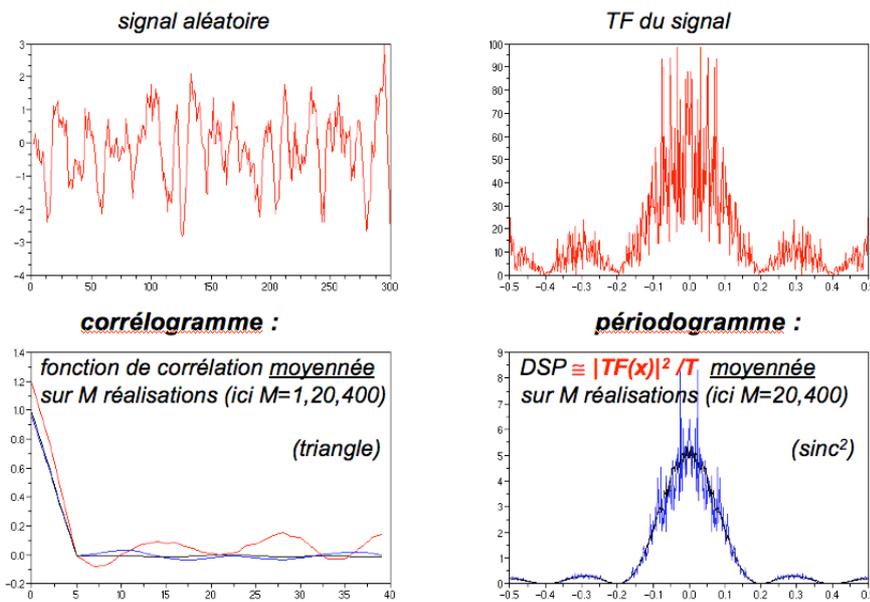


FIG. 14.18 –

et d'autre part ici, pour un signal $x(t)$ **aléatoire**, nous avons

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S_{xx}(f)|^2 df$$

avec

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2.$$

Compte tenu du fait que la DSP est homogène à une transformée de Fourier au carré divisée par un temps, et que la puissance est une énergie par unité de temps, les deux définitions sont donc complètement cohérentes, ce qui nous autorise, le cas échéant, à calculer une DSP aussi pour un signal déterministe, de la même manière que pour un signal aléatoire, pour en obtenir la densité spectrale de puissance. Évidemment, dans ce cas, il n'est plus nécessaire de faire intervenir une évaluation statistique de cette grandeur : par exemple pour obtenir une bonne estimation de la DSP, on obtiendra exactement le même résultat avec une seule réalisation qu'en faisant une moyenne sur plusieurs réalisations (de faire un périodogramme).

Il peut aussi être utile de rappeler ici comment calculer ces grandeurs **pour un signal échantillonné** x_k , $k = 0 \dots N - 1$. Nous avons déjà vu la relation entre la TF $X(f)$ et la transformée de Fourier rapide (discrète) ou FFT $X_D(f)$ fait intervenir le pas d'échantillonnage Δt ,

$$X(f) = X_D(f) \Delta t \quad (\text{défini pour les } f = f_n, n = 0 \dots N - 1) \quad (14.37)$$

et que par conséquent on a

$$E = \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2 \Delta t = \sum_{n=0}^{N-1} |X_D(f_n)|^2 \Delta t^2 \Delta f = \sum_{n=0}^{N-1} |X_D(f_n)|^2 \frac{\Delta t}{N} \quad (14.38)$$

(car $\Delta f = 1/T_e = 1/N \Delta t$). La DSP (son estimateur) s'obtient donc en divisant le module carré de la TF pour la durée du signal échantillonné, $T_e = N \Delta t$:

$$S_{xx}(f_n) = \frac{1}{N \Delta t} |X_D(f_n) \Delta t|^2 = \frac{\Delta t}{N} |X_D(f_n)|^2 \quad (14.39)$$

et la puissance en intégrant la DSP sur la fréquence, ou bien en divisant l'énergie par T_e . Le résultat est le même :

$$P = \frac{1}{T_e} \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2 \Delta t = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} |X_D(f_n)|^2. \quad (14.40)$$

14.7 Et pour conclure... Réponse d'un système linéaire à un signal aléatoire

Notre dernière question réunit l'étude des signaux aléatoire et le problème qui a fait de fil conducteur pour tout le cours : la réponse d'un système physique linéaire à une signal. Considérons donc la réponse d'un système linéaire,

$$\begin{array}{ccccc} e(t) = x(t) & \rightarrow & \boxed{\text{EDL}} & \rightarrow & s(t) = y(t) \\ \text{entrée} & & = & & \text{sortie} \\ & & H(p) \text{ ou } H(f), & & \\ & & h(t) & & \end{array}$$

pour un signal d'entrée $x(t)$ **aléatoire**, avec $H(p)$ la transmittance et $h(t)$ la réponse impulsionnelle associés à l'EDL du système. Que peut-on dire de la sortie $y(t)$?

- Le signal en sortie $y(t)$ est aussi un signal **aléatoire**. Le caractère probabiliste du signal en entrée est nécessairement transmis à la sortie : si l'entrée est imprévisible, la sortie le sera aussi. Il faudra donc caractériser $y(t)$ de manière statistique, de même que pour $x(t)$, en étudiant les grandeurs qu'on a développé en ce cours.
- On sait aussi que la relation entre entrée et sortie que nous avons construit pour le système linéaire n'ont pas changé : on a toujours

$$y(t) = x * h(t), \quad (14.41)$$

$$Y_L(p) = X_L(p)H(p). \quad (14.42)$$

A partir de ces relation il est donc possible de lier les caractéristiques de $y(t)$ à celles de $x(t)$. Nous n'allons pas rentrer dans ces calculs qui sont parfois un peu lourds, mais nous allons voir les quelques résultats importants qu'ils permettent d'obtenir.

- Premièrement, on montre que

$$\text{Si } \bar{x}(t) = \bar{x} = \text{constante, alors } \bar{y}(t) = H(0) \bar{x} : \quad (14.43)$$

la valeurs de la transmittance en zéro permet d'obtenir la **valeur moyenne** de $y(t)$ à partir de celle de $x(t)$.

- Plus important encore, on a pour la **fonction de corrélation** et pour la **DSP** deux relations liées l'une à l'autre :

$$\varphi_{yy}(\tau) = \varphi_{xx}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \quad (14.44)$$

et

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f) |H(f)|^2. \quad (14.45)$$

Remarquons que, les deux grandeurs statistiques étant liées au carré du signal, les fonctions de passage de $x(t)$ à $y(t)$, $h(t)$ et $H(T)$, interviennent à la puissance 2 dans ces formules⁴.

Ces résultats sont très importants et vous les utiliserez à la fois en TD et en TP.

Example. Considérons par exemple le cas où le signal en entrée est un bruit blanc $b(t)$. Sa DSP est donc une fonction constante. Si le système physique est caractérisé par une transmittance $H(f)$ qui décroît comme $1/f$, alors, en sortie, on aura un signal tel que

$$S_{yy}(f) = \text{constante} |H(f)|^2 \sim 1/f^2 :$$

il ne s'agit donc plus d'un bruit blanc mais d'un bruit dont la DSP décroît comme $1/f^2$, ce qu'on appelle un «bruit rouge» car il est plus centré sur les basses fréquences.

On voit bien dans cet exemple que le passage du bruit à travers le système physique correspond à un **filtrage** : on peut éliminer une partie du bruit, celle à haute fréquence, par ce biais. On comprend donc tout de suite l'intérêt d'une telle opération dans le cas où on souhaite détecter un signal dans du bruit : mais comment les choses se passent-elles exactement ?

14.7.1 Filtrage d'un signal bruité

Considérons donc le cas d'un signal
» $z(t)$ mélangé avec un bruit $b(t)$ (qu'on va appeler $b(t)$ même s'il ne s'agit pas nécessairement d'un bruit blanc dans ce cas). Faisons, de plus, l'hypothèse que le bruit

⁴On peut rappeler, juste pour donner une justification de ces résultats qui peut aider à les mémoriser, que la fonction de corrélation de $y(t)$ se détermine, par définition, en calculant l'espérance mathématique $E[y(0)y(\tau)]$ qui devient donc compte tenu de l'équation (14.41) : $\varphi_{yy}(\tau) = E[x * h(0) x * h(\tau)]$. Dans cette expression il y a donc un produit de deux convolution, et le résultat contient donc deux fois x et deux fois h . Comme $\varphi_{xx}(\tau) = E[x(0)x(\tau)]$ est aussi homogène au carré de $x(t)$, il est raisonnable d'avoir à la fin pour $\varphi_{yy}(\tau)$ une expression contenant $\varphi_{xx}(\tau)$ multipliée deux fois par $h(\pm\tau)$. Le même raisonnement peut être fait par la DSP.

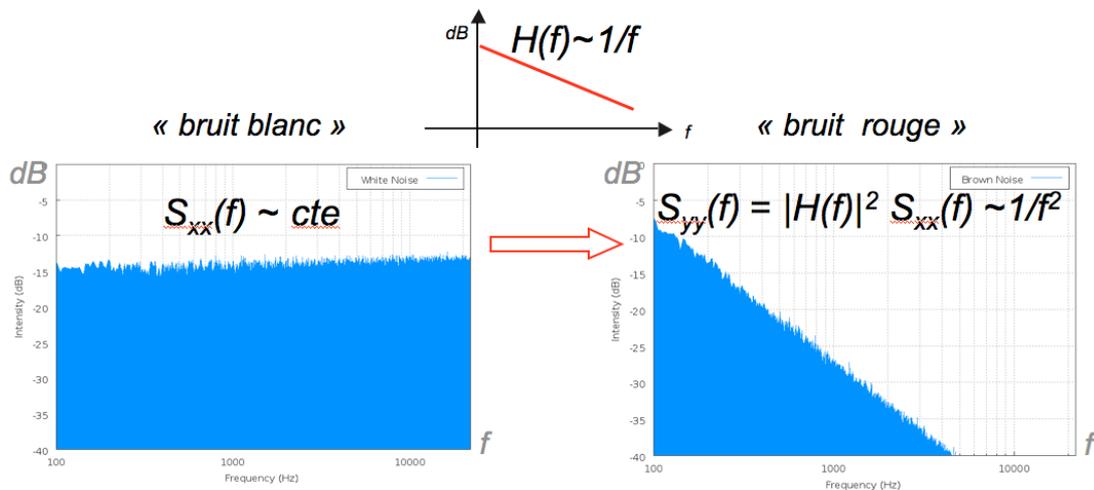


FIG. 14.19 –

soit **indépendant** du signal et **additif**, c'est-à-dire qu'il se somme simplement au signal : on a donc en entrée un signal

$$x(t) = z(t) + b(t). \quad (14.46)$$

Une question se pose tout de suite : quelles sont les caractéristiques du signal somme $x(t)$? Dans les hypothèses que nous avons faites, la **linéarité** du système vient en notre secours :

- Si $z(t)$ et $w(t)$ sont deux signaux statistiquement indépendants, alors pour $x(t) = z(t) + w(t)$ on a

$$S_{xx}(f) = S_{zz}(f) + S_{ww}(f) \quad (14.47)$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{zz}(\tau) + \varphi_{ww}(\tau) : \quad (14.48)$$

DSP et fonction de corrélation se somment pour la somme de deux signaux indépendants. Nous avons utilisé ici les notations z et w pour signifier que ces relations sont valables pour deux signaux quelconques.

Le spectre du signal somme est donc simplement la somme des deux spectres : par exemple si on somme un signal harmonique de fréquence f_0 donné à un bruit blanc et qu'on calcule la DSP du signal obtenu, on obtient la somme des des DSP, c'est à dire un spectre constant plus un pic à la fréquence f_0 qu'on voit
» du spectre plat.

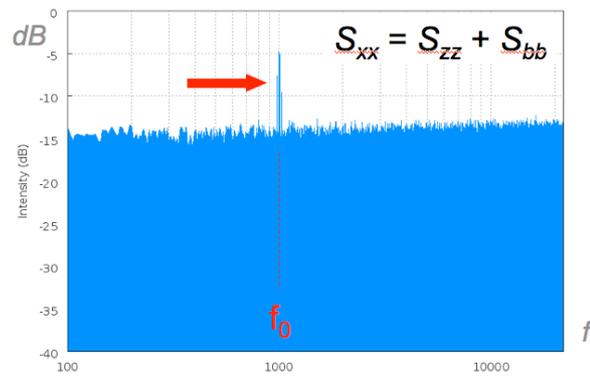


FIG. 14.20 –

A Dictionnaire

TAB. 1 – TF et TL des principales fonctions.

$x(t)$	$TL[x(t)] = X_L(p)$	Intervalle de validité	$TF[x(t)] = X(\omega)$	$TF[x(t)] = X(f)$	Commentaires
$\delta(t)$	1	\mathbb{R}	$j\omega$	$j2\pi f$	
$\delta^{(n)}(t)$	p^n	\mathbb{R}	$(j\omega)^n$	$(j2\pi f)^n$	$\delta^{(n)}(t)$ = dérivée n-ième de $\delta(t)$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 - p^2}$	$] -a, +a[$, $a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$	la TF existe pour $a > 0$
1	$2\pi\delta(\frac{p}{j})$	\emptyset	$2\pi\delta(\omega)$	$\delta(f)$	Transformée au sens des distributions (a.s.d.d.)
signe(t) = +1 $\forall t > 0$ = -1 $\forall t < 0$	$\frac{2}{p}$	\emptyset	$VP(\frac{2}{j\omega})$	$VP(\frac{1}{j\pi f})$	$VP(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$ $VP(\frac{1}{x}) = 0$ pour $x = 0$ Transformées a.s.d.d.
$e^{j\omega_0 t}$ $\omega_0 = 2\pi f$	$2\pi\delta(\frac{p}{j} - \omega_0)$	\emptyset	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$2\pi\delta(f - f_0)$	Transformées a.s.d.d.
$\cos(\omega_0 t)$ $\omega_0 = 2\pi f$	$\pi\delta(\frac{p}{j} - \omega_0)$ $+ \pi\delta(\frac{p}{j} + \omega_0)$	\emptyset	$\pi\delta(\omega - \omega_0)$ $+ \pi\delta(\omega + \omega_0)$	$\frac{1}{2}\delta(f - f_0)$ $+ \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$	Transformées a.s.d.d.
$\sin(\omega_0 t)$ $\omega_0 = 2\pi f$	$\frac{\pi}{j}\delta(\frac{p}{j} - \omega_0)$ $- \frac{\pi}{j}\delta(\frac{p}{j} + \omega_0)$	\emptyset	$\frac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_0)$ $- \frac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_0)$	$\frac{1}{2j}\delta(f - f_0)$ $- \frac{1}{2j}\delta(f + f_0)$	Transformées a.s.d.d.
$e^{-\pi(t/\tau)^2}$ $\omega_0 = 2\pi f$	$\tau e^{(pt)^2/(4\pi)}$	\mathbb{R}	$\tau e^{-(\omega\tau)^2/(4\pi)}$	$\tau e^{-\pi(f\tau)^2}$	$x(t)$ = fonction de Gauss
Rect(t/T) = 1 $\forall t \in [-T, T]$ = 0 ailleurs	$2T \text{sinc}(\frac{pT}{j})$	\mathbb{R}	$2T \text{sinc}(\omega T)$	$2T \text{sinc}(2\pi f T)$	$x(t)$ = fonction rectangle $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$
$\Gamma(t)$ = 1 $\forall t \geq 0$	$\frac{1}{p}$	\mathbb{R}^+	$VP(\frac{1}{j\omega}) + \pi\delta(j\omega)$	$VP(\frac{1}{j2\pi f}) + \frac{1}{2}\delta(f)$	TF a.s.d.d. $VP(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$ $VP(\frac{1}{x}) = 0$ pour $x = 0$
$e^{p_0 t} \Gamma(t)$	$\frac{1}{p - p_0}$	$] \text{Re}(p_0), +\infty[$	$\frac{1}{j\omega - p_0}$	$\frac{1}{j2\pi f - p_0}$	la TF existe a.s.d.f. pour $\text{Re}(p_0) < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \Gamma(t)$	$\frac{1}{p^n}$	\mathbb{R}^+	$VP(\frac{1}{(j\omega)^n})$ $+ \frac{j^{(n-1)}}{(n-1)!} \pi \delta^{(n-1)}(\omega)$	$VP(\frac{1}{(j2\pi f)^n})$ $+ \frac{(j/2\pi)^{(n-1)}}{(n-1)!} \pi \delta^{(n-1)}(f)$	TF a.s.d.d. $VP(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$, $VP(\frac{1}{x}) = 0$ pour $x = 0$
$e^{-at} \Gamma(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$] -a, +\infty[$	$\frac{1}{j\omega+a}$	$\frac{1}{j2\pi f+a}$	la TF existe a.s.d.f. si $a > 0$
$t e^{-at} \Gamma(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$] -a, +\infty[$	$\frac{1}{(j\omega+a)^2}$	$\frac{1}{(j2\pi f+a)^2}$	la TF existe a.s.d.f. si $a > 0$
$\sin(\omega_0 t) \Gamma(t)$ $\omega_0 = 2\pi f$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	\mathbb{R}^+	$VP(\frac{-\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}) +$ $\frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$\frac{1}{2} VP(\frac{j\omega_0}{f_0^2 - f^2}) +$ $\frac{1}{4j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$	TF a.s.d.d. $VP(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$, $VP(\frac{1}{x}) = 0$ pour $x = 0$
$\cos(\omega_0 t) \Gamma(t)$ $\omega_0 = 2\pi f$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$	\mathbb{R}^+	$VP(\frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}) +$ $\frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$\frac{1}{2} VP(\frac{j}{f_0^2 - f^2}) +$ $\frac{1}{4} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$	TF a.s.d.d. $VP(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$, $VP(\frac{1}{x}) = 0$ pour $x = 0$
$e^{j\omega_0 t} \Gamma(t)$	$\frac{1}{p - j\omega_0}$	\mathbb{R}^+	$VP(\frac{1}{j\omega - j\omega_0}) +$ $\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$\frac{1}{j2\pi} VP(\frac{1}{f - f_0}) +$ $\frac{1}{2}\delta(f - f_0)$	$VP(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$, $VP(\frac{1}{x}) = 0$ pour $x = 0$
$e^{-at} \sin(\omega_0 t) \Gamma(t)$	$\frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$	$] -a, +\infty[$	$\frac{\omega_0}{(j\omega+a)^2 + \omega_0^2}$	$\frac{2\pi f_0}{(j2\pi f+a)^2 + 2\pi f_0^2}$	la TF existe a.s.d.f. pour $a > 0$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t) \Gamma(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$	$] -a, +\infty[$	$\frac{j\omega+a}{(j\omega+a)^2 + \omega_0^2}$	$\frac{j2\pi f}{(j2\pi f+a)^2 + 2\pi f_0^2}$	la TF existe a.s.d.f. pour $a > 0$

B Principales propriétés des TF et TL

	Transformée de Laplace ⁽¹⁾	Transformée de Fourier ⁽²⁾
dualité	//	$TF[x(t)] = X(\omega) \Rightarrow TF[X(t)] = x(-\omega)$
linéarité	$TL[a \cdot x(t) + b \cdot y(t)] = a \cdot X_L(p) + b \cdot Y_L(p)$	$TF[a \cdot x(t) + b \cdot y(t)] = a \cdot X(\omega) + b \cdot Y(\omega)$
translation	$TL[x(t - t_0)] = X_L(p) \cdot e^{-pt_0}$	$TF[x(t - t_0)] = X(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$
modulation	$TL[x(t) \cdot e^{pt_0}] = X_L(p - p_0)$ $TL[x(t) \cdot \cos(\omega_0 t)] = [X_L(p + p_0) + X_L(p - p_0)] / 2$ $TL[x(t) \cdot \sin(\omega_0 t)] = j [X_L(p + p_0) - X_L(p - p_0)] / 2$	$TF[x(t) \cdot e^{j\omega_0 t}] = X(\omega - \omega_0)$ $TF[x(t) \cdot \cos(\omega_0 t)] = [X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)] / 2$ $TF[x(t) \cdot \sin(\omega_0 t)] = j [X(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0)] / 2$
changement d'échelle	$TL[x(at)] = \frac{1}{ a } \cdot X_L(p/a)$	$TF[x(at)] = \frac{1}{ a } \cdot X(\omega/a)$
conjugaison	$TL[\overline{x(t)}] = \overline{X_L(p)}$	$TF[\overline{x(t)}] = \overline{X(-j\omega)}$
théorème de Parseval ⁽³⁾	//	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) ^2 d\omega$

FIG. 1 – Principales propriétés des TF et TL.