

## **Partie II - Analyser**



# Chapitre 5

## La Série de Fourier (SF)

### 5.1 Introduction : réponse d'un système linéaire à une somme d'excitations sinusoïdales

Dans les premiers chapitres de ce cours nous avons discuté l'importance des systèmes linéaires et le fait qu'un système physique linéaire est toujours associé à une équation différentielle linéaire. Nous avons vu que pour une sollicitation sinusoïdale (=harmonique)  $e(t) = a \cos(\omega t + \Delta)$  la réponse du système est déterminée par sa fonction de transfert  $T(\omega)$ , et qu'elle est encore sinusoïdale, d'amplitude  $a|T(\omega)|$  et déphasée de  $\theta_T(\omega)$  par rapport à l'entrée :

$$\begin{array}{ccccc} e(t) = a \cos(\omega t + \Delta) & \rightarrow & \boxed{\text{EDL}} & \rightarrow & s(t) = a|T(\omega)| \cos(\omega t + \Delta + \theta_T(\omega)) \\ \text{entrée} & & = & & \text{sortie} \\ & & T(\omega) & & \end{array}$$

La question que nous allons nous poser maintenant est : quelle sera la réponse du système pour une sollicitation  $e(t)$  *non harmonique* ?

C'est une question très importante car elle se pose très souvent en pratique, par exemple :

- Que se passe-t-il si on allume en  $t = 0$  un générateur qui alimente un circuit avec une tension continue ?
- si on donne périodiquement des courtes impulsions à un oscillateur mécanique ?
- si on tape avec un diapason sur une table ?
- si on envoie un signal sur une antenne radio ?
- si on excite un atome avec une lumière non monochromatique ?

On veut calculer la réponse dans tous ces cas. La clé qui va nous permettre de le faire c'est, encore une fois, la linéarité (voir [1.1](#)) :

- Pour un système linéaire, si l'entrée est une combinaison linéaire de deux fonctions,

$$e(t) = \alpha e_1(t) + \beta e_2(t),$$

alors la sortie est la combinaison linéaire des deux réponses :

$$s(t) = \alpha s_1(t) + \beta s_2(t). \quad (5.1)$$

Cette propriété nous permet donc de commencer à considérer des fonctions un peu plus complexes. Faisons un exemple.

**Exemple.** Considérons le circuit RC (figure 5.1). L'EDL du circuit s'obtient très

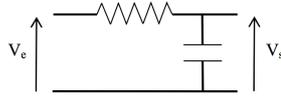


FIG. 5.1 – Le circuit RC.

facilement par la loi des mailles et est, évidemment, égale à celle du circuit RLC (4.22) où on a choisi  $L = 0$  :

$$v_s(t) + RC \dot{v}_s(t) = v_e(t). \quad (5.2)$$

A partir de l'EDL on peut calculer la fonction de transfert pour le circuit RC en suivant la même méthode que nous avons utilisée en 2.2 pour l'oscillateur forcé amorti (et qui s'applique au circuit RLC). On obtient

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC} \quad \text{circuit RC} \quad (5.3)$$

(encore une fois, il suffit de prendre  $L = 0$  dans la fonction de transfert du circuit RLC, équation (4.23)).

Choisissons  $RC = 1$  pour simplifier. On a alors, en séparant module et phase,  $T(\omega) = (1 + \omega^2)^{-1/2} \exp(-i \arctan \omega)$ . Prenons maintenant une fonction en entrée composée de la somme de deux oscillations :

$$e(t) = \cos(t) + \sin(6t) = \cos(t) + \cos(6t - \pi/2). \quad (5.4)$$

La première contribution a une pulsation  $\omega = 1$ , la deuxième  $\omega = 6$ . Que vaut  $s(t)$ ? La propriété de linéarité nous permet de la calculer :

$$\begin{aligned} s(t) &= |T(1)| \cos(t + \theta_T(1)) + |T(6)| \cos(6t - \pi/2 + \theta_T(6)) \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \cos(t + \arctan(1)) + |T(6)| \cos(6t - \pi/2 + \arctan(6)) \\ &\simeq \sqrt{\frac{1}{2}} \cos(t + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{\frac{1}{37}} \cos(6t - \pi/2 + 0,44\pi). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Les deux fonctions et la fonction de transfert sont représentées dans la figure 5.2. On voit en particulier que la composante à plus haute fréquence est plus atténuée que celle qui oscille plus lentement : le module la fonction de transfert  $T(\omega)$  est en effet plus faible en correspondance de  $\omega = 6$  que de  $\omega = 1$  (pulsations indiquées par les deux points sur la courbe).

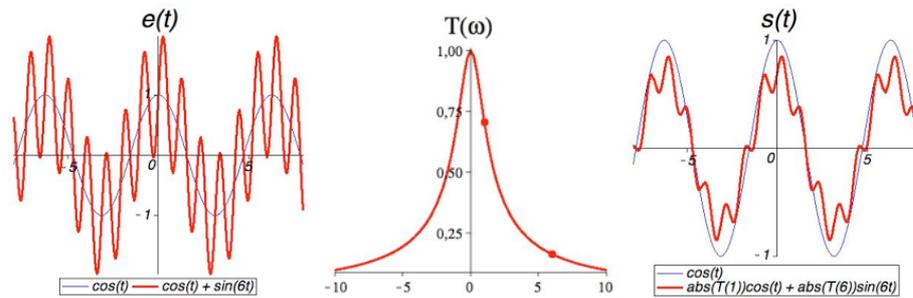


FIG. 5.2 – La fonction composée  $e(t)$  (equation (5.4)), le module de la fonction de transfert du circuit RC (equation (5.3)) et la réponse  $e(t)$  (equation (5.5)).

On pourrait bien sûr maintenant rajouter une troisième fonction sinusoïdale et procéder de la même manière : on peut donc trouver la réponse à un signal composé d'un nombre quelconque d'harmoniques. Mais la question peut aussi bien être inversée : serions-nous capables d'écrire *une fonction quelconque* comme la somme d'un certain nombre (éventuellement très grand...) de fonctions harmoniques? Pour le cas des **fonctions périodiques** la réponse est oui, et elle est donnée par la **série de Fourier**<sup>1</sup>.

## 5.2 Signaux périodiques : premier exemple et motivations

La question maintenant est de déterminer la réponse d'un système linéaire à une sollicitation qui est *périodique*, mais non *harmonique* (qui n'est pas sinusoïdale).

Par exemple, on peut considérer un signal en créneau  $x(t)$ , périodique de période  $T$  de figure 5.3.

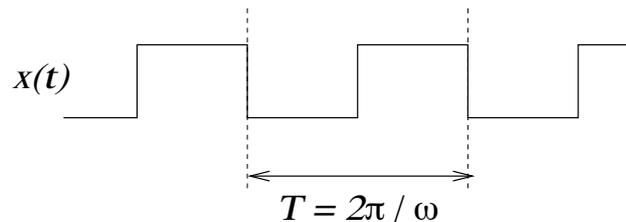


FIG. 5.3 – Signal périodique  $x(t)$  de période  $T$ .

Le résultat que nous allons obtenir est le suivant : on peut montrer qu'une fonction  $x(t)$  périodique quelconque peut être approchée par une somme de fonctions sinusoïdales de période  $T$ ,  $T/2$ ,  $T/3$  etc, et que cette approximation peut être rendue de plus en plus précise en sommant de plus en plus de termes. On peut décrire cette technique en utilisant l'exemple de la figure 5.3. D'abord, on essaye d'approcher la fonction  $x(t)$  par

<sup>1</sup>De plus, nous verrons dans le prochain cours que cette opération est possible aussi pour des fonctions non périodiques, même si elle devient un peu plus compliquée.

une fonction constante,  $x(t) \simeq a_0$  qui rend compte de sa valeur moyenne, comme en figure 5.4.

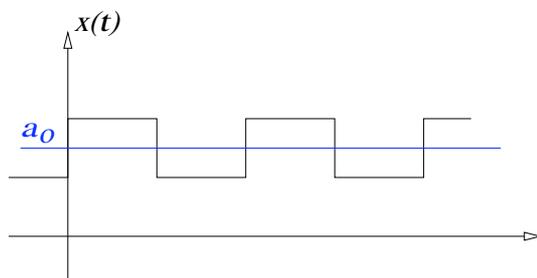


FIG. 5.4 – Première contribution  $a_0$  : fonction constante égale à la valeur moyenne de  $x(t)$ .

Ensuite, pour reproduire son allure oscillante, on ajoutera à  $a_0$  une fonction oscillante  $b_1 \sin(\omega t)$ , de même période  $T$ , avec le résultat montré en figure 5.5.

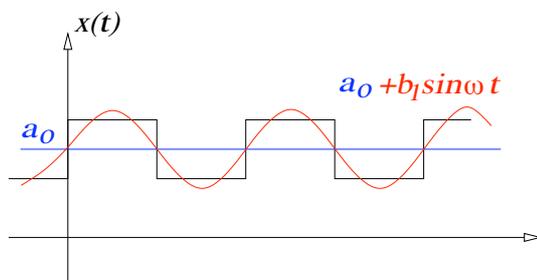


FIG. 5.5 – La première et la deuxième contributions à la "réconstruction" de la fonction  $x(t)$ .

Puis, pour s'approcher de la forme "moins arrondie" de la fonction, on ajoute des fonctions sinusoïdales de pulsation plus élevée (période plus courte) et proportionnelles à rapport entier à la pulsation fondamentale. Par exemple, pour le cas de la fonction considérée dans la figure, la contribution suivante s'écrit  $b_3 \sin(3\omega t)$ , et le résultat est représenté en figure 5.6.

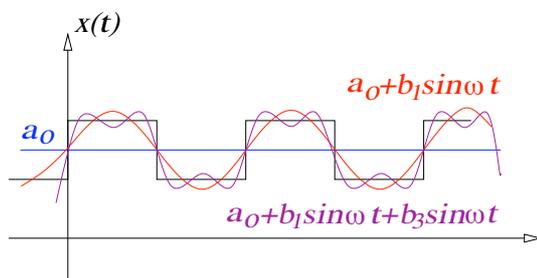


FIG. 5.6 – Les premiers trois termes de la série de Fourier.

Nous avons donc que, pour des valeurs appropriées de  $a_0$ ,  $b_1$  et  $b_3$ ,

$$x(t) \simeq a_0 + b_1 \sin(\omega t) + b_3 \sin(3\omega t). \quad (5.6)$$

Comme nous verrons dans la deuxième partie, cette séquence de termes peut être poursuivie à volonté pour obtenir des approximations de plus en plus précises de la fonction initiale. On peut montrer qu'à la limite d'une somme infinie de termes (série) on arrive à reproduire parfaitement l'allure de la fonction périodique  $x(t)$ , *pourvu qu'on sache déterminer les coefficients*  $a_0, b_1, b_3$  etc.

Avant de poursuivre, précisons encore une fois notre motivation : nous savons que pour un système linéaire (dont le comportement est décrit par des équations différentielles linéaires), si nous sommes capables d'écrire une sollicitation comme la somme de contributions sinusoïdales, la réponse sera donnée simplement par la somme des réponses à chaque contribution. Et nous savons calculer ces réponses individuelles grâce à la fonction de transfert.

### 5.3 Série de Fourier sur la base des fonctions trigonométriques

L'opération de décomposition en fonctions sinusoïdales est très générale et peut s'appliquer à toute fonction périodique. Pour comprendre l'expression générale de cette décomposition, il est utile de remarquer que, dans l'exemple que nous avons pris, la fonction était impaire, et son développement ne comprenait que des fonctions sinus, elles aussi impaires. Si, au contraire, on avait pris une fonction paire, le développement aurait comporté des fonctions cosinus uniquement. Dans le cas général d'une fonction ni paire ni impaire, les deux sont présents.

Écrivons (sans démonstration) l'expression du **développement en série de Fourier sur la base des fonctions sinusoïdales** (on parle aussi de **série de Fourier réelle** pour ce développement) :

soit  $x(t)$  une fonction périodique de période  $T = 2\pi/\omega$ .  $x(t)$  est alors identique à son développement en série de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t). \quad (5.7)$$

Cette écriture est intéressante mais incomplète. Evidemment, elle ne serait pas très utile si on n'avait pas un moyen de déterminer les coefficients  $a_0, a_n$  et  $b_n$ . Sur la base de considérations très générales et faciles à prouver, nous pouvons déjà dénombrer certaines propriétés de ces coefficients :

- Si  $x(t)$  est une *fonction réelle*, alors les coefficients  $a_0, a_n$  et  $b_n$  sont réels.
- Si  $x(t)$  est une *fonction paire*, alors les coefficients des sinus sont tous nuls :  $b_n = 0 \quad \forall n > 0$ .
- Si  $x(t)$  est une *fonction impaire*, alors les coefficients des cosinus sont tous nuls :  $a_n = 0 \quad \forall n > 0$ .

Ces propriétés peuvent parfois simplifier remarquablement les calculs.

En outre, nous savons déjà que le coefficient  $a_0$  doit correspondre à la valeur moyenne de la fonction  $x(t)$ . Le calcul de l'expression générale des autres coefficients demande un petit peu de mathématique, que nous ne ferons pas ici. Le résultat final est que l'on

peut calculer les **coefficients du développement en série de Fourier** sur la base des fonctions sinusoïdales<sup>2</sup> comme suit :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (5.8)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt \quad (5.9)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt. \quad (5.10)$$

On écrit souvent aussi, en notation plus compacte,

$$\omega_n = n\omega \quad (5.11)$$

pour indiquer les multiples de la pulsation fondamentale  $\omega$ .

Nous allons seulement mentionner ici que ces formules peuvent être interprétées comme des produits scalaires entre la fonction  $x(t)$  et les fonctions  $\cos(n\omega t)$  et  $\sin(n\omega t)$ . Nous n'utiliserons pas cette convention, mais il est utile de remarquer que l'opération qui permet de calculer les coefficients de Fourier fait correspondre à deux fonctions l'intégrale de leur produit<sup>3</sup> :  $f(t), g(t) \rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot g(t) dt$ . Le même type d'opération sera fait dans la partie suivante pour des fonctions à valeurs complexes, et nous verrons comment il faut l'écrire dans ce cas<sup>4</sup>.

Une dernière remarque doit être faite en relation aux bornes d'intégration : nous avons limité l'intégrale entre 0 et  $T$ , mais les fonctions  $f(t)$  intégrées étant toutes périodiques de période  $T$ , on a  $\int_0^T f(t) dt \equiv \int_{t_x}^{t_x+T} f(t) dt$ , pour n'importe quelle valeur de  $t_x$  : on peut choisir librement les bornes d'intégration, pourvu que l'intervalle d'intégration soit de longueur  $T$ .

## 5.4 Série de Fourier sur la base des exponentielles complexes

Nous nous sommes intéressés à la décomposition en série de fonctions sinusoïdales parce que nous savions déterminer la réponse d'un système linéaire à de telles fonctions. Cependant, dans l'étude des équations différentielles linéaires, nous nous sommes vite aperçus que ces fonctions ne sont pas très pratiques à manipuler, et qu'il était plus efficace de les récrire comme la partie réelle d'exponentielles complexes, beaucoup plus simples à utiliser. Il est donc naturel de se poser la même question ici : est-il possible de ré-exprimer le développement en série de Fourier en notation complexe ?

<sup>2</sup>On peut vérifier que ces formules sont correctes en faisant explicitement le calcul des coefficients après avoir remplacé la fonction  $x(t)$  par son développement en SF.

<sup>3</sup>Le facteur 2 dans la définition du produit scalaire vient du fait que  $\int_0^T \cos^2 x dx = 1/2$ , et que les fonctions de base doivent être orthonormales.

<sup>4</sup>La même opération sera d'ailleurs encore nécessaire pour définir les transformées de Fourier et de Laplace.

Il est facile de deviner que la réponse est affirmative. Il suffit de récrire les fonctions sinus et cosinus comme

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \quad (5.12)$$

et de réarranger les termes dans l'expression (5.7) pour obtenir le **développement en série de Fourier sur la base des exponentielles complexes (théorème de Fourier)** :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n f_n(t). \quad (5.13)$$

où on a noté  $f_n(t) = e^{in\omega t}$ , avec  $\omega$  toujours égale à  $2\pi/T$ . Remarquons que la série comporte maintenant des termes allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ , à la différence du développement en sinus et cosinus.

Les **coefficients de la série**,  $c_n$ , peuvent être déterminés directement par le réarrangement des termes de la série à partir des  $a_n$  et  $b_n$ . On obtient les relations suivantes, toutes valables pour  $n$  positif :

$$c_0 = a_0 \quad (5.14)$$

$$c_n = (a_n - ib_n)/2 \quad \text{pour } n = 1 \cdots +\infty \quad (5.15)$$

$$c_{-n} = (a_n + ib_n)/2 = c_n^* \quad \text{pour } n = 1 \cdots +\infty \quad (5.16)$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = 2 \operatorname{Re}(c_n) \quad \text{pour } n = 1 \cdots +\infty \quad (5.17)$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = 2 \operatorname{Im}(c_n) \quad \text{pour } n = 1 \cdots +\infty \quad (5.18)$$

Puisque l'on décompose maintenant  $x(t)$  sur des fonctions complexes, il est normal que les coefficients  $c_n$  soient complexes. On peut déduire les propriétés générales des coefficients  $c_n$  à partir des propriétés des  $a_n$  et  $b_n$ , comme nous le verrons en 5.6.

Les coefficients de la série peuvent être aussi déterminés indépendamment du développement sur les fonctions sinus et cosinus, comme "projection" de la fonction  $x(t)$  sur la base des fonctions exponentielles complexes

$$f_n(t) = e^{-in\omega t} = e^{-i\omega_n t}. \quad (5.19)$$

on prouve en effet que les coefficients  $c_n$  s'écrivent de manière équivalente comme suit :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-in\omega t} dt. \quad (5.20)$$

Cette dernière est la décomposition en série la plus utilisée : encore une fois son intérêt particulier vient des propriétés des exponentielles complexes, que nous avons déjà utilisées.

L'opération donnant  $c_n$  à partir des fonctions  $x(t)$  et  $f_n(t)$  est l'intégrale du produit de la première pour le complexe conjugué de la deuxième, c'est-à-dire l'opération  $f(t), g(t) \rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \bar{g}(t) dt$ . Cette opération représente encore une fois un produit

scalaire, et c'est la version plus générale de celle déjà utilisée pour le cas des fonctions trigonométriques, valable aussi pour des fonction complexes. De plus, la décomposition 5.20 est unique, comme d'ailleurs la 5.7. Son unicité vient du fait que chaque fonction  $f_n(t)$  représente un "mode de vibration" du système indépendant de tous les autres, qui ne peut pas être représenté comme une composition des autres modes : si la pulsation  $n\omega$  est présente dans le signal  $x(t)$ , alors le coefficient correspondant  $c_n$  doit être différent de zéro, car il est le seul à "porter" cette pulsation. Pour mieux visualiser cette idée, il suffit de penser à la lumière : chaque longueur d'onde différente qui est présente dans une lumière composée doit être prise en compte et ne peut pas être obtenue en combinant les autres contributions, qui sont toutes indépendantes.

Il est parfois utile de savoir écrire cette propriété d'indépendance des fonctions  $f_n(t)$  en termes mathématiques. Il est en fait possible de montrer que les  $f_n(t)$  sont *orthonormales*, c'est-à-dire orthogonales et normalisées, par rapport au produit scalaire que nous avons introduit :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f_n(t) \bar{f}_m(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (5.21)$$

• *Exercice*

Montrer la relation précédente.

## 5.5 Spectres

La relation 5.13 signifie qu'on peut écrire  $x(t)$  comme une somme de fonctions harmoniques, chacune oscillante à une pulsation  $n\omega$  différente. Comme pour une onde lumineuse, on "mélange" différentes fréquences, pour obtenir un signal composé par toutes ses "couleurs". Et toujours comme en optique, on appelle **spectre** de la fonction  $x(t)$  l'ensemble des amplitudes correspondantes à chaque contribution, c'est-à-dire les coefficients  $c_n$ .

$$\text{Spectre de } x(t) = \{c_n\}. \quad (5.22)$$

La différence avec la lumière blanche (et aussi avec ce que nous verrons plus tard avec les fonctions non périodiques !) est que ici le résultat de la somme des différentes contributions est une fonction *périodique* de période  $T$  donnée. La décomposition ne peut donc contenir que les pulsations multiples de la pulsation fondamentale  $\omega$ , car toute fonction périodique de période  $T/n = 2\pi/n\omega$  est aussi périodique de période  $T = 2\pi/\omega$ . Pour  $x(t)$  périodique, le spectre est donc

- **discret** :  $\omega_n = n\omega = n\frac{2\pi}{T}$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ ,
- **complexe** :  $c_n \in \mathbb{C}$ .

Les coefficients  $c_n$  étant complexes, on a l'habitude d'en représenter séparément la module  $|c_n|$  et la phase  $\arg(c_n)$ , sous la forme de fonctions (discrètes) de  $n$  ou de  $\omega$  (avec des valeurs définies seulement pour les pulsations  $\omega_n = n\omega$ ). On peut aussi, bien sûr, en représenter partie réelle et partie imaginaire, sans perte d'information. Des exemples des deux représentations sont donnés en section 5.6.

Il est important de comprendre que la connaissance du spectre d'une fonction périodique permet de la reconstruire complètement, à travers son développement en série de Fourier : le spectre contient donc *toute* l'information sur la fonction.

## 5.6 Exemples et propriétés

Nous donnons ici quelques exemples qui permettent d'examiner les propriétés des spectres de certaines catégories de fonctions.

Dans le premier exemple (Fig. 5.7),  $x(t)$  est une fonction complexe périodique de période  $T$  (et qui vaut  $x(t) = 1 + i$  entre 0 et  $T/2$ , zéro entre  $T/2$  et  $T$ ), les coefficients  $c_n$  possèdent une partie réelle et une partie imaginaire (sur la gauche), et on peut les représenter par leur module et phase (à droite).

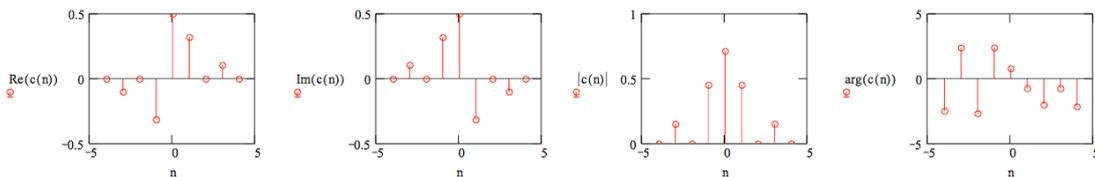


FIG. 5.7 – Module et phase des coefficients de la SF  $c_n$  de la fonction complexe  $x(t) = 1 + i$  entre 0 et  $T/2$ , nulle entre  $T/2$  et  $T$ , et périodique de période  $T$ .

Si maintenant

1.  $x(t)$  est **réelle** (exemple :  $x(t) = t^2$  entre 0 et  $T$ , périodique de période  $T$ , Fig. 5.8), alors les  $a_n$  et  $b_n$  sont réels, et donc  $c_n = \bar{c}_{-n}$  : les coefficients des  $n$  positifs et négatifs ont le même module et phase opposée. C'est la propriété la

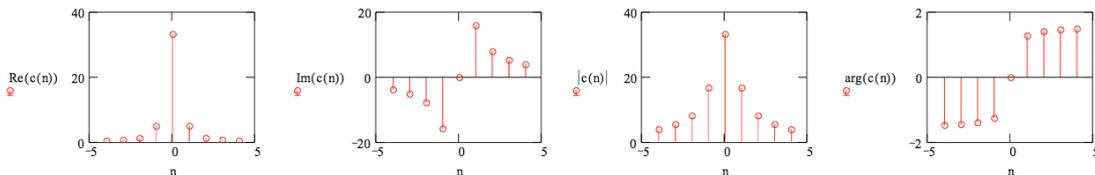


FIG. 5.8 – Module et phase des coefficients de la SF  $c_n$  de la fonction réelle  $x(t) = t^2$  entre 0 et  $T$ , périodique de période  $T$ .

plus importante pour nous car on s'intéressera toujours à des signaux  $x(t)$  réels, et il suffira donc de déterminer les  $c_n$  pour  $n$  positif pour les avoir tous.

2.  $x(t)$  est **paire**, alors les  $b_n$  sont nuls, et donc  $c_n = c_{-n}$  : les coefficients des  $n$  positifs et négatifs sont égaux.
3.  $x(t)$  est **réelle et paire** (exemple :  $x(t) = |t|$  entre  $-T/2$  et  $T/2$ , de période  $T$ , Fig. 5.9), alors les  $a_n$  sont réels et les  $b_n$  sont nuls, on a donc  $c_n = c_{-n}$  et réels : les coefficients des  $n$  positifs et négatifs ont le même module et sont tous réels, ils ont donc tous une phase égale à zéro.

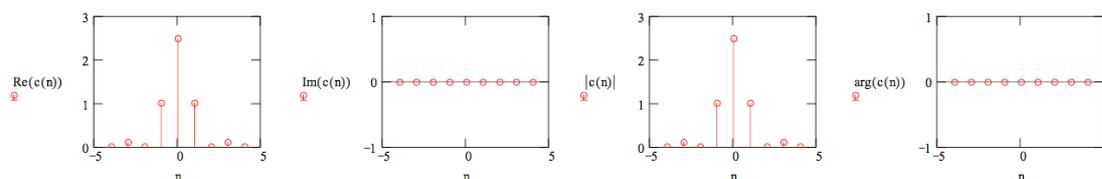


FIG. 5.9 – Module et phase des coefficients de la SF  $c_n$  de la fonction réelle et paire  $x(t) = |t|$  entre  $-T/2$  et  $T/2$ , périodique de période  $T$ .

4.  $x(t)$  est **impair**, alors les  $a_n$  sont nuls, et donc  $c_n = -c_{-n}$  : les coefficients des  $n$  positifs et négatifs sont opposés.
5.  $x(t)$  est **réelle et impaire** (exemple :  $x(t) = t$  entre  $-T/2$  et  $T/2$ , de période  $T$ , Fig. 5.10), alors les  $b_n$  sont réels et les  $a_n$  sont nuls, on a donc  $c_n = -c_{-n}$  et imaginaires : les coefficients des  $n$  positifs et négatifs ont le même module et sont tous imaginaires, ils ont donc deux à deux phase opposée et égale à  $\pm\pi$ .

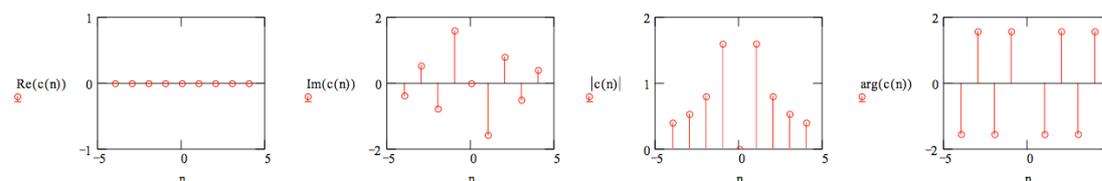


FIG. 5.10 – Module et phase des coefficients de la SF  $c_n$  de la fonction réelle et impaire  $x(t) = t$  entre  $-T/2$  et  $T/2$ , de période  $T$ .

Ces propriétés de symétrie sont importantes car elles peuvent aider quand on cherche à déterminer la décomposition en SF d'une fonction. Les symétries de la fonction se traduisent en d'autres propriétés de symétrie pour les coefficients, ce qui permet souvent de réduire le nombre de coefficients qu'il faut effectivement calculer.

En résumé, étant donnée une fonction  $x(t)$  périodique, nous sommes capables de la décomposer "sur la base" des fonctions oscillantes complexes  $f_n = e^{in\omega t}$  et inversement, la connaissance des coefficients  $\{c_n\}$  de cette décomposition, ou spectre de  $x(t)$ , permet de retrouver la fonction par la relation d'inversion :

$$\{c_n\} \Leftrightarrow x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}.$$

### 5.6.1 Un exemple interactif sur le web

$\triangle$  Pour comprendre encore mieux, nous pouvons utiliser ensemble une autre animation interactive, nommée "fourier1.html", du site web "Figures animées pour la physique",

<http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/index.html>.

Faisons cela étape par étape.

- 1 Commençons avec la fonction simple **cosinus** (en mode "sin/cos"). C'est l'exemple le plus facile : la décomposition sur la base des fonctions harmonique contient simplement une contribution égale à  $\cos(\omega t)$  ! On a donc  $a_1 = 1$  et tout le reste zéro :

$$x(t) = 1 \cdot \cos(\omega t).$$

C'est ce qui est représenté par les leviers sur l'animation. Si maintenant on veut la décomposition sur les fonction  $f_n = e^{in\omega t}$  (mode "spectre"), on peut écrire

$$x(t) = \cos(\omega t) = \frac{1}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}$$

d'où  $c_1 = c_{-1} = 1/2$  et tous les autres  $c_n$  zéro. On a bien  $c_n = \bar{c}_{-n}$  comme prévu pour une fonction réelle et paire. Sur l'animation en mode "spectre", ce qui est représenté par les leviers, ce sont les coefficients  $2c_n$ , avec  $n$  positif. L'autre moitié des composantes,  $2c_{-n}$ , n'est pas représentée, car la fonction est réelle et donc la connaissance des  $c_n$  avec  $n$  positif suffit. Le vecteur en rouge qui tourne est le vecteur  $2c_n e^{i\omega t} = e^{i\omega t}$ . Un vecteur unitaire qui tourne à une vitesse  $\omega$  constante dans le plan complexe : sa partie réelle est sur l'axe vertical, sa partie imaginaire sur l'axe horizontal.

On remarque alors que la fonction  $x(t)$  est la projection sur l'axe vertical (donc la partie réelle) de ce vecteur complexe qui tourne. Est-ce correct ? D'après notre définition générale de SF, on a

$$x(t) = c_0 + \sum_0^{\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t})$$

comme  $x(t)$  est réelle, on a  $c_n = \bar{c}_{-n}$  et donc aussi

$$x(t) = c_0 + \sum_0^{\infty} c_n e^{in\omega t} + \bar{c}_n \overline{e^{in\omega t}} = c_0 + \sum_0^{\infty} 2\text{Re}(c_n e^{in\omega t}). \quad (5.23)$$

On comprend pourquoi on a choisi d'indiquer les coefficients  $2c_n$  et de représenter les vecteurs  $2c_n e^{in\omega t}$  : c'est parce que, pour les fonctions réelles, la fonction est exactement égale à la partie réelle de  $c_0 + \sum_0^{\infty} 2\text{Re}(c_n e^{in\omega t})$ . Ici on a un cas simple avec une seule composante, mais la même chose sera valable pour les autres fonctions.

- 2 Voyons rapidement ce qu'on a pour la fonction **sinus** : c'est la même chose sauf que la fonction est impaire, on a donc  $b_1 = 1$  et les autres zéro, et  $\sin(\omega t) = (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/2i$  d'où

$$c_1 = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2} = \frac{e^{-\pi/2}}{2} = -c_{-1}.$$

- 2' Si maintenant on ajoute à la fonction précédente une **composante continue**  $a_0$  en agissant sur le levier correspondant, alors on voit que notre résultat dévient la partie réelle de la somme de deux vecteurs complexes : un fixe ( $a_0 e^{i0}$ ), l'autre qui tourne à vitesse  $\omega$  comme avant. C'est le résultat prévu par notre calcul 5.23.

- 3 Que se passe-t-il alors si on rajoute au signal sinus une **autre composante harmonique** de pulsation  $n\omega$  différente? Par exemple, essayons de mettre  $c_3 \neq 0$  : on rajoute donc un terme de pulsation  $3\omega$ .  
Ceci correspond à sommer un troisième vecteur aux deux autres, qui cette fois tourne à une vitesse  $3\omega$ , donc trois fois plus vite que le premier ; le signal est encore périodique de période  $T = 2\pi/3$ , mais on a rajouté une harmonique supérieure : sa forme change, une oscillation plus rapide vient se rajouter à l'oscillation fondamentale de pulsation  $\omega$ .
- 3' Quelle est maintenant **l'influence de la phase** ? Changeons la phase de  $c_3$  (en mettant par exemple une phase autour de  $-1.5$ ) : la forme du signal change, car la composante rapide est décalée par rapport à la fondamentale, les deux se somment d'une manière différente.
- 4 Pour compléter le cadre, voyons un exemple de "vrai" signal avec sa décomposition en SF : prenons le **signal en créneau**, que nous avons vu en introduction. Plus de termes apparaissent, mais attention, nous n'avons ici que les premiers termes du développement en SF, le signal est donc reproduit de manière approchée.  
Les vecteurs complexes montrent bien ce qui se passe : on somme des composantes oscillantes de pulsation de plus en plus élevée, et toutes multiples de la fondamentale ( $2\omega, 3\omega, 4\omega\dots$ ) et de module (pour ce cas) de plus en plus faible. Leur somme approche le signal, et on peut voir que au fur et à mesure qu'on enlève des composantes, le signal est de moins en moins bien approché, et de plus en plus arrondi : ce sont les pulsations les plus élevée qui permettent de bien représenter les "coins" du carré, là où la variation est la plus rapide. C'est une propriété très générale sur laquelle nous allons revenir.  
La figure 5.11 est une autre représentation du développement en SF du signal en créneau et des premiers coefficients de Fourier  $c_n$ .
- 4' Pour finir, essayons encore une fois de changer les phases, cette fois pour le signal en créneau : et bien ça ne rassemble pas du tout au signal en créneau ! La phase est donc importante, elle contient une partie essentielle de l'information sur le signal, car si on ne somme pas les différentes contribution avec la bonne correspondance temporelle, on ne peut pas reproduire correctement le signal.

## 5.7 Energie et puissance

Nous avons discuté dans les exemples précédents le rôle de la phase. Cependant, la phase n'est pas toujours importante. En particulier, nous avons vu en 3.2 que les capteurs lumineux ne sont sensibles qu'à l'énergie de l'onde électromagnétique, qui est homogène au module au carré du champs électrique. La phase est ainsi complètement ignorée. La même chose vaut pour notre œil. Plus en général, si on ne s'intéresse que à l'énergie transportée par un signal, on aura toujours cette indépendance vis-à-vis de la phase. Nous l'avons vu aussi dans le cas de l'oscillateur mécanique, pour lequel on avait trouvé en 1.4.1 que l'énergie était proportionnelle au module carré du déplacement  $\rho$  :

$$E = \frac{1}{2}K\rho^2 \quad \text{énergie oscillateur mécanique.}$$

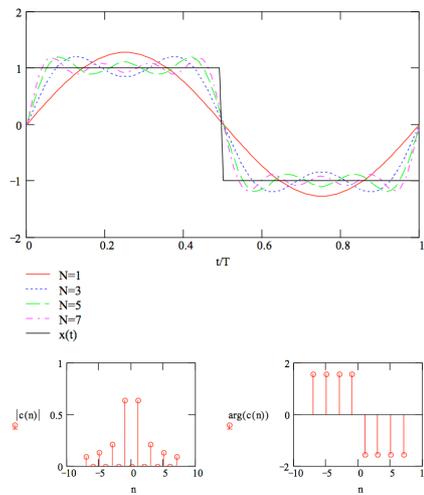


FIG. 5.11 – La fonction en créneau  $x(t)$  avec les premières sommes d’harmoniques et les premiers coefficient de Fourier (partie centrale du spectre).

Or, pour un système linéaire, ce qui est vrai pour un signal oscillant est vrai pour une somme de signaux oscillants à des pulsations différentes, et donc pour une série de Fourier : pour un signal périodique quelconque, l’énergie est la somme des énergie de ses composantes de Fourier et ne dépend donc que des amplitudes correspondantes. Mais ces amplitudes ne sont rien d’autres que les coefficients du développement en SF ! On est donc en train de dire que pour n’importe quel signal périodique, la connaissance du spectre  $\{c_n\}$  est suffisante pour déterminer son énergie. D’ailleurs nous avons remarqué que le spectre de  $x(t)$  doit contenir toute l’information sur  $x(t)$ . Il n’est donc pas étonnant que l’énergie puisse être exprimée aussi sur la base des coefficients  $c_n$ . Ce qu’on a en plus est qu’elle ne dépendra que des modules carrés de ces coefficients, et non pas de leur phase.

Essayons d’écrire cela d’une manière un peu plus formelle. Pour commencer, comme on parle d’un signal quelconque, il faut préciser que signifie son énergie. Par analogie avec les circuits électriques, on définit l’**énergie instantanée** du signal  $x$  comme<sup>5</sup>

$$e(x, t) = |x(t)|^2 \quad \text{énergie instantanée.} \quad (5.24)$$

L’énergie instantanée est une grandeur difficile à mesurer. Ce qu’on peut mesurer plus aisément est l’**énergie moyenne** sur un intervalle de temps  $\Delta t$  :

$$E(x) = \int_0^{\Delta t} |x(t)|^2 dt \quad \text{énergie moyenne sur l’intervalle } \Delta t \quad (5.25)$$

Pour un système oscillant, on prend souvent la moyenne sur une période,  $\Delta t = T$ ,

$$E(x) = \int_0^T |x(t)|^2 dt \quad \text{énergie moyenne sur la période } T \quad (5.26)$$

<sup>5</sup>Rappelons que si  $x(t)$  est une fonction complexe,  $|x(t)|^2 = x(t)\bar{x}(t)$ .

et on aura l'**énergie totale** transportée par le signal en intégrant entre  $-\infty$  et  $+\infty$ . Puisque l'énergie moyenne croît avec le temps d'intégration, il est parfois utile de considérer la **puissance moyenne**<sup>6</sup>, définie comme

$$P(x) = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} |x(t)|^2 dt \quad \text{puissance moyenne} \quad (5.27)$$

et qui est donc indépendante du temps d'intégration  $\Delta t$ .

Il suffit maintenant de développer  $x(t)$  en série de Fourier et de substituer dans la définition (14.35) pour obtenir le **théorème de Parseval** :

$$P(x) = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2. \quad (5.28)$$

### • Exercice

Retrouver le théorème de Parseval en substituant le développement en SF dans la définition de puissance moyenne (14.35).

Résumons : la puissance (c'est-à-dire l'énergie transportée par unité de temps) du signal  $x(t)$ , qui s'écrit par définition comme l'intégrale de  $x(t)^2$  sur une période divisée par la période, peut s'écrire aussi comme la somme des énergies transportées par chacune de ses composantes ; chacune de ces énergies est simplement donnée par l'amplitude  $|c_n|$  de l'oscillation, au carré.

L'ensemble des amplitudes carrées des composantes du spectre forme donc le **spectre d'énergie** du signal,

$$\{|c_n|^2\} = \text{Spectre d'énergie de } x(t), \quad (5.29)$$

qu'on pourra cette fois représenter sur un seul graphe puisqu'on n'a plus de phase. Nous verrons que ce théorème se généralise aux spectres des fonctions non périodiques (pour la *transformée* de Fourier) et aux signaux aléatoires (théorème de Wiener-Khintchine) .

Remarquons pour finir qu'une certaine ambiguïté peut subsister dans la définition de spectre d'un signal, car le même terme est utilisé pour le spectre du signal  $\{c_n\}$  (5.22), le spectre d'amplitude  $\{|c_n|\}$  et le spectre d'énergie  $\{|c_n|^2\}$  (5.29). Il est utile donc de bien préciser à quelle des deux définitions on fait référence.

## 5.7.1 Conclusion

Premièrement, avons-nous répondu à la question posée au début de ce cours ? Il s'agissait de déterminer la réponse du système pour une sollicitation  $e(t)$  *non harmonique*. Nous avons donc bien notre réponse :

<sup>6</sup>En électronique, si  $v(t)$  représente la tension aux bornes d'une résistance et  $i(t)$  le courant qui la traverse, alors la puissance instantanée consommée par la résistance est  $p(t) = v(t)i(t) = v^2(t)/R$ , et la puissance moyenne est donnée par l'intégrale de cette grandeur sur une période, divisée par la période. En effet, les mêmes définitions peuvent être appliquées au cas d'un oscillateur mécanique amorti : voir *Le cours de physique de Feynman, mécanique I*, chapitre 24.

si

$$e(t) = a \cos(\omega t + \Delta) \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{EDL}} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} s(t) &= aT(\omega) e(t) \\ &= a|T(\omega)| \cos(\omega t + \Delta + \theta_T(\omega)) \end{aligned}$$

et donc en notation complexe

$$e(t) = a e^{in\omega t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{EDL}} \quad \rightarrow \quad s(t) = aT(\omega) e^{in\omega t}$$

alors pour  $e(t)$  périodique on aura

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{EDL}} \quad \rightarrow \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n T(n\omega) e^{in\omega t}$$

Nous sommes donc capables de trouver la réponse d'un système linéaire à une sollicitation périodique, comme la somme des réponses à toutes ses composantes harmoniques. Il est particulièrement intéressant de faire une analyse de ce type en électronique, où les signaux sont typiquement périodiques. Les circuits considérés en électronique se comportent souvent comme des *filtres*, c'est-à-dire ils transmettent certaines fréquences sans atténuation, alors que d'autres sont fortement atténuées. En termes de développement en série de Fourier, donc, on dira que seulement certaines composantes (termes de la série) sont transmises. Dans le cas d'un filtre passe-bas, par exemple, on peut voir l'effet sur les différents termes de la série de Fourier : en partant de la série complète, qui représente le signal d'entrée, le filtre coupe les fréquences plus élevées, les variations plus rapides sont supprimées et on observe en sortie un signal de plus en plus arrondi si la *fréquence de coupure* devient de plus en plus petite (comme nous l'avons vu sur l'exemple du signal en créneau). Un filtre passe-haut, au contraire, sera capable de supprimer la composante continue  $c_0 = a_0$  et certaines des oscillations à fréquences plus faibles, un filtre passe-bande sera éventuellement capable de ne laisser passer qu'une seule composante de la série, etc.



# Chapitre 6

## Transformée de Fourier (TF)

### 6.1 Décomposition d'une fonction aperiodique : la transformée de Fourier

Nous avons vu comment la série de Fourier nous permet d'analyser un signal périodique non sinusoïdal en termes de ses composantes harmoniques. On parle d'*analyse* du signal dans le sens que cette décomposition en composantes simples permet de mieux le comprendre, de savoir comment il est construit : par exemple on pourra différencier le son émis par un instrument ou d'un autre par les harmoniques qu'il contient. D'autre part, la SF nous permet, nous l'avons vu, de déterminer la réponse d'un système linéaire, comme la somme des réponses aux composantes individuelles.

Mais en pratique ce résultat ne nous satisfait pas complètement : les signaux périodiques sont un ensemble encore trop limité. En particulier, que faire pour analyser une lumière non monochromatique ? Elle ne contient pas que les harmoniques d'une fréquence fondamentale, mais une série de fréquences qui ne sont pas liées par une relation particulière.

Plus simplement encore, même quand on s'intéresse à des signaux périodiques, il y a une raison encore plus fondamentale pour se poser le problème des signaux non périodiques, et c'est que toute mesure est faite sur un temps de durée limitée. Par conséquent, même si le signal est périodique, ce qu'on enregistre ne l'est plus : Quelle



FIG. 6.1 – Un signal périodique enregistré pendant une durée limitée  $\Delta t$ .

sera alors la réponse du système ? Dans la même direction on peut s'intéresser aussi à la réponse à une courte impulsion, comme un choc, à un changement de régime à  $t = 0$ , ou bien à n'importe quel signal en entrée. Dans certains cas bien particuliers la solution de l'EDL est possible par les méthodes usuelles, mais pour la plus part des signaux ce n'est pas le cas.

D'où la question qu'on va adresser dans ce chapitre : est-il possible de généraliser la méthode de décomposition introduite par la SF à des fonctions non périodiques ? La réponse est donnée par la **transformée de Fourier (TF)**.

### 6.1.1 Passage de la SF à la TF

La généralisation de la décomposition de Fourier peut être introduite de manière assez simple dans le cas des **signaux de durée finie** (figure 6.2).

Soit  $x(t)$  un signal de durée finie  $\Delta t$ .

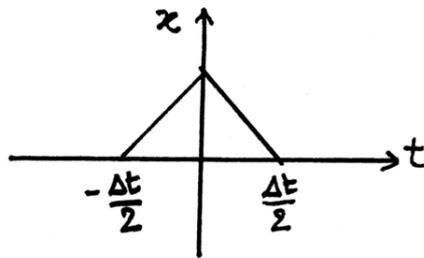


FIG. 6.2 – Un exemple de signal de durée finie  $\Delta t$ .

On peut alors construire, à partir de  $x(t)$ , un signal périodique  $y(t)$  en répétant  $x(t)$  avec une périodicité  $T > \Delta t$  (figure 6.3) :

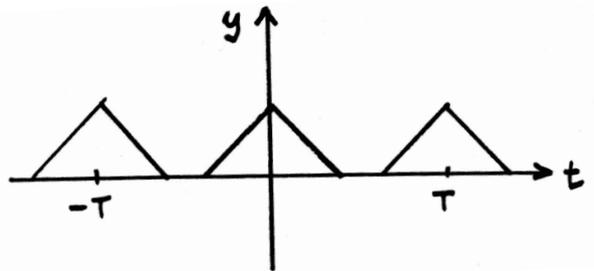


FIG. 6.3 – Le signal périodique  $y(t)$  obtenu en répétant  $x(t)$  avec une période  $T$ .

Dans ce cas, le signal de durée limitée  $x(t)$  peut être vu comme la limite de  $y(t)$  pour  $T \rightarrow \infty$  : plus la période augmente, plus les contributions non nulles s'éloignent les unes des autres, et, pour  $T$  qui tend à l'infini, il ne reste plus que la contribution centrale. On écrit donc

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} y(t). \quad (6.1)$$

Comme  $y(t)$  est périodique, sa SF existe : écrivons-la

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad (6.2)$$

avec  $\omega = 2\pi/T$  et  $\omega_n = n\omega$ . On peut alors se poser la question suivante : que devient la SF de  $y(t)$  lorsque  $y(t) \rightarrow x(t)$ , c'est-à-dire à la limite  $T \rightarrow \infty$  ?

Essayons de deviner la réponse sans faire le calcul complet, grâce à quelques observations.

### Pulsation continue

Si  $T \rightarrow \infty$ , alors  $\omega_{n+1} - \omega_n = (n+1-n)\omega = \omega \rightarrow 0$  : les pulsations des harmoniques  $\omega_n$  se rapprochent de plus en plus les unes aux autres. A la limite, on passe d'une série discrète de pulsations à une **pulsation  $\omega$  continue**, qui prend toutes les valeurs réelles.

C'est raisonnable : comme à la limite il n'y a plus de période  $T$ , l'échelle de temps caractéristique du signal disparaît, toutes les échelles de temps sont en principe présentes, et la notion de pulsation fondamentale n'a plus de sens.

### Passage des $c_n$ à la transformée de Fourier

Que deviennent les coefficients  $c_n$  dans cette limite ? A partir de la définition, on obtient<sup>1</sup>

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-i\omega_n t} dt = 0. \quad (6.3)$$

La limite directe des coefficients  $c_n$  ne nous permet pas de définir un équivalent "continu" des coefficients de la série ; mais la difficulté vient du facteur  $1/T$  qui va à zéro. On peut donc s'en passer si on considère la limite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T c_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-i\omega_n t} dt : \quad (6.4)$$

pour cette grandeur, la limite est définie. De manière un peu intuitive nous pouvons la déterminer en considérant que  $T \rightarrow \infty$ ,  $y(t) \rightarrow x(t)$  et que nous savons que les pulsations  $\omega_n$  doivent être remplacées à la limite par une pulsation  $\omega$  continue : en effet, on peut montrer que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T c_n = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (6.5)$$

On va donc prendre cette dernière quantité comme la généralisation à une fonction non périodique de durée limitée des coefficients de la série de Fourier. On se rappellera qu'on a du multiplier par  $T$  dans le passage au limite : il sera donc normal de trouver un facteur  $T$  qui intervient quand on voudra comparer SF et TF.

## 6.1.2 Définition de TF et TF inverse

Définissons donc la **Transformée de Fourier (TF) de  $x(t)$**  :

$$X(\omega) = TF[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{TF de } x(t). \quad (6.6)$$

<sup>1</sup>Nous profitons ici du fait que l'intégrale d'une fonction périodique sur une période  $T$  est toujours la même pour n'importe quel intervalle de durée  $T$ , pour intégrer entre  $-T/2$  et  $T/2$  plutôt que entre 0 et  $T$  comme dans le chapitre 5.

Remarquons que l'opération que l'on fait pour obtenir la TF est toujours la même : il s'agit de "projeter" la fonction  $x(t)$  sur une base de fonctions exponentielles. La différence, et il faut bien comprendre ce point, est que ici il n'y a pas un ensemble discret de fonctions  $f_n = e^{i\omega_n t}$  sur lesquelles projeter, mais une infinité de fonctions  $e^{i\omega t}$ , chacune associée à une pulsation  $\omega \in \mathbb{R}$  : on passe donc d'une série de coefficients  $c_n$  à une **fonction continue**  $X(\omega)$  **de la pulsation**  $\omega$ .

Comme pour la SF, la connaissance de sa transformée  $X(\omega)$  doit nous permettre de retrouver  $x(t)$ . Il est possible d'obtenir ce résultat à partir du même passage au limite que nous avons utilisé plus haut, mais contentons nous de donner le résultat final : on montre que la fonction  $x(t)$  peut s'écrire en termes de sa TF comme

$$x(t) = TF^{-1}[X(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad \text{TF inverse } (\omega) \quad (6.7)$$

$$= TF^{-1}[X(f)] \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df \quad \text{TF inverse } (f). \quad (6.8)$$

Dans la deuxième écriture, on a juste introduit la fréquence  $f = \omega/2\pi$  et fait le changement de variable correspondant :  $X(f) = X(\omega)$  où  $\omega$  a été exprimé comme  $2\pi f$ . C'est utile d'introduire cette notation ici car la variable d'intégration "naturelle" pour la transformée de Fourier inverse est  $f$ , comme on le voit dans les intégrales précédentes (où on a  $df$  ou  $d\omega/2\pi$  qui est encore égale à  $df$ ). Dans la pratique, les deux variables sont équivalentes et interchangeable et on utilise l'une ou l'autre selon la convenance ou l'habitude<sup>2</sup>.

Que signifie tout ça ? Nous voyons ici que une fonction quelconque (de durée limitée pour le moment)  $x(t)$  peut être exprimée comme une intégrale (qui remplace la somme de la SF) de fonctions exponentielles complexes  $e^{i\omega t}$  (pour toute  $\omega \in \mathbb{R}$ ), chacune multipliée par une amplitude donnée par la valeur  $X(\omega)$  (calculée donc en  $\omega$ ).

En d'autres mots, la  $TF[x(t)]$  représente le **spectre** du signal  $x(t)$ , et donne, pour chaque pulsation  $\omega$ , l'amplitude  $X(\omega)$  correspondante à la contribution  $e^{i\omega t}$ .

## 6.2 Conditions d'existence

Dans notre introduction de la TF nous avons considéré une fonction  $x(t)$  de durée limitée. Cette condition est bien souvent vérifiée car, comme nous l'avons dit, elle est une condition nécessaire de toute mesure physique ! Cependant, pour des raisons diverses, et particulièrement pour de raisons de simplicité de calcul et d'écriture, il est utile, d'un point de vue théorique, d'élargir un peu l'ensemble des signaux pour lesquels on peut calculer un spectre, pour pouvoir considérer des fonctions de référence simples comme  $x(t) = \text{constante}$ , ou  $\cos(\omega t)$ , ou la fonction échelon  $\Gamma(t) = 1$  pour  $t > 0$  et  $= 0$  pour  $t \leq 0$ . Ceci n'est pas toujours possible dans le cadre de la TF, et nous allons devoir introduire une autre opération, la *transformée de Laplace*, et des "fonctions" spéciales, les *distributions*, pour pouvoir traiter un certain nombre de ces fonctions.

<sup>2</sup>Il est possible d'utiliser aussi une convention différente pour les signes des exposants, selon les ouvrages.

Il est donc utile, ici, de préciser un peu les conditions d'existence de  $TF$  et  $TF^{-1}$ , de manière à savoir pour quels cas nous pouvons les utiliser sans problèmes. C'est un peu compliqué car la TF peut exister sans que sa transformations inverse existe, selon les propriétés du signal  $x(t)$ ; mais dans ce cours on va pouvoir se limiter aux cas le plus simples et juste introduire une classe de fonctions pour laquelle tout est bien défini.

Considérons donc l'ensemble des **fonctions à carré sommable**, noté  $L^2(\mathbb{R})$  et défini par :

$$x(t) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{si} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt. \quad (6.9)$$

On a donc la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } x(t) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{alors} \quad X(\omega) = TF[x(t)] \quad \text{existe et} \quad & \in L^2(\mathbb{R}) ; \\ \text{par conséquent} \quad TF^{-1}[X(\omega)] = x(t) \quad \text{existe aussi.} \end{aligned}$$

On remarque que en 5.7 nous avons défini l'énergie (totale) d'un signal justement comme  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$  : l'ensemble  $L^2(\mathbb{R})$  des fonctions à carré sommable est donc aussi, par définition, l'ensemble des signaux **d'énergie finie**. Nous pouvons donc nous contenter de ce résultat pour l'instant : on peut utiliser la décomposition en TF pour tous les signaux d'énergie finie et donc tous les signaux physiques ! Ce qui comprend en particulier les fonctions de durée finie (non divergentes) dont nous avons parlé, mais aussi toutes ces fonctions qui décroissent à zéro de manière suffisamment rapide pour  $t \rightarrow \pm\infty$ , comme par exemple  $\exp(-t^2)$ .

### 6.3 Spectre d'énergie

Comme nous l'avons dit, le spectre d'un signal apériodique (et à carré sommable) est donné par sa TF :

$$X(\omega) = TF[x(t)] \quad \text{spectre de } x(t). \quad (6.10)$$

Le spectre d'un tel signal est donc continu ; il est en général complexe ( $X(\omega)$  est une fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ). Pour le représenter, il faudra donc tracer module et phase de la fonction  $X(\omega)$ . Un exemple de tracé de TF est donné dans la figure 6.4.

Comme pour le cas des signaux périodiques, on peut montrer que l'énergie du signal, qui s'écrit par définition comme l'intégrale l'énergie transportée à chaque instant  $t$ , peut aussi être exprimée comme l'intégrale des contributions d'énergie transportées par chaque pulsation ou fréquence : cela nous donne la version continue du **théorème de Parseval** :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (6.11)$$

où le module carré de la TF remplace le module carré des  $c_n$  et la somme sur  $n$  devient une intégrale en  $df$ , comme on pouvait le deviner. On appellera donc  $|X(\omega)|^2$  le **spectre d'énergie** du signal :

$$|X(\omega)|^2 = |X(f)|^2 \quad \text{spectre d'énergie de } x(t).$$

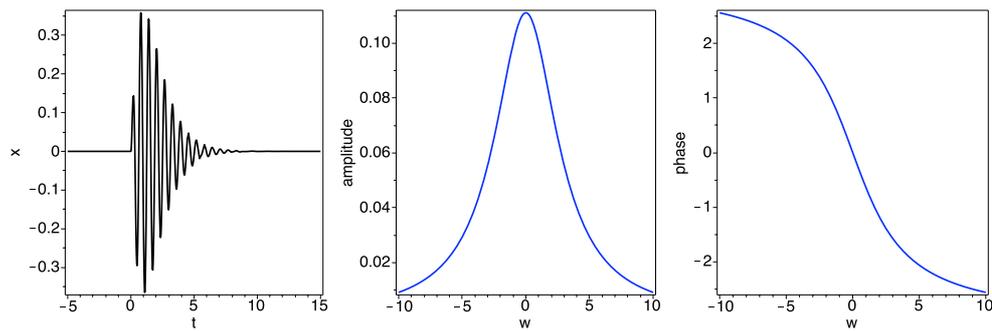


FIG. 6.4 – La fonction  $x(t)$  égale à  $\sin(10t)t \exp(-t)$  pour  $t \geq 0$ , avec le module et la phase de sa TF  $X(f)$ .

## 6.4 Exemple et remarques

Nous allons maintenant approfondir un peu notre connaissance de la TF par un exemple, qui nous permettra aussi de faire quelques remarques intéressantes.

**Example.** Considérons pour commencer un signal qui n'est pas à carré sommable mais dont on connaît la SF. Le plus simple est le signal constant :

FIG

$$x(t) = x_0 = \text{cte} \quad (6.12)$$

dont la SF est donné par les coefficients  $c_0 = x_0$ ,  $c_n = 0 \forall n \neq 0$ . La TF du signal n'est donc pas définie. Mais imaginons de mesurer ce signal pendant un intervalle de temps de *durée finie* :

$$\begin{aligned} x_1(t) = x_0 &= \text{cte pour } -T \leq t \leq T, \quad 0 \text{ ailleurs} \\ &= x_0 \text{Rect}(t/T); \end{aligned} \quad (6.13)$$

la fonction  $x_1(t)$  est alors une fonction constante sur un intervalle de durée  $2T$ , ce qu'on

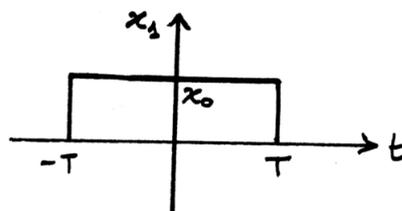


FIG. 6.5 – La fonction  $x_1(t) = x_0 \text{Rect}(t/T)$ .

appelle une fonction rectangle, notée  $\text{Rect}(t/T)$ . Elle n'est pas périodique, donc sa SF

n'est pas définie, mais elle est d'énergie finie, et on peut donc en calculer la TF :

$$\begin{aligned}
 X_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)e^{-i\omega t} dt = \\
 &= \int_{-T}^{+T} x_0 e^{-i\omega t} dt = \\
 &= -x_0 \frac{1}{i\omega} [e^{-i\omega t}]_{-T}^{+T} = \\
 &= -x_0 \frac{e^{-i\omega T} - e^{+i\omega T}}{i\omega} = \\
 &= x_0 2T \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} = x_0 2T \operatorname{sinc}(\omega T) \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

où on a introduit la fonction *sinus cardinal*  $\operatorname{sinc}(y) = \sin(y)/y$ . Traçons  $X_1(\omega)$  (la fonction est réelle pour ce cas particulier, on peut donc la dessiner sans prendre le module) :

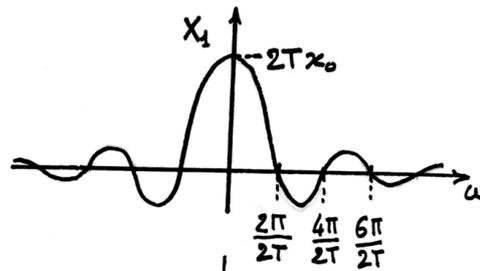


FIG. 6.6 – TF du signal rectangle  $x_1(t)$ .

### 6.4.1 Dualité temps-fréquence, influence de la durée du signal sur son spectre

En comparant maintenant avec la SF de  $x(t) = x_0 = \text{cte}$ , on remarque que la raie spectrale à  $\omega = 0$  qu'on avait trouvé pour la SF semble remplacé par un pic plus complexe et élargi autour de la même pulsation. Que devient ce pic si on change la durée  $T$  du signal ? La TF du signal de durée limitée tend-il à se rapprocher de la SF de celui de durée infinie ? On peut évaluer la forme du pic central de  $X_1(\omega)$  en calculant

- la hauteur du pic :  $x_0 2T = x_0 \Delta t$  avec  $\Delta t$  la durée du signal ;
- la largeur du pic  $\Delta\omega$  : on a  $\Delta\omega = 4\pi/2T = 4\pi/\Delta t$  entre deux zéros.

La largeur du pic  $\Delta\omega$  est inversement proportionnelle à la durée  $\Delta t$  :

$$\Delta\omega \Delta t = \text{cte}. \quad (6.15)$$

C'est une relation importante entre la largeur du spectre d'un signal et sa durée, qui est toujours vérifiée : plus le signal est court, plus sa TF et donc son spectre sont élargis

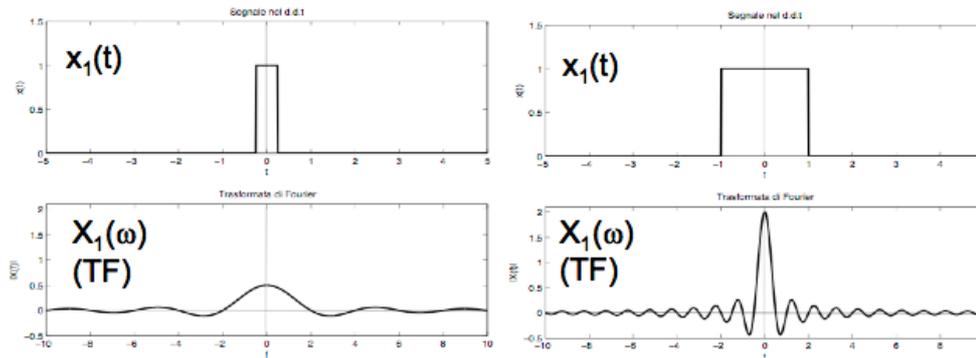


FIG. 6.7 – Influence de la durée  $\Delta t$  d'un signal sur son spectre.

sur un grand intervalle de fréquences. On parle ainsi de **dualité temps-fréquence**. La figure 6.7 montre la TF de deux fonctions rectangle de durée différente.

Donc, plus la durée  $\Delta t$  du signal est grande, plus le pic de sa TF est haut et étroit : en même temps que le signal  $x_1(t)$  s'approche du signal de durée infinie  $x(t)$  (sa durée devient de plus en plus grande), le spectre  $X_1(\omega)$  s'approche de plus en plus d'une raie très étroite centrée sur la pulsation  $\omega = 0$ ...

## 6.5 TF au sens des distributions : la distribution delta de Dirac $\delta(y)$

Que se passe-t-il à la limite  $T \rightarrow \infty$  ? Le signal  $x_1(t)$  tend vers le signal constant  $x(t) = x_0$  : que devient sa TF ? Retrouvera-t-on la SF du signal constant ?

Presque, mais pas exactement. Voyons. En principe, nous savons que nous ne sommes pas autorisés à calculer la TF de la fonction limite  $\lim_{T \rightarrow \infty} x_1(t) = x(t)$ , car cette fonction n'est pas à carré sommable. Mais nous pouvons essayer de calculer la limite<sup>3</sup> de la TF de la fonction  $x_1(t)$  :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} X_1(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} x_0 2T \operatorname{sinc}(\omega T) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } t = 0 \\ 0 & \text{pour } t \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Le résultat n'est donc pas une fonction ! Ce n'est pas étonnant qu'on ne puisse pas le calculer directement par TF. Cependant, c'est un résultat intéressant et raisonnable : nous avons trouvé, comme prévu, un spectre qui consiste en une seule raie spectrale à la pulsation  $\omega = 0$ , nul ailleurs, comme nous nous attendions par comparaison avec la SF. Seulement, l'amplitude en  $\omega = 0$  est infini. Nous voudrions pouvoir "garder" ce résultat : pour cela il faut admettre cette limite de fonction dans notre univers mathématique.

On définit alors la **distribution delta de Dirac**  $\delta(y)$ . Une distribution (également appelée fonction généralisée) est un objet qui généralise la notion de fonction. Dans

<sup>3</sup>Essayez de calculer cette limite comme exercice. On rappelle que  $\operatorname{sinc}(0) = 1$ .

notre cas, la distribution  $\delta(y)$  dépendante de la variable  $y$  est la fonction nulle partout sauf en zéro où elle est divergente. Ces conditions ne sont pas suffisantes pour la définir de manière univoque car il manque une condition de normalisation. Si on rajoute une telle condition, on parvient à définir le delta de Dirac par les propriétés suivantes :

$$\delta(y) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } y = 0 \\ 0 & \text{pour } y \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) dy = 1 \quad (6.17)$$

De manière alternative mais équivalente, le delta de Dirac peut être défini comme la limite de plusieurs fonctions *normalisées* : la fonction sinus cardinal, comme dans notre introduction, mais aussi une fonction rectangle de plus en plus étroite, une fonction triangle, une gaussienne, et encore d'autres fonctions. Des exemples sont donnée dans la figure 6.8.

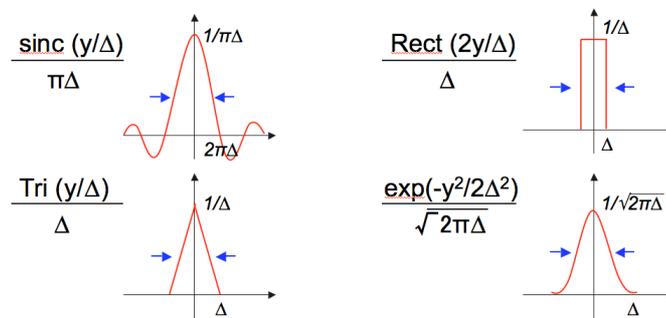


FIG. 6.8 – Quatre fonction dont la limite pour  $\Delta \rightarrow 0$  est une distribution delta de Dirac  $\delta(y)$ .

On introduit aussi une représentation graphique pour le delta de Dirac : une flèche vers le haut positionnée en  $y = 0$ , de longueur égale à 1 (figure 6.9). Comme ça, on indique à la fois le point où la distribution diverge, et sa normalisation.

On peut maintenant facilement définir un delta de Dirac positionné non pas en  $y = 0$  mais en  $y = y_0 \neq 0$  : il suffit de faire une translation, et on obtient donc

$$\delta(y - y_0)$$

qui sera représenté par une flèche de longueur 1 en  $y_0$  (figure 6.9). Encore, la normalisation de la distribution permet de donner un sens au fait de la multiplier par une constante  $a$  : on obtient toujours une fonction nulle partout et infinie en un point, mais dont l'intégrale vaut  $a$ . On la représentera alors par une flèche de longueur  $a$ . Dans la figure 6.9, on a représenté par exemple  $2\delta(y - y_1)$  comme une flèche de longueur 2 positionné en  $y = y_1$ . Attention donc : multiplier delta par une constante  $a$  signifie modifier non pas son amplitude (qui reste égale à zéro ou infini) mais son intégrale :  $\int a\delta(y)dy = a$ .

### 6.5.1 Propriétés de la distribution de Dirac

Au delà de cette définition comme limite de fonctions, le delta de Dirac a des propriétés importantes et utiles, qui sont liées à l'opération d'intégration. Écrivons-les, avec

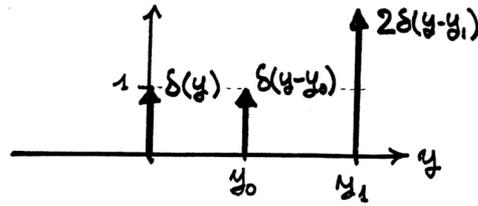


FIG. 6.9 – Représentation graphique des distributions delta de Dirac.

celles que nous avons déjà énoncées :

$$1. \delta(y) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } y = 0 \\ 0 & \text{pour } y \neq 0 \end{cases} \quad (\text{et donc } \delta(y - y_0) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } y = y_0 \\ 0 & \text{pour } y \neq y_0 \end{cases});$$

2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) dy = 1 \text{ condition de normalisation ;}$$

3.

$$\delta(ay) = \frac{1}{|a|} \delta(y); \quad (6.18)$$

Démonstration : pour  $a > 0$ , on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\pm ay) dy = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z) \frac{dz}{\pm a} = 1/a$ .

4. Pour finir, une propriété très importante, qui est en fait une autre manière de définir le delta de Dirac :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - y_0) f(y) dy = f(y_0). \quad (6.19)$$

Montrons cette relation. Multiplier  $\delta(y - y_0)$  par une fonction régulière  $f(y)$  donne évidemment zéro partout et infini en  $y_0$ , donc la seule contribution à l'intégrale vient du point  $y = y_0$ . En ce point, la fonction  $f(y)$  vaut  $f(y_0)$ , et on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - y_0) f(y) dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - y_0) f(y_0) dy = \\ &= f(y_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - y_0) dy = f(y_0). \end{aligned}$$

L'introduction de la fonction généralisée delta de Dirac parmi nos fonctions permet donc de définir une TF pour la fonction constante  $x(t) = x_0$  : selon notre passage à la limite, on a

$$TF[x_0] = \lim_{T \rightarrow +\infty} TF[x_0 \text{Rect}(t/T)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} x_0 2T \text{sinc}(\omega T) = x_0 2\pi \delta(\omega) \quad (6.20)$$

La TF de la fonction constante n'existe pas en tant que fonction régulière, mais peut être identifiée à une distribution : on dit qu'elle n'existe pas **au sens des fonctions (asdf)** mais qu'elle existe **au sens des distributions (asdd)**.

• *Exercice*

Montrer le résultat précédent (6.20), en utilisant la relation

$$\delta(\omega) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (1/\pi\Delta) \operatorname{sinc}(y/\Delta).$$

Nous avons donc réussi, par un passage à la limite, à trouver une généralisation de la TF pour un cas de fonction d'énergie non finie, la fonction constante. Même si le résultat n'est pas une véritable fonction mais une distribution. On peut donc espérer de trouver une méthode plus directe pour généraliser le calcul de la TF à de fonction qui ne sont pas à carré sommable? Pour pouvoir définir une décomposition en composantes harmoniques pour une classe de fonctions plus large, nous aurons besoin d'introduire une opération encore un peu différente : la transformée de Laplace. Nous allons le faire en 9.

## 6.6 Nos premières TF

Résumons donc nos premiers résultats concernant les TF : nous avons

$$TF[\operatorname{Rect}(t/T)] = 2T \operatorname{sinc}(\omega T) \quad (6.21)$$

$$TF[1] = 2\pi\delta(\omega) = \delta(f) \quad \text{asdd} \quad (6.22)$$

$$TF[\delta(t)] = 1 \quad \text{asdd} \quad (6.23)$$

où la deuxième relation correspond au cas qu'on vient d'étudier avant pour  $x_0 = 1$ , et nous avons introduit le résultat complémentaire pour la TF d'un delta de Dirac sans démonstration. Notons aussi que l'équivalence  $2\pi\delta(\omega) = \delta(f)$  descend de la propriété 6.18.

Ces trois relations sont très importantes et doivent être connues par coeur. Nous les réutiliserons très souvent.

### 6.6.1 Les TF des fonctions de base : le dictionnaire

Il est important, pour en saisir le sens, de bien comprendre comment se calcule une TF, et quelques exercices où le calcul est fait explicitement vous seront proposés en TD. Cependant, le but de ce cours n'est pas tant d'apprendre à calculer des TF quant de savoir s'en servir pour étudier des signaux où déterminer la réponse d'un système à ces signaux : il est donc aussi important d'apprendre à retrouver rapidement les transformées de fonctions d'intérêt et à les utiliser correctement.

Pour cela, vous avez à disposition une série de résultats notables rassemblés dans une *dictionnaire* que vous pourrez toujours consulter (Annexe A).

Ce dictionnaire contient une liste de fonctions  $x(t)$  et leur TF exprimée soit en fonction de la pulsation,  $X(\omega)$ , soit de la fréquence,  $X(f)$ . Il reporte aussi les transformée de Laplace, que nous introduirons au chapitre 9, avec l'intervalle de validité correspondant. Pour chaque fonction on a aussi un commentaire où on dit en particulier si la TF fait intervenir des distributions (essentiellement  $\delta(\omega)$ ) ou pas. Dans le cas affirmatif, la transformée est dite *au sens des distributions*; elle est dite *au sens des fonctions* dans le cas contraire.

Profitons tout de suite du dictionnaire pour vérifier nos calculs : pour la fonction rectangle<sup>4</sup> on a bien la même transformée de Fourier en sinus cardinal que nous avons calculé. Les TF de la distribution delta de Dirac et de l'unité  $y$  sont aussi. On remarquera que le dictionnaire contient un bon nombre de fonctions qui ne sont pas à carré sommable : les TF de ces fonctions sont alors définies *au sens des distributions*, et peuvent être déterminées par des passages au limite, comme nous venons de le faire pour la fonction constante (on en verra un autre exemple important dans le chapitre 7). Cependant, il existe une méthode qui permet d'obtenir les propriétés spectrales de ces fonctions beaucoup plus directement : c'est la transformée de Laplace, qui généralise la TF à grand nombre de fonctions d'énergie infinie et que nous allons introduire au chapitre 9. Grâce à sa plus grande versatilité, c'est la transformée de Laplace que nous allons aussi utiliser dans la résolution des EDL (chapitre 11).

## 6.7 Pour aller plus loin : les propriétés des TF

Evidemment, nous aurons besoin aussi de fonctions qui ne sont pas dans le dictionnaires. Souvent, cependant, ces fonctions peuvent être déterminées à partir de celles du dictionnaire, par translation par exemple, où en le multipliant par une fonction simple, ou encore en sommant deux fonctions : dans la plupart de ces cas on peut retrouver les transformées de la nouvelle fonction à partir de celles de la fonction connue, en utilisant quelques propriétés des TF qui sont rassemblées dans le tableau de l'Annexe B.

Regardons les principales propriétés en détail.

1. Commençons par le **théorème de Parseval**, que nous avons déjà discuté : le module carré de la TF représente le spectre en énergie du signal.
2. **Dualité** : si la TF de  $x(t)$  est  $X(\omega)$ , alors la TF de la fonction  $X(t)$  est  $x(-\omega)$  : l'opération de transformée est en quelques sorte symétrique. Exemples (à retrouver sur le dictionnaire) : la TF de l'unité est un delta de Dirac, et la TF du delta de Dirac (qui est une distribution) est égale à 1 ; la TF de la fonction sinus cardinal est la fonction rectangle, et inversement comme nous l'avons vu (figure 6.10).
3. **Linéarité** : la TF est linéaire : si on considère une combinaison linéaire de deux fonctions, la transformée est tout simplement la combinaison linéaire des transformées.
4. **Translation** : une translation temporelle de  $t_0$  de la fonction  $x(t)$  a par conséquence l'apparition d'une phase  $-\omega t_0$  dans la TF. Exemple : la TF d'une fonction rectangle décalée dans le temps a la même amplitude que celle de la fonction rectangle, mais la phase aura changé. C'est une propriété importante pour ce qui concerne l'énergie : une translation temporelle affecte la phase du spectre, mais ne change pas son amplitude, et donc le spectre d'énergie est inchangé.

<sup>4</sup>Il est conseillé de faire toujours attention à la définition exacte d'une fonction rectangle : il peut s'agir d'un rectangle de largeur  $T$ , ou  $2T$ , centré en zéro, ou bien démarré en zéro... Dans ce cours, nous avons pris la même définition que sur ce dictionnaire,  $\text{Rect}(t/T) = 1$  pour  $t \in [-T, T]$ , 0 ailleurs. Mais des définitions différentes pourraient être données dans les exercices ou dans d'autres ouvrages.

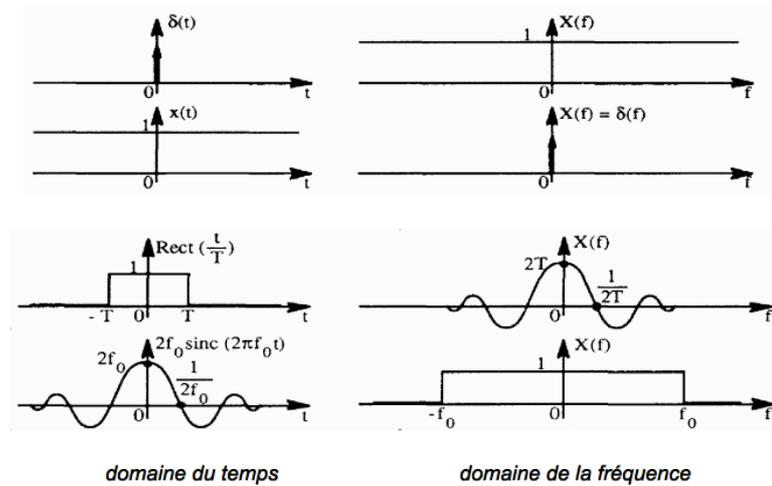


FIG. 6.10 – Exemples de la dualité de la TF : fonction unité et delta de Dirac, fonction sinus cardinal et fonction rectange.

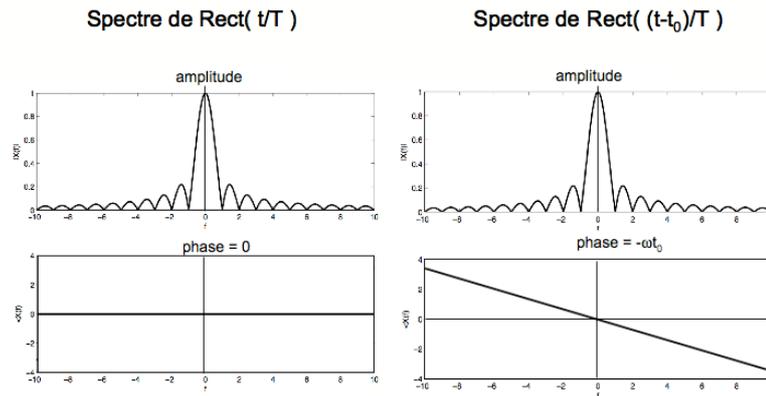


FIG. 6.11 – TF d'une fonction rectange et de la même fonction décalée dans le temps.

5. **Modulation** : c'est un peu la propriété réciproque de la translation : si on multiplie un signal  $x(t)$  par un terme de phase  $\exp(i\omega_0 t)$ , alors sa TF sera décalée de  $\omega_0$  dans l'espace des pulsations.

La encore c'est une propriété très utile car nous savons que  $\exp(i\omega_0 t)$  représente une fonction oscillante (sa partie réelle est un cosinus) : la multiplication d'une simple fonction constante par  $\exp(i\omega_0 t)$  va nous permettre alors de déterminer la TF de la fonction  $\cos(\omega_0 t)$  à partir de celle de la fonction  $x(t) = 1$ . Nous allons voir cela en 7.2.

6. **Changément d'échelle** : Si l'on dilate la fonction dans l'espace temps, en multipliant le temps par un coefficient  $a$  (avec  $|a| < 1$ ), alors les TF correspondantes seront contractées dans l'espace des fréquences, et leur amplitude est multipliée

par un facteur  $1/|a| > 1$ . Le contraire advient si  $|a| < 1$ . C'est une conséquence du principe de dualité temps-fréquence dont nous avons parlé. Remarquons aussi que  $a$  peut être négatif, ce qui implique que la fonction est aussi inversée par rapport à  $t = 0$ , et sa TF l'est donc aussi.

Pour finir, des propriétés qui ne sont pas mentionnée dans le tableau, mais que nous avons déjà vu pour les SF, et qui ont leur analogue pour la TF : les propriétés de **parité**. La TF d'une fonction paire (symétrique pour les temps positifs et négatifs) est purement réelle, alors que celle d'une fonction impaire est purement imaginaire. De même la transformée de Fourier d'une fonction réelle sera paire.

Arrêtons-nous la pour le moment. Dans le chapitre 7 nous allons nous familiariser avec ces concepts en traitant quelques exemples grâce à ces propriétés. On fera ensuite un incursion dans un sujet important en pratique, qui est la définition et l'utilisation de la TF pour des fonctions discrètes, ce qui signifie en pratique savoir traiter toutes les fonctions et les signaux numériques (chapitre 8). Une fois discuté ces points et fait un peu de pratique avec la TF, nous allons finalement pouvoir introduire la TL et aborder la question de la réponse d'un système linéaire à un signal quelconque, ce qui fera l'objet des chapitres 9, 10 et 11.

# Chapitre 7

## Fonctions périodiques et fonctions limitées dans le temps

### 7.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons introduit la série de Fourier, puis la transformée de Fourier comme outils pour décrire un signal temporel en termes de ses composantes harmoniques. Nous avons vu que cette décomposition en composantes se traduit par la représentation du signal dans le domaine de la fréquence, plutôt que du temps : cette représentation en fonction de la fréquence (ou de la pulsation) est appelée le spectre du signal, et contient toute l'information sur le signal lui-même : on détermine le spectre à partir du signal (en calculant la SF ou la TF), et le signal à partir du spectre (avec les transformations inverses).

Comme nous l'avons vu aussi, le spectre d'un signal périodique peut être obtenu par la SF et est toujours discret, constitué par un ensemble discret d'amplitudes complexes  $\{c_n\}$  ; pour une fonction apériodique, le spectre est donné par la TF et devient une fonction continue de la pulsation,  $X(\omega)$ . En d'autres mots, le spectre du signal apériodique contient toutes les pulsations (fréquences), alors que seulement les composantes harmoniques de période  $T, 2T, 3T, \dots$  sont autorisées pour un signal périodique de période  $T$ .

Dans ce chapitre, nous allons partir de ces remarques pour aborder deux questions importantes :

- Peut-on calculer la TF d'une fonction périodique (vue comme cas particulier d'une fonction quelconque) ? Ce spectre sera-t-il discret ? Et quelle est alors sa relation avec la SF de la même fonction ?
- Une fois obtenue la TF d'une fonction périodique, quel sera l'effet sur son spectre si cette fonction est limitée à une durée finie  $T_e$ , par exemple parce qu'elle est issue d'une mesure effectuée pendant un temps donné ? En d'autres termes, quel est l'effet d'une *limitation supérieure* du temps d'observation ?

Avant de commencer, remarquons encore que la dernière question suggère en quelques sortes une question complémentaire : quels effets engendra une *limitation inférieure* du

temps d'observation, c'est-à-dire la nécessité d'enregistrer le signal et donc de l'échantillonner avec un pas de temps  $\Delta t$  ? Cette question sera abordée dans le chapitre 8.

## 7.2 TF et SF d'une fonction périodique

La première question que nous allons aborder est donc si et comment on peut déterminer la TF d'une fonction périodique, vue comme un cas particulier d'une fonction quelconque. Il est vrai que un signal périodique n'est pas d'énergie finie : en principe cela pose un problème pour la détermination de la TF, mais nous avons déjà vu un exemple dans lequel cette difficulté peut être surmontée au prix d'introduire la distribution delta de Dirac. C'est le cas de la

**Fonction**  $x(t) = x_0 = \text{constante}$ , pour laquelle nous avons<sup>1</sup>

$$X(\omega) = TF[x(t)] = x_0 2\pi\delta(\omega). \quad (7.1)$$

A partir de ce cas et en utilisant les propriétés des TF introduites à la fin du chapitre 6, nous allons pouvoir déterminer une série de résultats intéressants. Commençons par un résultat que nous avons déjà obtenu.

Le signal  $x(t)$  est en effet un cas particulier de fonction périodique (de période infinie), et nous avons comparé sa TF à la SF, qui donne  $c_0 = x_0$ ,  $c_n = 0$  pour tout  $n \neq 0$  : dans les deux cas, la seule pulsation  $\omega = 0$  est présente dans le spectre, donnant un coefficient fini  $x_0$  dans le cas de la SF, un pic infini  $x_0 2\pi\delta(\omega)$ ,  
portionnel »  
à  $x_0$ , dans le cas de la TF.

Passons maintenant au cas qui nous intéressent, en procédant par étapes.

**Fonction**  $x_1(t) = x_0 e^{i\omega_0 t}$  :

Grâce à la propriété de **modulation**, nous avons

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= TF[x_1(t)] = TF[e^{i\omega_0 t} x_0] = TF[e^{i\omega_0 t} x(t)] = \\ &= X(\omega - \omega_0) = x_0 2\pi\delta(\omega - \omega_0) : \end{aligned} \quad (7.2)$$

On a le même delta de Dirac que pour la fonction constante, mais translaté en  $\omega = \omega_0$ .

**Fonction**  $x_2(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$  :

Nous savons récrire  $\cos(\omega_0 t)$  comme  $\frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$ . En utilisant à la fois les propriétés de linéarité et modulation, nous avons alors

$$\begin{aligned} X_2(\omega) = TF[x_2(t)] &= TF\left[\frac{1}{2} x_0 (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})\right] = TF\left[\frac{1}{2} e^{i\omega_0 t} x(t) + \frac{1}{2} e^{-i\omega_0 t} x(t)\right] = \\ &= \frac{1}{2} (X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)) \\ &= x_0 (\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)). \end{aligned} \quad (7.3)$$

<sup>1</sup>Si on part de la TF de la fonction unité,  $TF[1] = 2\pi\delta(\omega) = \delta(f)$ , ce résultat peut être vu comme une application de la propriété de linéarité :  $TF[x(t)] = TF[x_0 1] = x_0 TF[1]$ .

Nous avons donc pour  $x_0 = 1$  le résultat général suivant : la TF de la fonction périodique  $\cos(\omega_0 t)$  est donnée par deux delta de Dirac d'amplitude  $\pi$ , une en  $\omega = \omega_0$ , l'autre en  $\omega = -\omega_0$ . C'est un résultat très important que nous allons réutiliser bien souvent : il est bon de le mémoriser !!

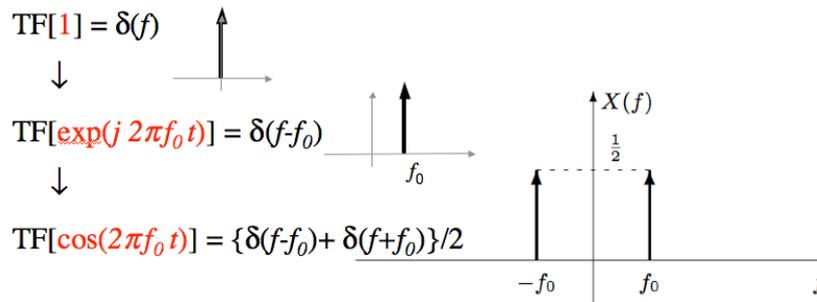


FIG. 7.1 – TF des fonctions  $x(t) = 1$ ,  $x_1(t) = e^{i\omega_0 t}$  et  $x_2(t) = \cos(\omega_0 t)$  en fonction de la fréquence  $f$ .

Comparons maintenant ce résultat avec la SF du même signal,

$$SF[x_0 \cos(\omega_0 t)] = \begin{cases} c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2} x_0 \\ c_n = 0 \text{ pour } |n| \neq 1 \end{cases} \quad (7.4)$$

où les deux coefficients non nuls  $c_1$  et  $c_{-1}$  correspondent aux deux pulsations  $\omega_0$  et  $-\omega_0$  (ou  $f_0$  et  $-f_0$ ). On voit donc que, encore ici, les pulsations pour lesquelles le spectre est non nul sont les mêmes pour la SF et la TF : chaque composante non nulle en SF se traduit, quand on calcule la TF du même signal, en une raie infiniment fine, décrite par une distribution delta de Dirac  $2\pi\delta(\omega) = \delta(f)$ , placé à la même pulsation (ici  $\pm\omega_0$ ) et multiplié par la même constante (ici  $x_0/2$ ).

La notion de spectre est donc préservée au passage entre SF et TF : les mêmes contributions en fréquence sont mises en évidence par les deux méthodes, qui sont donc équivalentes pour une fonction périodique. La figure 7.1 résume ces résultats.

Poussons donc notre raisonnement un peu plus loin : que peut-on dire d'une fonction périodique mais non sinusoïdale ?

#### Fonction $y(t)$ périodique quelconque :

Nous savons traiter le cas d'une fonction périodique quelconque par la SF, qui a été introduite justement à ce but : cela nous permet d'écrire notre fonction  $y(t)$  comme combinaison linéaire des fonctions oscillantes complexes  $f_n = \exp(i\omega_n t)$  avec  $\omega_n = n\omega_0$ . On a ainsi

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t}. \quad (7.5)$$

On peut donc calculer la TF de  $y(t)$  à partir de cette écriture, en utilisant encore une

fois les propriétés de linéarité et modulation :

$$\begin{aligned} Y(\omega) = TF[y(t)] &= TF\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n TF[e^{i\omega_n t}] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n 2\pi \delta(\omega - \omega_n). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Comme on aurait pu le prévoir, la TF de la fonction périodique contient une fois encore seulement les pulsations admises par la contrainte de périodicité : chaque composante harmonique  $\omega_n$  correspond à une raie en delta de Dirac  $2\pi\delta(\omega) = \delta(f)$  d'amplitude  $c_n$  (figure 7.2).

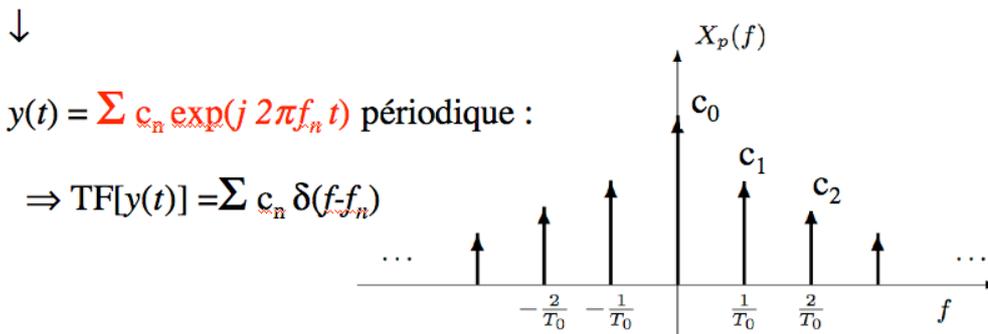


FIG. 7.2 – TF et SF d'une fonction périodique quelconque.

La correspondance entre TF et SF est donc assurée : les deux méthodes donnent la même information, en sachant que, dans le cas de la TF, des distributions de Dirac doivent apparaître toutes les fois que une périodicité impose une sélection des fréquences. Grâce à l'introduction des distributions, la TF peut donc être calculée aussi bien pour des fonctions périodique ou apériodique : étant plus générale, elle est plus pratique à utiliser dans tous les cas.

## 7.3 Influence de la durée limitée de l'acquisition

### 7.3.1 TF d'un signal sinusoïdal de durée limitée

Venons donc à notre deuxième question : quel est l'effet d'une limitation de la durée du signal à une durée  $T_e$  ? Et particulièrement pour le cas d'une fonction périodique ? La encore, nous avons déjà obtenu une première réponse dans le cas particulier de la fonction constante (cas  $\omega_0 = 0$ ) dans le chapitre 4, où nous avons introduit, pour pouvoir « découper » une partie du signal, la fonction rectangle, égale à 1 sur une durée  $2T$ . Nous avons déjà déterminé au chapitre 4 la TF de cette fonction. Nous savons qu'une translation dans le temps de cette fonction ne change rien au module de sa TF, et ne modifie que sa

phase. On peut donc définir une fonction rectangle décalée  $x_R(t)$ , ou fonction **porte rectangulaire**, pour laquelle nous pouvons déterminer la TF : si

$$x_R(t) = x_0 \text{ entre } 0 \text{ et } T_e \text{ (ou n'importe quel autre intervalle de durée } T_e), \quad (7.7)$$

alors

$$|X_R(\omega)| = |TF[x_R(t)]| = x_0 T_e \operatorname{sinc}\left(\omega \frac{T_e}{2}\right). \quad (7.8)$$

Plus la durée  $T_e$  est grande, plus le sinus cardinal est étroit et son amplitude en zéro importante. Plus la durée  $T_e$  est petite, plus le sinus cardinal est large et son amplitude en zéro faible.

Utilisons maintenant les propriétés des TF pour essayer de déterminer le spectre d'un signal sinusoïdale coupé à partir de (7.8). C'est une question particulièrement intéressante, parce que, comme nous l'avons vu, un système physique linéaire excité par une fonction harmonique (par exemple par une onde électromagnétique monochromatique) ou bien libre d'osciller après avoir été mis hors d'équilibre émet un signal sinusoïdal à fréquence donnée : le spectre de ce signal sera donc composé d'une seule raie spectrale. Mais si on enregistre ce signal pendant un temps  $T_e$  et on calcule la TF du signal ainsi obtenu, la durée de l'enregistrement va modifier le spectre, et il faut savoir *comment* pour pouvoir interpréter le résultat.

**Fonction cosinus limitée à une durée  $T_e$ ,  $x_{R2}(t) = \cos(\omega_0 t) x_R(t)$  :**

Encore une fois on multiplie une fonction dont on connaît la TF par cosinus : en utilisant les formules d'Euler pour le cosinus et la propriété de modulation, on a

$$\begin{aligned} |X_{R2}(\omega)| = |TF[x_{R2}(t)]| &= |TF[\cos(\omega_0 t)x_R(t)]| = \\ &= \frac{x_0}{2} (X_R(\omega - \omega_0) + X_R(\omega + \omega_0)) = \\ &= \frac{x_0}{2} \left[ T_e \operatorname{sinc}\left(\left(\omega - \omega_0\right)\frac{T_e}{2}\right) + T_e \operatorname{sinc}\left(\left(\omega + \omega_0\right)\frac{T_e}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Le résultat est représenté en figure 7.3 : comme pour le pic de la fonction constante, chaque pic du spectre est remplacé par une raie

», donné par une fonction sinus cardinal, d'autant plus large que la durée  $T_e$  est faible. Nous avons déjà vu que la largeur de cette raie est  $\Delta\omega = 2\pi/T_e$  (en fréquence,  $\Delta f = 1/T_e$ ), et son amplitude  $x_0 T_e$ . Pour une durée infinie, c'est à dire à la limite  $T_e \rightarrow \infty$ , la largeur tombe à zéro on retrouve les delta de Dirac en  $\pm\omega_0$ .

### 7.3.2 Influence de la forme de la porte

La raie spectrale d'un signal harmonique coupé a donc une forme caractéristique de la manière dont on l'a coupé : si on coupe par une porte rectangulaire, la raie sera un sinus cardinal, sans lien avec le signal de départ. On peut donc changer la forme de la raie

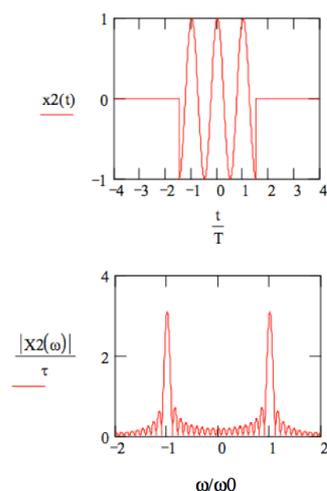


FIG. 7.3 – La fonction  $x_{R2}(t) = \cos(\omega_0 t) x_R(t)$  et le module de sa TF.

en changeant la forme de la porte? Oui. En traitement du signal on parle de fenêtrage (windowing en anglais) quand on choisi d'appliquer une fonction porte au signal d'entrée pour obtenir une forme particulière du spectre. Si on remplace la porte rectangulaire par une porte gaussienne de même largeur (voir figure 7.4), par exemple, et on considère le signal

$$x_{R3}(t) = \cos(\omega_0 t) \exp(-\pi t^2/T_e^2),$$

alors on obtient comme spectre deux raies de forme gaussienne, car

$$TF[\exp(-\pi t^2/T_e^2)] = \tau \exp(\omega^2 T_e^2/4\pi).$$

Ces raies n'ont plus les rebonds du sinus cardinal, ce qui peut représenter un avantage dans certains cas, mais cela implique un travail en plus au niveau du signal d'entrée.

### 7.3.3 Spectre d'une fonction périodique de durée limitée $T_e$

Qu'est-ce qui se passe pour une fonction périodique  $y(t)$  quelconque coupée sur une durée  $T_e$ ? On devine que les résultats trouvés sont valables très en général : quand on limite la durée d'une fonction périodique à une durée  $T_e$  finie, en la multipliant par une fonction rectangle, chaque raie de son spectre est remplacé pas la TF de la fonction rectangle elle même, c'est à dire par un sinus cardinal dont la largeur  $\Delta\omega = 2\pi/T_e$  et l'amplitude  $T_e$  sont déterminées par la durée. Par exemple, le spectre de la fonction périodique "dents de scie" de la figure 7.5 dont la durée a été limitée à l'intervalle montré sur la figure est constitué d'une série (c'est-à-dire une somme) de sinus cardinaux, chacun correspondant à un pic du spectre de la fonction de durée infinie.

Il est important de se rendre compte aussi que cet élargissement des raies a des **conséquences importantes sur le plan expérimental** : si on veut pouvoir distinguer deux raies spectrales voisines  $\omega_1$  et  $\omega_2$  dans un spectre discret, il faut que leur largeur ne soit pas trop importante par rapport à la distance entre elles. Il faut, pour pouvoir

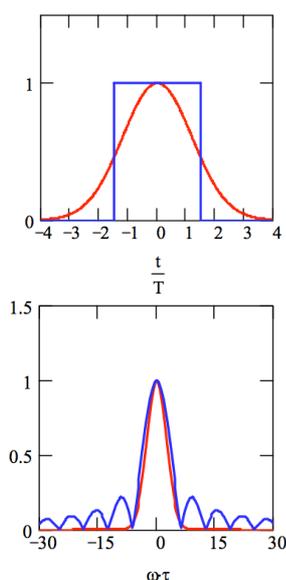


FIG. 7.4 – Influence de la forme de la porte : fonctions rectangle  $x_R(t)$  (en bleu) et gaussienne  $x_{R3}(t)$  (en rouge) et les modules de leur TF (divisées par la durée  $T_e$ ). (A REFAIRE)

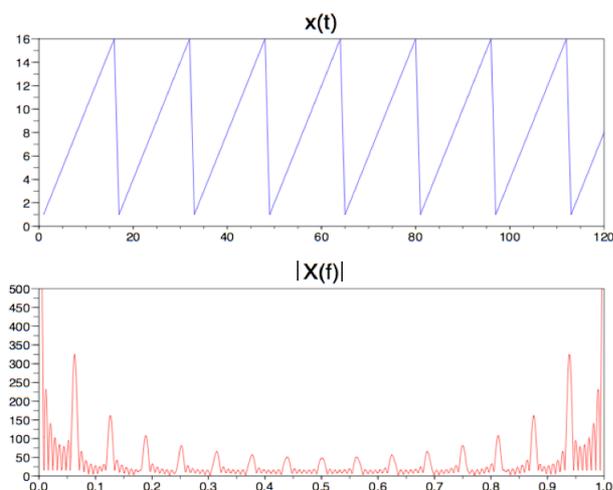


FIG. 7.5 – La TF d'une fonction  $x(t)$  périodique de durée limitée.

les mesurer s'assurer que  $\Delta\omega < \omega_1 - \omega_2$  (ou  $\Delta f < f_1 - f_2$ ). Pour que cette condition soit réalisée il faudra alors mesurer le signal correspondant sur une durée assez longue :

$$T_e = \frac{1}{\Delta f} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} > \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{f_1 - f_2}.$$

Rappelons encore que la forme en sinus cardinal des bandes élargies qui remplacent les pics dépend de la fonction rectangle qu'on a utilisé pour les couper (voir 7.3.2).

• *Exercice*

Calculer la TF de la fonction  $\cos(\omega_0 t) e^{-t^2/a}$  ; représenter la fonction et sa TF.

## Chapitre 8

# Echantillonnage et Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Dans le chapitre 7 nous avons vu que la limitation d'une fonction à une durée  $T_e$  finie change son spectre. Inversement, quels sera l'effet d'une *limitation inférieure* du temps d'observation ? Que se passe-t-il si on doit enregistrer le signal de manière discrète, avec un pas de temps  $\Delta t$  ? Cette question est très importante comme nous l'avons anticipé car la discretisation ou *échantillonnage* du signal est une des étapes fondamentales du processus de mesure, nécessaire pour pouvoir enregistrer le signal sous forme numérique.

De plus, un signal réel n'a pas toujours une forme analytique dont on peut calculer la TF. Dans ce cas, il est possible de la calculer numériquement. Pour le faire, il faut d'abord enregistrer le signal sur l'ordinateur à l'aide d'une carte d'acquisition, et donc de le numériser : nous devons choisir le pas d'échantillonnage  $\Delta t$  et la durée de l'acquisition  $T_e$ . Comment faire ce choix ? Pour la durée d'acquisition  $T_e$ , nous avons déjà compris que plus elle sera longue, plus les pics du spectre seront étroits. Nous allons voir maintenant comment le temps entre deux points de mesure  $\Delta t$  va influencer le résultat. On va ensuite introduire la *TF discrète*, qui permet pratiquement de calculer la TF pour un signal discretisé, et qu'on utilise de manière systématique en laboratoire (et en TP) pour toute analyse numérique de signaux. Conformément à ce qui est fait le plus couramment et pour plus de simplicité nous allons parler dans cette partie plutôt en termes de fréquence que de pulsation.

### 8.1 Echantillonnage d'une fonction

Remarquons tout de suite que le processus de mesure introduit nécessairement deux temps limites : la durée totale  $T_e$  de l'enregistrement, qui est le temps plus élevé observé, et le pas d'échantillonnage  $\Delta t$ , au dessous duquel il est impossible de mesurer les variations du signal. La dualité temps-fréquence nous amènera alors à introduire deux fréquences limites aussi, et comme la fréquence est inversement proportionnelle au temps, le temps  $\Delta t$  sera lié à la plus haute fréquence, la durée  $T_e$  à la fréquence observable la plus petite.

Considérons le signal  $x(t)$  (en bleu) de la figure 8.1. Une fois échantillonné, le signal

n'est plus continu mais discret (points rouges) : on passe d'une fonction continue à une série de  $N$  valeurs, séparées d'un intervalle de temps  $\Delta t$  :

$$x_k = x(k \Delta t) \quad k=0 \dots N-1 \quad (8.1)$$

avec  $\Delta t$  le pas d'échantillonnage. La durée totale du signal est donc

$$N \Delta t = T_e. \quad (8.2)$$

Comme nous venons de le voir (chapitre 7), il y a une limite inférieure à la précision avec

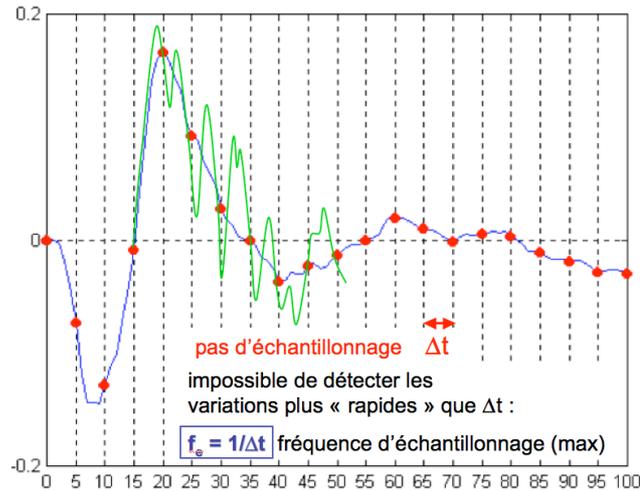


FIG. 8.1 – Echantillonnage.

laquelle on peut mesurer une fréquence, qui est donnée par la durée totale du signal : on appelle **résolution en fréquence**

$$\Delta f = \frac{1}{T_e} \quad \text{résolution en fréquence} \quad (8.3)$$

De manière symétrique, nous pouvons voir sur la figure 8.1 que le temps le plus court accessible,  $\Delta t$ , détermine la fréquence la plus élevée qu'on peut mesurer : si des variations qui se font sur des temps plus rapides que  $\Delta t$  existent (vert), nous ne pourrions pas les enregistrer avec ce pas d'échantillonnage. On ne pourra donc mesurer que des contributions oscillatoires plus lentes que  $\Delta t$ , c'est-à-dire des composantes fréquentielles de fréquence plus faibles que la **fréquence d'échantillonnage**  $f_e$  donnée par

$$f_e = \frac{1}{\Delta t} \quad \text{fréquence d'échantillonnage}. \quad (8.4)$$

C'est encore la dualité temps fréquence qui joue ici.

Si on veut que le signal échantillonné représente fidèlement tous les niveaux d'oscillation du signal continu, et que donc son spectre couvre bien toutes les fréquences présentes, il faut donc choisir un pas d'échantillonnage  $\Delta t$  suffisamment petit ; ou, de manière équivalente, une fréquence d'échantillonnage  $f_e$  suffisamment élevée. En même temps, il faut bien mettre une limite à ce choix, pour ne pas enregistrer trop de points inutilement. La question qui se pose est donc celle du choix optimal de  $f_e$  : et le problème s'avère ne pas être si simple.

## 8.2 Théorème de Shannon et repliement de spectre

### 8.2.1 TF (continue) d'une fonction échantillonnée

Essayons de déterminer le spectre du signal échantillonné. Considérons le signal échantillonné comme un signal du temps  $\hat{x}(t)$  qui est défini seulement pour des temps discrets :

$$\hat{x}(t) = x(k\Delta t) = x_k. \quad (8.5)$$

Que vaut sa TF  $\hat{X}(f)$  ? Partons de la TF  $X(f)$  de  $x(t)$  et gardons-en que les éléments discrets qui sont définis. On obtient, en écrivant  $t = k \Delta t$ ,

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \longrightarrow \hat{X}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi f k \Delta t} \Delta t, \quad (8.6)$$

ce qui définit théoriquement la **transformée de Fourier d'une fonction discrète**.

Attention, la TF donnée par cette formule est une fonction continue de la fréquence. En pratique, quand on calcule la TF par ordinateur, on a aussi une fonction discrète : on donnera une définition opérationnelle de cette transformée discrète un peu plus avant.

### 8.2.2 Périodisation du spectre

En remplaçant maintenant  $\Delta t = 1/f_e$  à l'exposant, on peut introduire une deuxième écriture pour la TF de la fonction  $\hat{x}(t)$ ,

$$\hat{X}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi \frac{f}{f_e} k} \Delta t. \quad (8.7)$$

Pour bien comprendre le rôle de la fréquence d'échantillonnage  $f_e$ , il est intéressant maintenant de déterminer la valeur de  $\hat{X}(f)$  à la fréquence  $f + f_e$ . On obtient

$$\begin{aligned} \hat{X}(f + f_e) &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi \frac{f+f_e}{f_e} k} \Delta t \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi \frac{f}{f_e} k} e^{-i2\pi k} \Delta t \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi \frac{f}{f_e} k} 1 \Delta t = \hat{X}(f) \end{aligned}$$

car  $\exp(-i2\pi k) = 1$  pour  $k$  entier. On a donc  $\hat{X}(f + f_e) = \hat{X}(f)$  ! Et on aurait évidemment trouvé la même chose pour  $f + 2f_e, f + 3f_e, \dots, f + mf_e$  pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ , car  $\exp(-i2\pi mk) = 1$ .

Qu'est-ce que cela veut dire ? Par définition, ce résultat montre que la TF de la fonction échantillonnée est **périodique de période  $f_e$**  : **le spectre de  $x(t)$  est périodisé** par l'échantillonnage, comme le montre la figure 8.2.

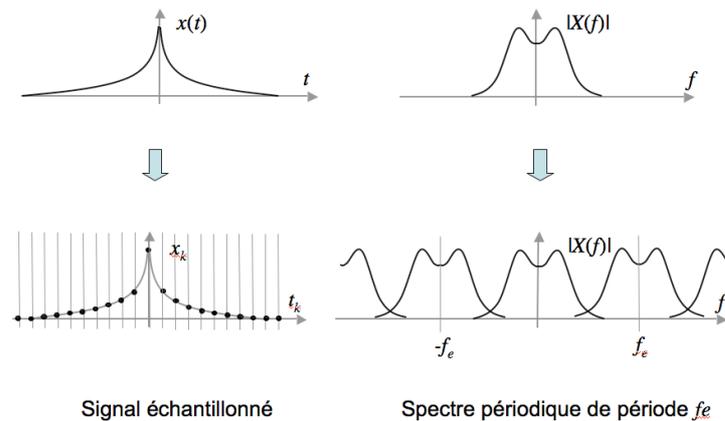


FIG. 8.2 – Périodisation du spectre après échantillonnage.

### 8.2.3 Théorème de Shannon

Il est donc clair pourquoi, au niveau du spectre, on a une limite supérieure aux fréquences qu'on peut observer : pour que les spectres de  $x(t)$  répétés ne se recouvrent pas, il faut que leur **largeur** ne soit pas trop importante par rapport à la période de répétition  $f_e$ . Inversement, donc, il faudra choisir une fréquence d'échantillonnage  $f_e$  suffisamment grande par rapport à la largeur du spectre qu'on veut mesurer : cela donne une limite inférieure

«naturelle»

pour le choix de  $f_e$  (et donc une limite supérieure sur  $\Delta t$ ). Ce résultat est formalisé par le théorème de Shannon, qu'on donne ici en forme incomplète :

#### Théorème de Shannon

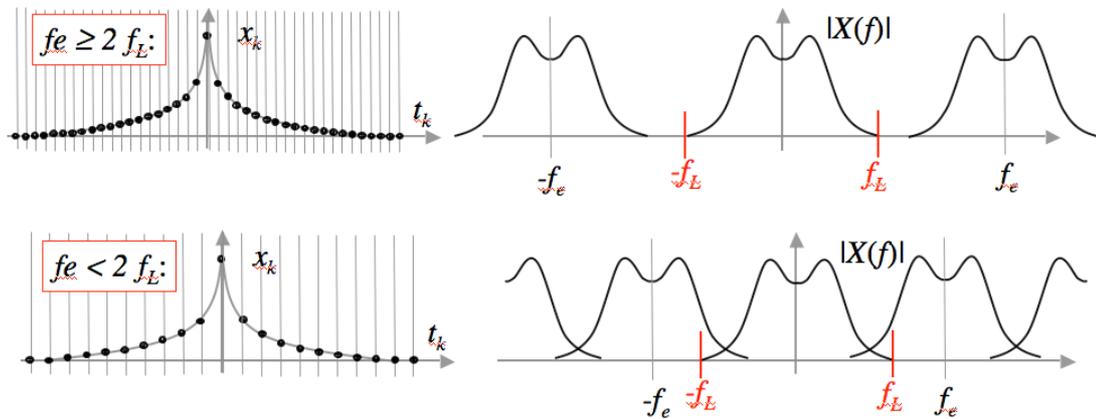
Soit  $x(t)$  un signal à **bande limitée**, c'est-à-dire tel que son spectre est limité à des fréquences inférieures à une fréquence  $f_L$  :

$$X(f) = 0 \text{ pour } |f| > f_L.$$

Pour bien représenter le signal  $x(t)$  et son spectre après échantillonnage, il faut alors choisir une fréquence d'échantillonnage  $f_e$  supérieure à la **largeur du spectre**  $2f_L$  :

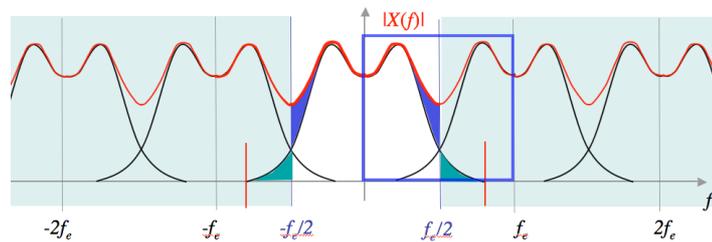
$$f_e > 2f_L. \quad (8.8)$$

Le théorème de Shannon complet donne ensuite la méthode pour reconstruire la fonction  $x(t)$  exactement à partir du spectre du signal échantillonné, ce qui est possible seulement si le signal est à bande limitée et si  $f_e$  réalise la condition donnée par le théorème. La figure 8.3 schématise la situation.

FIG. 8.3 – Théorème de Shannon : choix de  $f_e$ .

### 8.2.4 Repliement de spectre

On comprend intuitivement que si les spectres répétés se recouvrent, une partie de l'information sur le signal est perdue, et on ne pourra pas retrouver le signal d'origine par TF inverse. Plus précisément, si  $f_e < 2f_L$ , les spectres répétés se somment, comme indiqué sur la figure 8.4 : quand on regarde le spectre sur une période  $[-f_e/2, f_e/2]$

FIG. 8.4 – Repliement de spectre. Si  $f_e < 2f_L$ , les spectres du signal se somment (courbe rouge).

autour de  $f = 0$  (ou bien sur une intervalle  $[0, f_e]$ , ce qui est le plus fréquemment obtenu numériquement), on a alors l'impression que les

» du spectre du signal non échantillonné  $x(t)$  qui dépassent  $f_e/2$  se replient vers l'intérieur de cette intervalle et viennent se sommer à la partie du spectre de fréquence inférieure  $|f| < f_e/2$  : on parle pour cette raison de **repliement de spectre** pour décrire ce phénomène. Un exemple concret de repliement de spectre est donné dans la figure 8.5, où l'on a échantillonné une même fonction avec deux pas d'échantillonnage différents.

Remarquons aussi que si le signal d'origine n'est pas à bande limité le théorème de Shannon nous dit qu'il est impossible de l'échantillonner de manière parfaite, en reproduisant toutes les échelles de variation jusqu'au plus rapides : il faudra donc renoncer à le décrire de manière parfaite et trouver un compromis. Typiquement, le spectre est quand même décroissant pour  $f \rightarrow \infty$ , et il est possible de choisir une fréquence d'échantillonnage telle que les

« que

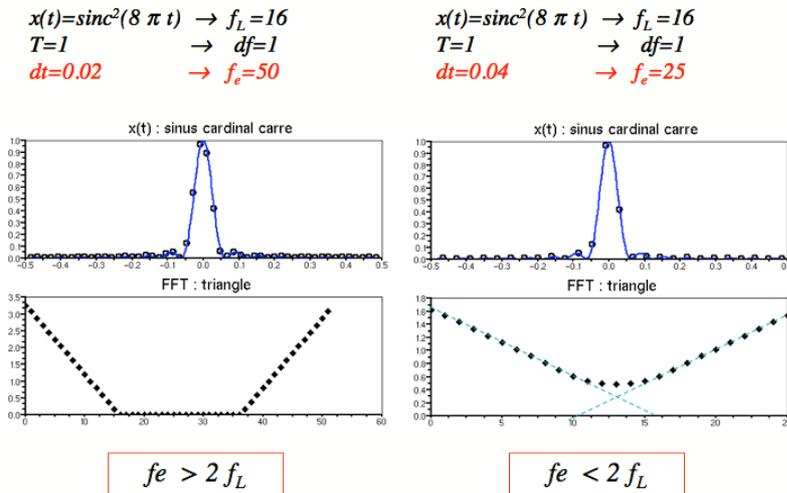


FIG. 8.5 – La fonction sinus cardinal carré a été échantillonnée, dans l'exemple de gauche, avec une fréquence d'échantillonnage de 50 Hz, et dans l'exemple de droite, avec une fréquence d'échantillonnage 2 fois plus petite. La TF de cette fonction est une fonction triangulaire de largeur  $2 \times 16$  Hz : le deuxième échantillonnage n'est donc pas suffisant à bien représenter le spectre, dont les "queues" se superposent, comme on peut le voir, en modifiant la forme triangulaire du spectre.

» coupées sont d'intensité suffisamment faible pour ne pas trop modifier le spectre du signal.

Comme on le voit sur la figure 8.4, et comme nous l'avons dit en comparant  $\hat{X}(f + f_e)$  et  $\hat{X}(f)$ , le problème lié à un choix inapproprié de  $f_e$  est que les fréquences proches de  $f_e/2$  se confondent entre elles : pour un  $\delta f$  donné, les deux fréquences

$$f_- = \frac{f_e}{2} - \delta f$$

$$f_+ = \frac{f_e}{2} + \delta f$$

tombent au même endroit sur l'axe des fréquences à cause du repliement. Il est donc évident que, avec le pas d'échantillonnage choisi, on ne pourra pas distinguer deux signaux sinusoidaux (ou bien deux contributions harmoniques à un même signal) qui oscillent sur ces deux fréquences !

La figure 8.6 illustre cet effet. Deux signaux de fréquences  $f_- = f_e/2 - \delta f$  et  $f_+ = f_e/2 + \delta f$  échantillonnés avec fréquence d'échantillonnage  $f_e$  (avec  $f_e = 25$  Hz,  $\delta f = 7,5$  Hz d'où  $f_- = 5$  Hz et  $f_+ = 20$  Hz). Les points représentent les échantillons que, comme on le voit, ne permettent pas de distinguer les deux sinusoides, car il tombent à la fois sur l'une et sur l'autre<sup>1</sup>. Le nombre de points est visiblement insuffisant : on

<sup>1</sup>On peut donner une démonstration par le calcul de cet effet en écrivant les deux signaux explicitement :

$$x^-(t) = \cos(2\pi f_- t)$$

$$x^+(t) = \cos(2\pi f_+ t)$$

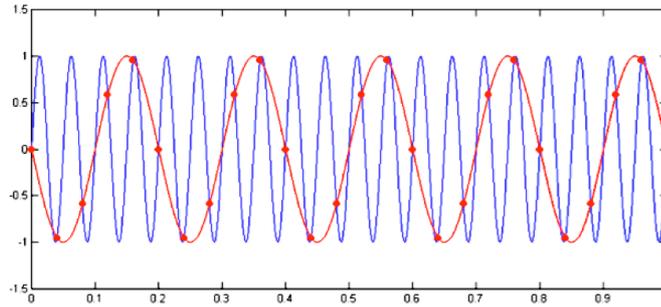


FIG. 8.6 – Illustration du repliement de spectre : les deux composantes harmoniques sont indiscernables avec le pas d'échantillonnage choisi.

voit bien que le signal à fréquence plus rapide est échantillonné à moins que 2 points par période, ce qui ne peut évidemment pas permettre de bien reproduire son oscillation. D'après le théorème de Shannon, il faut que  $f_e/2$  soit supérieure à la fréquence la plus élevée,  $f_L$  : ici, c'est la fréquence  $f_+ f_e/2 - \delta f$ . En termes de temps, cela signifie que le pas d'échantillonnage  $\Delta t = 1/f_e$  doit être au moins inférieur à moitié de la période :

$$\Delta t = \frac{1}{f_e} < \frac{1}{2f_L} = \frac{T_L}{2}. \quad (8.9)$$

Il faut donc au moins deux points par période.

### 8.3 TF discrète et FFT

Il nous reste à voir le plus important, c'est-à-dire comment, en pratique, on calcule numériquement la TF d'un signal échantillonné. C'est très important et ça représente la base de nos TP numérique TP 3, TP 4 et TP 5 .

Reprenons notre signal échantillonné, qui peut s'écrire

$$\hat{x} = x_k = x(k \Delta t) \quad \text{avec } k = 1 \dots N - 1 \quad (8.10)$$

puis en remplaçant  $f_-$ ,  $f_+$  et  $t = k\Delta t = k/f_e$ . On obtient alors les signaux échantillonnés

$$\begin{aligned} \hat{x}^-(t) &= \cos\left(2\pi\left(\frac{f_e}{2} - \delta f\right)\frac{k}{f_e}\right) = \\ &= \cos\left(k\pi - 2\pi\delta f\frac{k}{f_e}\right) = (-1)^k \cos\left(-2\pi\delta f\frac{k}{f_e}\right) \\ \hat{x}^+(t) &= \cos\left(2\pi\left(\frac{f_e}{2} + \delta f\right)\frac{k}{f_e}\right) = \\ &= \cos\left(k\pi + 2\pi\delta f\frac{k}{f_e}\right) = (-1)^k \cos\left(2\pi\delta f\frac{k}{f_e}\right) \end{aligned}$$

d'où  $\hat{x}^-(t) = \hat{x}^+(t)$  car la fonction  $\cos$  est paire. Les deux signaux à deux fréquences différentes sont donc indiscernables une fois échantillonnés.

si  $\Delta t$  est le pas d'échantillonnage et  $T_e = N \Delta t$  la durée totale. Théoriquement, nous avons déjà écrit sa TF comme

$$\hat{X}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi f t} \Delta t. \quad (8.11)$$

Ce résultat est correct. Cependant,  $\hat{X}(f)$  est la TF standard du signal échantillonné, c'est-à-dire une fonction continue de  $f$ , que nous ne pouvons pas obtenir numériquement car, comme pour le signal lui-même, il faudrait une mémoire infinie pour la stocker. Concrètement on n'aura donc qu'un nombre fini de points de cette TF. De plus, nous avons vu que

1. on peut obtenir le spectre du signal seulement jusqu'à une fréquence maximale déterminé par le pas d'échantillonnage :  $f_e = 1/\Delta t$  ;
2. la résolution en fréquence est quant à elle limitée par la durée d'échantillonnage du signal  $T_e$  : le pas en fréquence est donc  $\Delta f = 1/T_e$ .

Par conséquent, on aura un spectre discret avec des points séparés par des intervalles  $\Delta f$  entre  $f = 0$  et  $f = f_e$ , soit

$$f_n = n\Delta f \quad \text{avec } n = 0 \dots N-1 \quad \text{et} \quad (8.12)$$

$$N = \frac{f_e}{\Delta f} = \frac{T_e}{\Delta t} \quad \text{points :} \quad (8.13)$$

le **même nombre de points** que pour le signal. Pour les fréquences  $f = f_n$  on a alors

$$-i2\pi f t \rightarrow -i2\pi f_n t = -i2\pi n\Delta f k\Delta t = -i2\pi n k \frac{\Delta t}{T_e} = -i2\pi \frac{n}{N} k$$

et la TF  $\hat{X}(f)$ , évaluée sur cet ensemble discret de points, devient

$$\hat{X}(f_n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi \frac{n}{N} k} \Delta t. \quad (8.14)$$

On définit alors, par commodité informatique, la fonction  $\hat{X}_D(f_n) = \hat{X}(f_n)/\Delta t$  :

$$\hat{X}_D(f_n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi \frac{n}{N} k} \quad \text{TF discrète (TFD)}. \quad (8.15)$$

Cette expression définit la **transformée de Fourier discrète (TFD)**, qui n'est donc rien d'autre que la TF d'un signal échantillonné avec  $N$  points, évaluée elle aussi sur  $N$  points entre 0 et  $f_e$ , et divisée par le pas d'échantillonnage  $\Delta t$ . C'est la fonction qu'on calculera numériquement.

Attention donc,  $\hat{X}_D(f_n)$  est homogène au signal mesuré  $x$  :

$$[\hat{X}_D] = [x].$$

Pour retrouver la TF du signal il faut donc *multiplier la TFD par  $\Delta t$*  :

$$\hat{X}(f_n) = X_D(f_n) \Delta t, \quad (8.16)$$

et on a donc bien

$$[\hat{X}] = [x][t].$$

comme il se doit pour une TF.

### 8.3.1 FFT

En pratique, les logiciels comme Scilab calculent la transformée de Fourier discrète (TFD) automatiquement, en utilisant un algorithme particulièrement astucieux et rapide qui s'appelle **TF rapide ou Fast Fourier Transform (FFT)**. C'est tout-à-fait équivalent,  $\text{FFT} \equiv \text{TFD}$ ,

et très simple à utiliser : sous Scilab, si  $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_N)$  est le vecteur contenant les valeurs échantillonnées d'un signal, il suffit d'écrire

`fft(x)` ou `fft(x,1)`

pour avoir la TFD du signal, sous la forme d'un vecteur de  $N$  valeurs, correspondants aux fréquences  $f_n = n\Delta f$  de zéro à  $f_e$ . Les valeurs trouvées étant en général complexes (car la TFD, comme la TF, est en général une fonction complexe), on prendra soin d'en prendre la valeur absolue (`abs`), par exemple pour en faire un plot.

L'avantage de l'algorithme FFT est sa rapidité : le calcul de la transformée de Fourier d'un vecteur de  $N$  valeurs par une autre méthode prendrait un temps proportionnel à  $N^2$ , alors que avec la FFT ce temps est réduit à  $N \log_{10} N$ . Pour les cas que nous allons voir ceci n'est pas de grande importance, mais ça peut devenir crucial pour des calculs numériques plus complexes. La rapidité de la FFT n'est cependant assurée que si  $N$  est une puissance de 2 : on fait donc attention à choisir de vecteurs de longueur appropriée si on veut en profiter.

### 8.3.2 Transformée inverse

On peut aussi calculer numériquement la TFD inverse ; explicitement, elle est donnée par

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{X}_D n e^{i2\pi \frac{k}{N} n} \quad (\text{TFD}^{-1}). \quad (8.17)$$

Sous Scilab, l'opération de FFT inverse se fait par la commande `fft(x,-1)`.

### 8.3.3 FFT et périodisation du signal

Si on dispose d'un signal échantillonné  $x_k$ , alors la FFT de ce signal est une fonction homogène à  $x$  définie sur l'ensemble discret de fréquences  $f_n = n\Delta f$ , et donc caractérisée par pas de fréquence (ou *résolution*), fréquence maximale (*fréquence d'échantillonnage*), respectivement

$$\Delta f = 1/T_e, \quad f_e = 1/\Delta t.$$

En multipliant la FFT par  $\Delta t$  on obtient le spectre du signal échantillonné  $x_k$  entre 0 et  $f_e$ . D'autre part, nous savons que ce spectre est périodisé avec période  $f_e$  : on a donc une période entière de ce spectre. Evidemment, la partie du spectre comprise entre  $f_e/2$  et  $f_e$  est identique à celle entre  $-f_e/2$  et 0 (voir Figure 8.7). On peut éventuellement déplacer cette partie pour avoir un spectre centré sur zéro. Scilab propose une fonction pour le faire, nommée `fftshift`. De toutes manières, rappelons que si  $x_k$  est une

fonction réelle, son spectre est pair : dans ce cas la moitié du spectre, par exemple la partie comprise entre 0 et  $f_e$ , suffit à donner toute l'information !

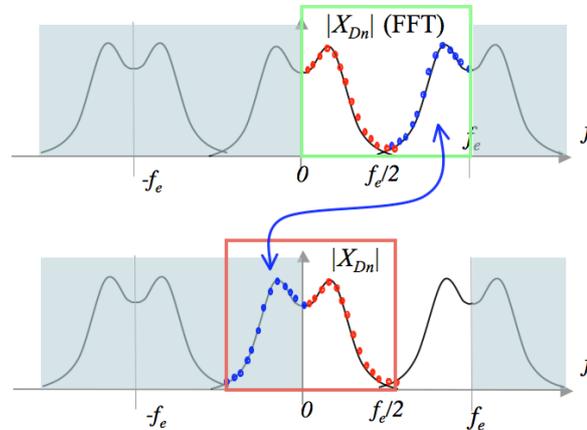


FIG. 8.7 – Périodicité de la FFT d'un signal. Dans le cadre vert, le résultat du calcul de la FFT. On peut obtenir un spectre symétrique (cadre rouge) en décalant la deuxième moitié du spectre pour décrire la partie des fréquences négatives.

Finissons cette partie avec une dernière remarque. Nous avons vu que l'échantillonnage d'un signal temporel amène à la périodisation de sa TF. De manière symétrique, la discrétisation de la TF qu'on obtient en la calculant numériquement entraîne une **périodisation du signal** : la transformée de Fourier discrète (TFD, ou FFT) d'un signal de durée finie  $T_e$  est identique à la TF d'un signal périodique de période  $T_e$  qui coïncide avec le signal de départ sur la période considérée. Nous n'en dirons pas plus ; la figure 8.8 illustre cet aspect.

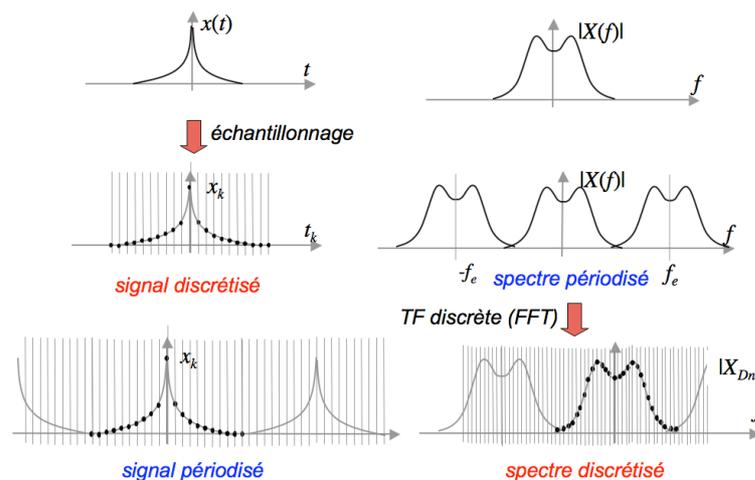


FIG. 8.8 – Périodisation du signal.

## 8.4 Ce qu'il faut retenir

Faisons un résumé succinct de ce que nous venons de voir à propos de la transformée de Fourier des signaux échantillonnés. Lors de l'acquisition numérique d'un signal, deux paramètres temporels sont à fixer : la durée de l'acquisition  $T_e$  et le pas d'échantillonnage  $\Delta t$ . Par conséquent, le nombre de points est aussi fixé à

$$N = \frac{T_e}{\Delta t}; \quad (8.18)$$

les échantillons seront donc associés aux instants  $t_k = k\Delta t$ , pour  $k = 0..N - 1$ . Evidemment, on peut aussi bien fixer au départ le nombre de points et le pas d'échantillonnage et en déduire  $T_e$ , ou bien fixer  $N$  et  $T_e$  et déterminer  $\Delta t$  !

La fréquence d'échantillonnage n'est rien d'autre que la fréquence à laquelle on a mesuré le signal :

$$f_e = \frac{1}{\Delta t}. \quad (8.19)$$

Donner  $f_e$  ou donner  $\Delta t$  est complètement équivalent, et on choisira de partir de l'un ou de l'autre selon les cas.

Si maintenant on calcule le spectre du signal ainsi échantillonné par la FFT, on aura un même nombre  $N$  de points dans le domaine des fréquences :

$$f_n = n\Delta f, \quad n = 0..N - 1. \quad (8.20)$$

Comme la fréquence d'échantillonnage et le nombre de points sont donnés, le pas en fréquence, ou la résolution en fréquence  $\Delta f$  est fixée par

$$\Delta f = \frac{f_e}{N} \quad (8.21)$$

ou bien

$$\Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{1}{T_e}. \quad (8.22)$$

On voit encore comment toutes ces grandeurs sont liées entre elles. Le plus simple c'est de se rappeler que le temps le plus court est l'inverse de la fréquence la plus élevée et inversement :  $f_e = 1/\Delta t$ ,  $\Delta f = 1/T_e$ .

Pour ce qui est des **amplitudes**, il faut retenir que la FFT est normalisée un peu différemment qu'une TF continue : dans le passage de l'intégrale à la somme on a laissé tomber un  $\Delta t$ , et il faut donc re-multiplier le résultat de la FFT par  $\Delta t$  pour retrouver la TF dans les bonnes unités :

$$X(f) = X_D(f) \Delta t \quad (8.23)$$

Notons une petite conséquence utile lorsqu'on veut calculer la **puissance du signal** : dans ce cas, on cherche (théorème de Parseval)

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df. \end{aligned}$$

Lorsque on passe au signal échantillonné et on remplace les intégrales par des sommes, on a donc à partir des relations précédentes :

$$E = \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2 \Delta t \quad (8.24)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} |X_D(f_n)|^2 \Delta t^2 \Delta f = \sum_{n=0}^{N-1} |X_D(f_n)|^2 \frac{\Delta t}{N} \quad (8.25)$$

Pour finir, il faut se rappeler que l'**intervalle de fréquences** donné par la FFT (Equation (8.20)) est compris entre zéro et  $f_e$ , mais le spectre est périodisé de période  $f_e$  : si on veut représenter le spectre dans l'intervalle  $[-f_e/2, f_e/2]$  autour de zéro comme il est plus courant, on peut décaler de  $-f_e$  la deuxième moitié,  $[f_e/2, f_e]$  pour la replacer en  $[-f_e/2, 0]$ . De toutes manières, le spectre est toujours pair pour des signaux réels : seule la partie  $[0, f_e/2]$  est réellement indépendante.