Université Pierre et Marie Curie 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05

INTRODUCTION A L'ANALYSE SPECTRALE

Maria Barbi

Licence de physique
CNED

Table des matières

Introduction

La mesure est une étape importante dans la production du résultat expérimental en Physique. Avec le développement des techniques d'acquisition digitale des données et des ordinateurs, il s'est développé un ensemble d'outils mathématiques afin d'extraire efficacement l'information utile. Ce cours est une introduction à ces outils.

La dynamique des systèmes physiques est décrite par une ou plusieurs équations différentielles. Ce sont ces équations que l'on cherche à caractériser par le biais de la mesure. Les série et transformée de Fourier ou la transformée de Laplace introduites ici, ainsi que la notion de spectre qui leur est associée établissent un lien simple entre les observables (les quantités mesurées) et les équations.

Ce lien reste cependant valide dans le cadre des *systèmes linéaires* (c'est-à-dire régis par des équations différentielles linéaires) auxquels nous nous restreignons ici. Ceci ne constitue pas une limitation forte puisqu'il est généralement possible de "linéariser" les équations qui décrivent les processus physiques. L'approximation linéaire est valide dans la limite des petites variations (lorsque les termes non linéaires d'ordre supérieur sont négligeables). Les méthodes et outils présentés ici sont donc applicables dans un grand nombre de situations et de contextes applicatifs (mécanique, optique, électricité, écologie, biologie...). On fera souvent référence dans les illustrations et les exercices aux filtres électroniques passifs (type "RLC") parce qu'ils constituent des exemples simples que l'on peut facilement étudier et tester en laboratoire.

On a délibérément choisi une approche qui privilégie l'interprétation physique des nouveaux concepts introduits ici comme la notion du spectre par exemple à une présentation mathématique au formalisme strict.

Plan du cours

- Equations différentielles, oscillateurs et ondes ; oscillations forcées en régime harmonique : fonction de transfert et résonance
- La chaîne de mesure : bruit, capteurs, filtres, numérisation, analyse
- La série de Fourier et le régimes non harmoniques ; spectres
- Transformées de Fourier (TF) et Laplace (TL) : spectres continus
- Signaux numériques : échantillonnage et quantification, Transformée de Fourier Rapide
- Résolution d'équations différentielles par TL : TL d'une dérivée, conditions initiales et distributions

- Retour sur les filtres : transmittance, réponse impulsionelle et convolution
- Signaux aléatoires : fonction corrélation et densité spectrale e puissance, bruit blanc, filtrage.

Partie I - Mesurer

Chapitre 1

Systèmes linéaires et équations différentielles linéaires (EDL)

1.1 Systèmes linéaires

Commençons par l'introduction du sujet central de ce cours, les systèmes physiques linéaires. Par *système* on entend ici un objet physique, ou plus précisément un modèle d'objet physique ou d'autre nature, qui reçoit un (ou plusieurs) signal d'entrée (ou excitation) et produit un (ou plusieurs) signal de sortie (ou réponse). La notion de système est donc très générale : une pièce chauffée peut être considérée comme un système qui reçoit comme signal d'entrée la programmation de la chaudière au cours de la journée et comme signal de sortie la température intérieure. Un atome qui reçoit de l'énergie sous forme de lumière et émet une onde électromagnétique à une fréquence différente est un autre exemple. En général, on s'intéressera à des *systèmes dynamiques*, pour lesquels les variables d'entrée et de sortie varient avec le temps.

Un **système dynamique linéaire** est un système dynamique pour lequel la relation entre la fonction d'entrée et la fonction de sortie est linéaire, c'est-à-dire que le système est régi par le **principe de superposition** : si l'entrée est une combinaison linéaire de deux fonctions,

$$e(t) = \alpha e_1(t) + \beta e_2(t)\,, \tag{1.1}$$

avec $e_1(t)$ et $e_2(t)$ deux fonctions d'entrée, alors la sortie est la combinaison linéaire des deux réponses :

$$s(t) = \alpha s_1(t) + \beta s_2(t)\,, \tag{1.2}$$

avec $s_1(t)$ la réponse à $e_1(t)$ et $s_2(t)$ la réponse à $e_2(t)$. En d'autres termes : pour un système linéaire, la relation $s = F(e)$ entre entrée e et sortie s est linéaire : $F(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha F(e_1) + \beta F(e_2)$. Ce résultat se généralise ensuite à un nombre quelconque d'excitations : si on sait écrire une excitation en entrée comme une somme de fonctions, il sera possible de calculer la réponse correspondante en additionnant des réponses individuelles calculables explicitement.

Un exemple simple de système linéaire est un capteur de champ magnétique, constitué d'un bobinage de fil de cuivre enroulé autour d'un noyau ferromagnétique. En présence

FIG. 1.1 – Prototype de capteur de champ magnétique.

d'un champ magnétique variable B (signal d'entrée), la tension v mesurée aux bornes de la bobine (signal de sortie) est donnée par la loi de Faraday,

$$v = -N\frac{d\Phi}{dt} = -NS\frac{dB}{dt}$$

où N est le nombre de spires, S leur section et Φ le flux de champ magnétique. Or, **l'opérateur de dérivation est un opérateur linéaire** :

$$\frac{d}{dt}(\alpha B_1(t) + \beta B_2(t)) = \alpha\frac{d}{dt}B_1(t) + \beta\frac{d}{dt}B_2(t)\,.$$

Par conséquent, la relation entre entrée et sortie est linéaire pour ce système.

Remarquons cependant que un capteur de champ magnétique réel ne fonctionnera pas parfaitement dans toutes les conditions : si le champ B est de trop forte amplitude il induit la saturation du matériau ferromagnétique : un système réel peut ne suivre le comportement linéaire de son modèle mathématique que dans des conditions données, et ne plus être linéaire au delà de certaines limites.

Pour d'autres systèmes, la relation entre le signal d'entrée et le signal de sortie n'est pas linéaire : le système n'est donc pas linéaire. Par exemple, une thermistance est un capteur de température basé sur la variation de résistance électrique d'oxydes métalliques en fonction de la température. La loi de dépendance est décrite par une relation non linéaire (relation de Steinhart-Hart) :

$$\frac{1}{T} = A + B\ln(R) + C(\ln(R))^3$$

La thermistance est donc un système non linéaire dans n'importe quelles conditions - même si on pourra approcher son comportement par une loi linéaire si par exemple on considère de très faibles variation de température.

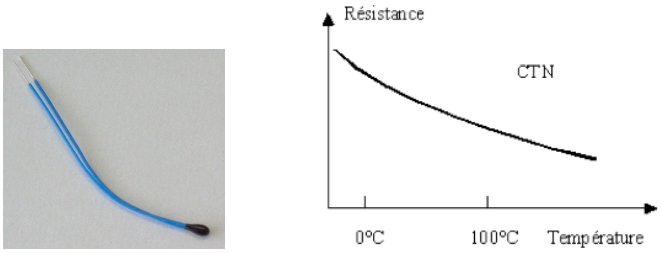

FIG. 1.2 – Une thermistance et sa courbe de réponse.

1.2 Equations différentielles linéaires

La relation mathématique qui relie l'entrée et la sortie d'un système linéaire est toujours donnée par une équation différentielle linéaire. Rappelons brièvement de quoi il s'agit.

Une **équation différentielle (ED)** est une équation portant sur une fonction inconnue (que l'on veut déterminer) d'une variable réelle. Dans l'ED peuvent apparaître la variable, la fonction et ses dérivées.

L'**ordre** de l'équation différentielle est, par définition, l'ordre de la dérivée la plus élevée de la fonction inconnue.

Exemple : Soit $x(t)$ la fonction inconnue de la variable t. Soit $f(x,t)$ une fonction donnée de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et a une constante :

$$a\,x(t) + \frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(x,t)$$

est une ED de second ordre pour $x(t)$.

La solution recherchée est donc la fonction $x(t)$ qui résout l'ED. Il est important de souligner qu'il n'existe pas toujours de solution explicite (pouvant s'exprimer comme une combinaison de fonctions élémentaires) de l'ED, comme par exemple pour l'équation $\frac{dx(t)}{dt} = x^2 - t$. Dans ce cas, soit on cherche une solution numérique, soit on fait une analyse qualitative de la solution, par exemple en étudiant le signe de la dérivée.

Plus simple est le cas des équations différentielles linéaires, auxquelles on s'intéressera dans ce cour. Une équation différentielle est dite **linéaire (EDL)** si elle ne fait intervenir les dérivées de la fonction inconnue que dans une combinaison linéaire. Un exemple d'EDL de second ordre :

$$a(t)\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b(t)\frac{dx(t)}{dt} + c(t)\,x(t) = f(t)\,.$$

Un contre-exemple est donné par l'équation du pendule,

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta(t) = 0 \ :$$

l'ED n'est pas linéaire parce que la fonction $\sin\theta(t)$ n'est pas une fonction linéaire de $\theta(t)$ ($\sin(\theta_1+\theta_2) \neq \sin\theta_1 + \sin\theta_2$!).

L'équation différentielle linéaire est dite **homogène**[1] si si tous les termes font intervenir des dérivées des inconnue $x(t)$, et il n'y a pas de termes dépendants seulement de la variable ou constants. Par exemple, les ED $x(t) + \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0$ ou $\frac{dx(t)}{dt} + c\frac{d^2x(t)}{dt^2} = x(t)$ sont homogènes.

[1] Plus généralement, une équation différentielle (non nécessairement linéaire) est dite homogène si, en remplaçant t par kt et x(t)$parkx(t)$ l'équation reste inchangée.

Enfin, une EDL est dite à coefficients constants si tous les coefficients qui multiplient la fonction et ses dérivées ne dépendent pas explicitement du temps. La forme générale d'une **EDL à coefficients constants** est la suivante :

$$a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + ... + a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t)\,. \tag{1.3}$$

C'est à ce type d'équations que nous allons nous intéresser dans ce cours.

1.3 Les oscillateurs en physique

Pourquoi donc s'intéresser aux EDL ? Une première raison est que les EDL sont associées à tous les systèmes assimilables à des *oscillateurs*. Qu'est-ce qu'un oscillateur et pourquoi cela nous intéresse-t-il particulièrement ?

1.3.1 L'oscillateur libre

Le cas le plus simple et le plus classique d'oscillateur est celui de l'oscillateur mécanique libre : une masse m accrochée à un ressort de raideur K. La variable qui nous intéresse

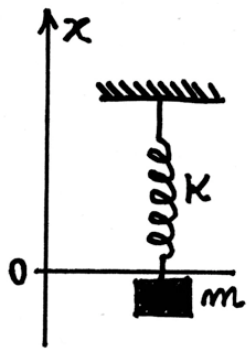

FIG. 1.3 – Scéma de l'oscillateur mécanique libre.

dans ce cas est la position $x(t)$ de la masse par rapport à sa position d'équilibre.

Comment s'écrivent les équations du mouvement pour un tel système ? Partons de la relation fondamentale de la dynamique, $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, qui s'écrit dans notre cas unidimensionnel

$$-Kx = m\ddot{x} \tag{1.4}$$

où on a introduit la notation usuelle pour les dérivées temporelles

$$\begin{aligned} \text{vitesse} \qquad & \dot{x} = \frac{dx}{dt} = v\,, \\ \text{acceleration} \qquad & \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = a\,, \end{aligned}$$

et la forme explicite de la force de rappel élastique $F = -Kx$. L'équation (1.4) est bien sous la forme d'une équation différentielle linéaire, homogène, à coefficients constants, du second ordre pour $x(t)$:

$$a_1\ddot{x}(t) + a_2\dot{x}(t) + a_3x(t) = 0 \tag{1.5}$$

avec $a_1 = m$, $a_2 = 0$, $a_3 = -K$.

Un système masse+ressort est donc *équivalent* à une EDL du second ordre : nous voyons ici le premier exemple concret de cette équivalence entre un système physique linéaire et l'équation qui détermine son comportement[2].

1.3.2 Le potentiel harmonique

Rappelons que le potentiel pour un ressort de constante de raideur K est

$$V(x) = \frac{1}{2}K\,x^2\,. \tag{1.6}$$

On obtient la force par dérivation (dans le cas unidimensionnel) : $F = -\frac{\partial V}{\partial x} = -Kx$.

Notre intérêt pour le système masse-ressort vient du fait qu'il constitue un modèle simplifié de ce qu'il se passe pour un grand nombre d'autre situations. Prenons pour commencer un exemple concret : le modèle classique d'un cristal.

Modèle classique d'un cristal.

Dans un cristal, les atomes sont liés les uns aux autres par des forces (électrostatiques) qui les piègent dans des positions précises, organisés dans le réseau cristallin. Chaque

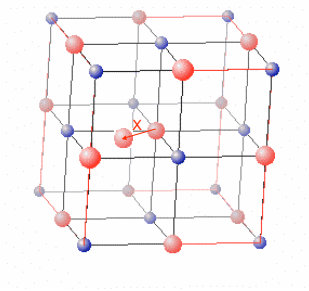

FIG. 1.4 – Structure cubique d'un cristal. Le vecteur $\boldsymbol{x}$ représente le déplacement d'un atome de sa position d'équilibre.

[2]Dans ce premier cours, je vais me concentrer sur les EDL de second ordre, car elles sont particulièrement adaptées à l'introduction des méthodes qui nous intéressent. Cependant, les équations différentielles du premier ordre ne sont pas moins importantes en physique : de résolution plus directe, elles seront traitées dans un premier temps seulement dans les exercices. Un peu plus tard, nous introduirons les méthodes générales de résolution d'EDL s'appliquant alors à toute équation différentielle linéaire.

atome est donc contraint d'occuper une position donnée, correspondante au minimum du potentiel électrostatique produit par tous les autres atomes. Un schéma du cristal est donné en figure 1.4. A température donnée l'atome possède cependant une certaine énergie et peut donc se déplacer autour de sa position d'équilibre. Nous ne connaissons pas la forme exacte de ce potentiel, dont la composante le long d'un axe x est schématisée sur la figure 1.5. Cependant, si l'atome n'effectue que des petits déplacements autour de

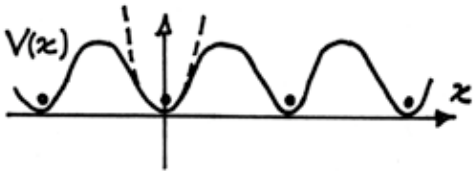

FIG. 1.5 – Projection le long d'un axe x du potentiel périodique qui piège les atomes dans un cristal. Chaque minimum correspond à une position d'équilibre. Pour x petit, le potentiel peut être approché par une fonction quadratique.

sa position d'équilibre (température faible), alors on peut approcher le potentiel autour de son minimum par un développement de Taylor. Prenons par exemple la position d'équilibre $x = 0$: pour x petit, on a

$$V(x) = V(0) + \frac{\partial V}{\partial x}(0)\, x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0)\, x^2 + O(x^3)\,. \tag{1.7}$$

Dans cette expression, $V(0)$ est une constante qu'on peut mettre à zéro sans perte de généralité (il suffit de redéfinir le zéro du potentiel), $\frac{\partial V}{\partial x}(0)$ est nulle car $x = 0$ est un minimum de $V(x)$, et $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0)$ est une autre constante que l'on va appeler K : on obtient donc au second ordre en x

$$V(x) \simeq \frac{1}{2} K\, x^2\,, \tag{1.8}$$

un **potentiel quadratique** en x (dit aussi **harmonique**) en x, c'est à dire exactement le même que pour un ressort ! L'atome se déplace donc autour de sa position d'équilibre comme une masse accrochée à un ressort, dont la raideur K dépend de la forme explicite de son potentiel d'interaction avec les autres atomes du réseau.

Peut-on généraliser ce même raisonnement pour d'autres problèmes ? La réponse est oui, et, de plus, c'est très général : pour chaque système *lié* par un potentiel autour d'une position d'équilibre, le potentiel est à son minimum peut être approché par un potentiel harmonique.

1.3.3 Exemples

Les exemples sont vraiment très nombreux et touchent à tous les domaines. Au niveau macroscopique, des oscillations caractérisent par exemple une masse lié par un ressort ou un pendule[3].

[3]Pour le cas d'un pendule de masse m et longueur ℓ la forme explicite du potentiel est connue : $V(\theta) = mg\ell(1 - \cos\theta)$. Pour des petits déplacements angulaires θ on peut approcher le potentiel par

Modes d'oscillation atomiques

Comme pour les atomes dans un solide, les atomes (ou groupes atomiques) dans une molécule peuvent osciller : dans une molécule diatomique, par exemple, la variable oscillante x sera donnée par la distance entre les deux atomes ; dans une molécule plus complexe, par exemple celle de l'eau (figure 1.6), différents *modes d'oscillation* se combinent, caractérisés par des distances linéaires ou angulaires entre atomes.

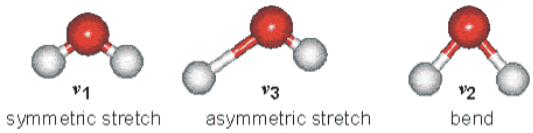

FIG. 1.6 – Modes de vibrations dans une molécule diatomique ou dans une molécule triatomique non linéaire comme celle de l'eau. Les distances entre l'atome d'oxygène et les atomes d'hydrogène ou l'angle entre les deux liaisons H-O oscillent et peuvent être considérés comme des variables soumises à des potentiels harmoniques pour les faibles variations.

Polarisabilité des atomes

En passant à des échelles plus petites, on remarque que les électrons sont aussi liés au noyau atomique par un potentiel. Si on place un atome dans un champ électrique on peut déplacer le nuage électronique de sa position d'équilibre (polarisation de l'atome), puis le laisser osciller : la variable oscillante sera alors par exemple la distance entre les centres de masse des charges positives et négatives (figure 1.7). Ce mouvement oscillatoire produit un champ électromagnétique et peut donc être mesuré. Sur une échelle plus grande, c'est encore l'oscillation des charges qui produit le champ électromagnétique émis par une antenne. Les oscillations des charges dans un circuit électrique sont un exemple principal d'oscillateur typique et très souvent considéré.

Résonance magnétique

Les électrons possèdent aussi un moment magnétique (figure 1.8) qui peut être mis en rotation dans un champ magnétique et dont les oscillations d'une composante peuvent être observées, comme c'est le cas dans la résonance magnétique (IRM). En absence de champ magnétique externe, les protons d'un échantillon tissulaire sont orientés de façon aléatoire dans l'espace sachant que la somme des vecteurs d'aimantation élémentaire (de chaque proton) microscopique est nulle et il n'y a pas de vecteur d'aimantation macroscopique. Lorsqu'un champ magnétique externe d'intensité significative est appliqué, les protons s'orientent dans sa direction sans être réellement parfaitement alignés à celui-ci : en effet, les protons tournent individuellement autour du champ à une fréquence angulaire donnée. Ce phénomène est l'origine de la formation d'un vecteur d'aimantation

$V(\theta) \simeq mg\ell\theta^2/2$. Dans cette approximation, la projection angulaire de la force $F_\theta = mg\sin\theta$ devient $F_\theta \simeq mg\theta$ et l'équation différentielle correspondante devient $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta(t) = 0$.

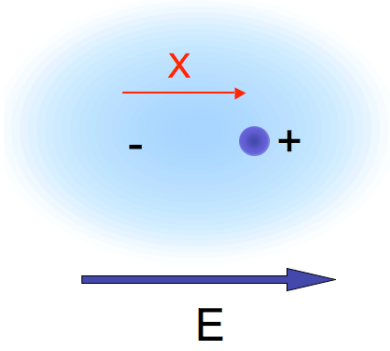

FIG. 1.7 – Polarisabilité d'un atome. La position du centre de masse du nuage électronique se déplace de sa position d'équilibre sous l'action d'un champ électrique E. Si le champ s'annule, le nuage oscille autour de sa position d'équilibre et le potentiel qui le lie au noyau atomique peut être approché par un potentiel harmonique dans la limite des faibles déplacements.

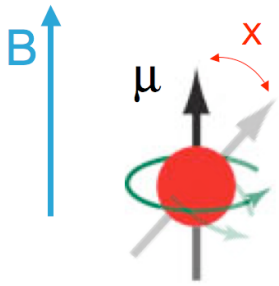

FIG. 1.8 – Les oscillations du moment magnétique d'un atome autour de sa position d'équilibre sont exploitées dans l'IRM.

macroscopique. L'application très courte d'un second champ magnétique orthogonale au premier perturbe la direction du vecteur aimantation, qui retourne ensuite à l'équilibre par un processus de relaxation qu'on peut mesurer.

Oscillations dans l'ADN

Mais la physique n'est pas le seul domaine dans lequel on observe des phénomènes oscillatoires. Un exemple issu de la biologie sont les "modes de respiration" observés dans l'ADN (figure 1.9) : les deux bases dans chaque paire sont liées l'une à l'autre par un potentiel dont on ne connaît pas la forme exacte ; à température finie, les deux bases vibrent autour de leur position d'équilibre, la distance qui le sépare oscille. Si pour des températures plus élevées cette vibration peut conduire à la séparation locale (puis globale) des deux brins d'ADN, à faible température il est possible de décrire le phénomène par un potentiel harmonique qui approche le potentiel d'interaction.

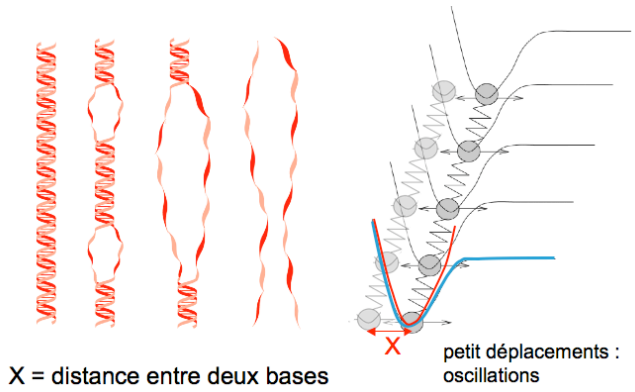

FIG. 1.9 – Les vibrations des bases dans une chaine d'ADN peut être décrite par l'oscillation dans un potentiel harmonique fonction de la distance entre les deux bases. A température plus élevée la forme explicite (non linéaire) du potentiel entre en jeu et les vibrations peuvent induire une séparation des deux brins d'ADN.

Oscillations dans l'athmosphère

Un exemple un peu plus complexe issu de la géologie est le comportement de l'atmosphère, qui se comporte aussi comme un oscillateur géant. Son oscillation est un peu plus compliqué à décrire par rapport aux cas discutés avant car l'atmosphère est un objet étendu et il faut donc considérer ses oscillations en chaque point du globe ; ces oscillations sont tout de même cohérentes et peuvent être mises en évidence par exemple par des cartes de la pression au sol (figure 1.10).

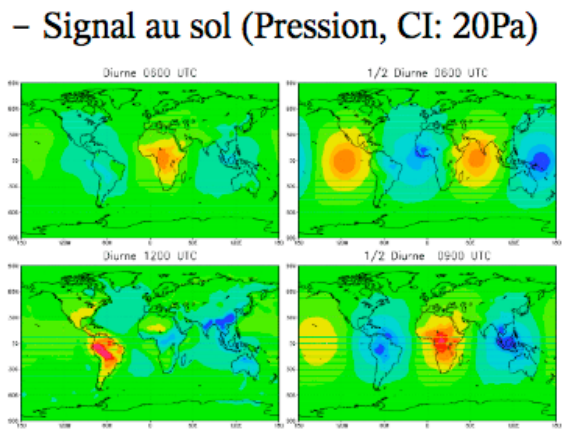

FIG. 1.10 – Une carte de la pression au sol permet de mettre en évidence les oscillations de l'atmosphère terrestre.

A ces exemple s'ajoutent une infinité d'autre systèmes : le fonctionnement d'un servomecanisme comme un thermostat réglant la température, l'évolution d'une population d'animaux dépendants de l'apport de nutriments et soumis à des predateurs... Tous ces phénomènes se comportent donc comme des oscillateurs, pourvu qu'on les excite de

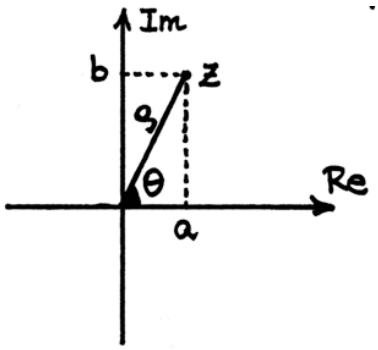

FIG. 1.11 – Représentation d'un nombre complexe z.

manière appropriée et qu'on se place dans la limite des petits déplacements par rapport à l'état d'équilibre.

1.4 L'oscillateur libre en notation complexe

En section 1.3 nous avons écrit l'équation différentielle qui régit le mouvement de l'oscillateur libre (et donc, comme nous venons de le voir, des systèmes liés en général dans la limite des petits déplacements). Est-ce que le système masse-ressort suit bien un comportement oscillatoire ? Pour le savoir il faut résoudre l'EDL. La résolution d'une telle équation se fait par des méthodes classiques qu'il est important de connaître. Il est possible cependant de trouver la solution rapidement par une méthode qui tire partie du caractère oscillatoire de la solution. Cette méthode que nous présentons maintenant fait intervenir la **notation complexe**. Dès ce premier exemple, nous allons donc introduire cette notation et l'exploiter pour une résolution plus rapide de l'équation.

Pourquoi la notation complexe quand on s'intéresse à des oscillations ? On pourrait penser que les fonctions trigonométriques seraient plus adaptées. Voyons.

Appelons i le nombre imaginaire unité[4], tel que

$$i^2 = -1\,.$$

Un nombre complexe z est alors donné par ses composantes réelle a et imaginaire b comme $z = a + ib$ et peut être représenté sur le plan complexe comme en figure 1.11. On peut ensuite passer aux coordonnées polaires ρ et θ (figure 1.11) et écrire

$$z = a + ib = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta} \tag{1.9}$$

où on a utilisé la formule d'Euler[5] et où

$$\rho^2 = |z|^2 = a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib) = z\bar{z} \quad \text{(module carré de } z\text{)}, \tag{1.10}$$

$$\theta = \arctan(b/a) = \arg(z) \qquad \text{(argument ou phase de } z\text{)}. \tag{1.11}$$

[4]On remarque que en électronique on fait typiquement le choix de la lettre j plutôt que i pour le nombre imaginaire unité, alors que la lettre i est traditionnellement employée pour designer l'intensité de courant.

[5]La formule d'Euler s'écrit pour tout nombre réel x : $\exp(ix) = \cos x + i\sin x$.

On observe que, selon l'équation (1.9), la partie réelle a de z s'écrit $a = \mathrm{Re}(z) = \rho\cos\theta$, et est donc une fonction trigonométrique de θ[6]. Supposons maintenant d'avoir ρ constant dans le temps et $\theta(t) = \omega t + \phi$ une fonction linéaire du temps : alors le vecteur représentatif de z tourne à vitesse constante dans le plan complexe en décrivant un cercle de rayon ρ. Sa partie réelle,

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\rho e^{i(\omega t+\phi)}) = \rho\cos(\omega t + \phi)$$

est une fonction oscillante du temps (figure 1.12).

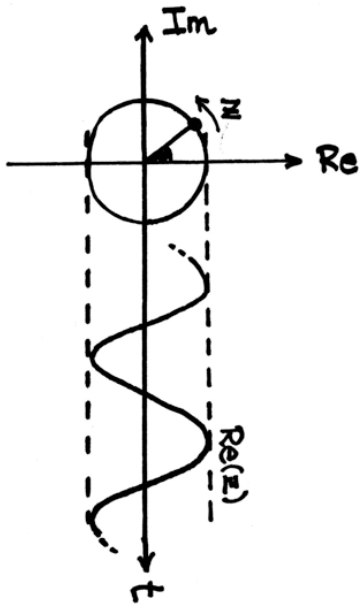

FIG. 1.12 – La partie réelle d'un nombre complexe z.

Ces considérations nous donnent une idée pour la résolution des EDL de second ordre. Partons de l'hypothèse que la solution cherchée est une solution oscillante, qui peut s'écrire en toute généralité comme

$$x(t) = \rho\cos(\omega t + \varphi)\,.$$

On peut alors écrire $x(t)$ comme la partie réelle d'une fonction complexe : $x(t) = \mathrm{Re}(\tilde{x}(t))$ avec

$$\tilde{x}(t) = x(t) + iy(t) \quad (1.12)$$
$$= \rho e^{i(\omega t+\varphi)} \quad (1.13)$$

On cherche, à la place de $x(t)$, une solution complexe $\tilde{x}(t)$ de l'équation du mouvement,

$$m\ddot{\tilde{x}}(t) + K\tilde{x}(t) = 0.$$

[6] La même chose vaut pour $b = \mathrm{Im}(z) = \rho\sin\theta$.

On a donc

$$m(\ddot{x}(t) + i\ddot{y}(t)) + K(x(t) + iy(t)) = 0$$

en utilisant la notation (1.12), et on obtient pour ses parties réelle et imaginaire

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + Kx(t) &= 0 \\ m\ddot{y}(t) + Ky(t) &= 0\,. \end{aligned}$$

Si $\tilde{x}(t)$ est solution de l'équation, alors $x(t) = \mathrm{Re}(\tilde{x}(t))$ et $y(t) = \mathrm{Im}(\tilde{x}(t))$ le sont aussi[7]. En trouvant les solutions complexes $\tilde{x}(t)$ de l'EDL, on obtient donc ainsi ses solutions réelles.

Il s'agit donc maintenant de chercher une solution $\tilde{x}(t)$ de l'EDL. Plus précisément, nous allons chercher $\tilde{x}(t)$ sous la forme (1.13). Il nous faut calculer sa dérivée seconde. C'est ici que l'on découvre la praticité de la notation complexe, car les dérivation de l'exponentielle complexe ne fait que multiplier la grandeur par un terme constant ! On obtient

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= & \rho e^{i(\omega t+\varphi)} \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= i\omega & \rho e^{i(\omega t+\varphi)} \\ \ddot{\tilde{x}}(t) &= -\omega^2 & \rho e^{i(\omega t+\varphi)} \end{aligned}$$

et donc l'EDL se traduit par une simple équation algébrique :

$$\begin{aligned} -m\omega^2\tilde{x}(t) + K\tilde{x}(t) &= 0 \\ (-m\omega^2 + K)\tilde{x}(t) &= 0 \\ \Rightarrow \quad (-m\omega^2 + K) &= 0\,. \end{aligned}$$

Notre fonction $\tilde{x}(t) = \rho e^{i(\omega t+\varphi)}$ est donc solution de l'EDL à condition que la pulsation ω soit

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_0\,. \tag{1.14}$$

On appelle ω_0 la **pulsation propre** de l'oscillateur. Avec $\omega = \omega_0$, $\tilde{x}(t)$ est solution de l'EDL et par conséquent $x(t)$ aussi : nous avons déterminé la *forme générale de la solution* cherchée,

$$x(t) = \mathrm{Re}(\tilde{x}(t)) = \rho\cos(\omega_0 t + \varphi)\,. \tag{1.15}$$

Comme d'habitude, les deux paramètres libres ρ et φ doivent maintenant être déterminés à partir des **conditions initiales** du problème. Typiquement, il nous faut connaître la position et la vitesse initiales de la masse :

$$x(t=0) = x_0 \tag{1.16}$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0\,. \tag{1.17}$$

[7] Il faut bien remarquer que cette propriété est assurée seulement si l'équation différentielle est linéaire : si elle contenait par exemple un terme en $\dot{x}^2$, ou x^2, on aurait pour $\tilde{x}$ que $\tilde{x}^2 = (x+iy)(x+iy) = x^2 + y^2 - 2xy$ et par conséquent les parties réelle et imaginaire de l'équation ne dépendraient plus l'une seulement de x et l'autre seulement de y comme dans le cas linéaire.

•*Exercice*

En remplaçant les conditions initiales (1.16) et (1.17) dans la solution générale (1.15), montrer que

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega_0})^2} \\ \varphi &= \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right) \end{aligned}$$

•*Exercice*

A partir de l'exercice précédent déterminer puis tracer la solution du problème de l'oscillateur libre dans les deux cas :

1. $x_0 = 0$, $v_0 \neq 0$;
2. $v_0 = 0$, $x_0 \neq 0$.

Comparer avec les deux solutions de la figure suivante. Que valent les deux amplitudes maximales indiquées sur l'axe des ordonnées ?

Revenons maintenant sur la forme générale de la solution. Nous avons trouvé qu'un système physique régit par l'EDL (1.4), une fois mis en mouvement ($v(0) \neq 0$) ou déplacé de sa position d'équilibre ($x(0) \neq 0$) se met à osciller suivant un mouvement sinusoïdal avec une pulsation ω_0 donnée qui ne dépend pas des conditions initiales mais seulement des paramètres de l'EDL. Si nous pouvons *mesurer* cette oscillation, nous aurons des renseignements importants sur les caractéristiques physiques du système : pour le cas d'un ressort, le rapport K/m ; dans le cas d'un atome, par exemple, la pulsation propre peut donner des informations sur la masse ou la charge d'un électron, ou de la force d'interaction avec les atomes voisins pour un atome dans un solide, etc. La mesure du mouvement est donc un véritable outil d'investigation sur le système physique. Dans les prochaines sections et chapitres, nous allons discuter les autres éléments nécessaires à la mise en place effective de cette mesure.

1.4.1 Energie de l'oscillateur libre

Que peut-on dire de l'énergie associée à une telle oscillation ? L'énergie s'écrit comme d'habitude comme la somme des énergies cinétique E_c et potentielle E_p. Dans le cas de l'oscillateur mécanique, on a

$$\begin{aligned} E &= E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = \\ &= \frac{1}{2}m\rho^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}K\rho^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}K\rho^2 \end{aligned} \tag{1.18}$$

car $\omega_0^2 = K/m$. L'énergie de l'oscillateur est donc constante ! En d'autres termes, l'énergie est conservée. Les deux contributions cinétique E_c et potentielle E_p oscillent comme $E\sin^2$ et $E\cos^2$ respectivement. Leur somme est E, leur valeur moyenne[8]

[8] On rappelle que $\int_0^T \cos^2(\omega t)dt = \frac{1}{2}$.

$\bar{E}_c = \bar{E}_p = \frac{1}{2}E$.

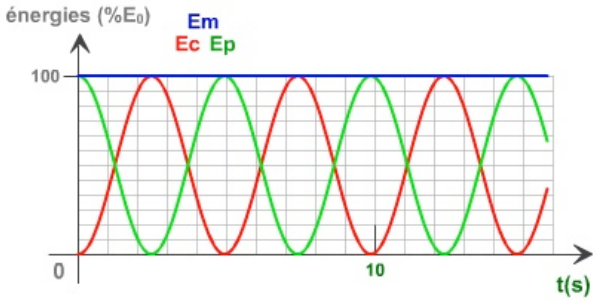

FIG. 1.13 – Energie potentielle, cinétique et totale d'un système masse-ressort. (Extrait du site "Figures animées pour la physique").

△*Une jolie animation du mouvement d'une masse accrochée à un ressort peut être trouvée sur le site web "Figures animées pour la physique",*
http ://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/index.html .
Le graphe des contributions de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique à l'énergie totale du système obtenu dans cette animation est reporté en figure 1.13.

1.4.2 Oscillateur amorti

Est-il raisonnable d'avoir une telle conservation de l'énergie en nature ? Nous savons que non : tout système mécanique est sujet à des forces de frottement et plus généralement tout système réel est soumis à une **dissipation de l'énergie** plus ou moins importante. Pour en tenir compte, il faut donc modifier notre équation du mouvement et y introduire des termes supplémentaires qui rendent compte d'un certain amortissement.

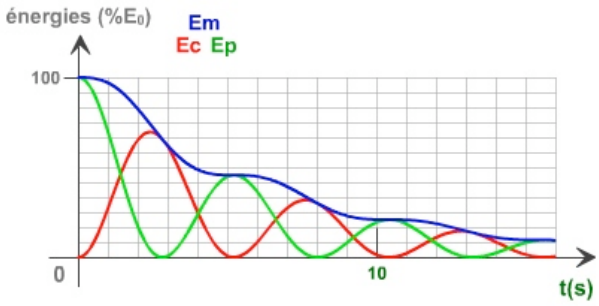

FIG. 1.14 – Energie potentielle, cinétique et totale d'un système masse-ressort en présence de dissipation. (Extrait du site "Figures animées pour la physique").

Une manière simple de *modéliser* ces effets est d'introduire une **force d'amortissement (ou force de frottement visqueux)** proportionnelle à la vitesse :

$$F_{\text{am}} = -\gamma \dot{x} \tag{1.19}$$

où γ est appelé coefficient de frottement. Le système masse-ressort en présence de dissipation est couramment appelé **oscillateur amorti**. Evidemment, le mouvement de la masse en sera affecté. L'animation sur le site *"Figures animées pour la physique"* permet de visualiser ce mouvement et de voir ses conséquences sur l'énergie, qui sont reportées en figure 1.14 On voit comme attendu que les deux contributions à l'énergie diminuent dans le temps (la diminution est d'autant plus rapide que le coefficient de frottement est important).

Nous allons voir comment résoudre l'EDL correspondante à l'oscillateur amorti par une méthode similaire à celle utilisée ici dans le chapitre 2, mais nous en profiterons aussi pour introduire d'autres éléments, et particulièrement une force extérieure.

Chapitre 2

L'excitation d'un oscillateur : résonance

Nous avons vu que beaucoup de systèmes physiques peuvent se mettre en oscillation, et que la mesure de leur mouvement nous renseigne sur leurs propriétés physiques. Mais le fait qu'un système soit lié par un potentiel et puisse osciller ne garantit pas en soi que il se mette effectivement à osciller. Comment mettre le système en oscillation, et comment l'y maintenir pour un temps approprié à la mesure ? Si parfois il est suffisant de déplacer le système de l'équilibre pour observer son oscillation, dans de nombreux cas son oscillation libre est amortie trop rapidement pour permettre une mesure. Il faut alors solliciter le système par une force extérieure, capable de mettre en marche et *entretenir l'oscillation*.

Pour rendre moins abstrait ce problème, voici un exemple : supposons que nous voulions mesurer la polarisabilité électrique d'une molécule. Il faut donc écarter ses charges de leur position d'équilibre : on peut le faire en envoyant une onde électromagnétique sur la molécule, de manière à faire agir le champ électrique $\boldsymbol{E}$ sur les charges. Si en plus l'intensité du champ électrique varie sinusoïdalement, les charges sont constamment entraînées hors d'équilibre et se mettent à osciller. En regardant l'onde rediffusée par la molécule, on peut en estimer le mouvement.

Comment exprimer cette opération par une EDL, en considérant la molécule comme un oscillateur ?

2.1 L'oscillateur forcé amorti

Reprenons l'exemple de l'oscillateur mécanique. Considérons le problème où l'oscillateur est soumis à une force extérieure oscillante $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \Delta)$. Pour que notre description soit réaliste, intégrons dès maintenant les effets de dissipation d'énergie par frottement (cf. Section 1.4.2), par une force $F_{\mathrm{am}} = -\gamma \dot{x}$ proportionelle à la vitesse. L'équation du mouvement $F = ma$ donne l'EDL :

$$F(t) - kx(t) - \gamma \dot{x}(t) = m\ddot{x}(t)\,,$$

soit

$$kx(t) + \gamma \dot{x}(t) + m\ddot{x}(t) = F(t)\,. \tag{2.1}$$

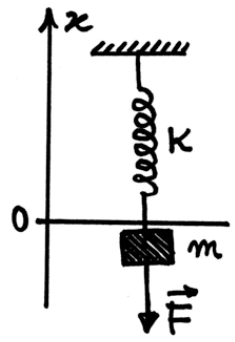

FIG. 2.1 – Scéma de l'oscillateur libre mécanique forcé amorti.

Il est instructif de considérer d'abord le **cas sans frottement**, $\gamma = 0$. Dans ce cas, l'équation différentielle s'écrit

$$kx(t) + m\ddot{x}(t) = F(t)\,, \tag{2.2}$$

une EDL *non homogène* de second ordre. On choisit d'écrire la force en notation complexe :

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t + \Delta) = \mathrm{Re}(\tilde{F}(t)) = \mathrm{Re}(F_0\, e^{i(\omega t + \Delta)}) = \mathrm{Re}(\hat{F}\, e^{i\omega t}) \tag{2.3}$$

avec $\hat{F} = F_0 e^{i\Delta}$ l'amplitude complexe de la force[1], qui contient à la fois son amplitude F_0 et sa phase Δ.

L'EDL non homogène a comme solution la somme d'une solution particulière $x_p(t)$ et de la solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène. On connaît déjà cette dernière, puisque c'est la solution libre de l'EDL (1.4) déjà étudiée. Cherchons donc à déterminer la solution particulière que l'on notera $x(t) = x_p(t)$ pour simplifier la notation. Comme la force extérieure est oscillante, nous pouvons nous attendre à ce que la masse se mette à osciller avec *la même pulsation* de la force extérieure, éventuellement déphasée. Cherchons donc une solution $x(t)$ de la forme :

$$x(t) = \mathrm{Re}(\hat{x}\, e^{i\omega t}) \tag{2.4}$$

et $\hat{x} = \rho\, e^{i\varphi}$ l'amplitude complexe de x, avec φ sa phase.

En remplaçant force et position complexes dans l'EDL et en utilisant les dérivées de l'exponentielle complexe comme nous l'avons déjà fait, on obtient immédiatement

$$k\,\hat{x}\, e^{i\omega t} - m\omega^2\,\hat{x}\, e^{i\omega t} = \hat{F}\, e^{i\omega t}\,. \tag{2.5}$$

On simplifie alors l'exponentielle $e^{i\omega t}$ et on obtient une simple équation algébrique

$$(k - m\omega^2)\,\hat{x} = \hat{F} \tag{2.6}$$

[1]On a donc choisi d'indiquer avec $\tilde{x}$ la fonction complexe oscillante (dont $x(t)$ est la partie réelle) et avec $\hat{x}$ son amplitude : $\tilde{x} = \hat{x}\, \exp(i\omega t)$.

d'où on peut déduire la solution (en notant comme précédemment $\omega_0^2 = k/m$) :

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \Rightarrow \quad \rho\, e^{i\varphi} = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\, e^{i\Delta}\,. \tag{2.7}$$

Le facteur $(F_0/m)/(\omega_0^2 - \omega^2)$ étant réel (attention ! Ce n'est pas toujours le cas comme nous verrons dans un moment), nous obtenons directement l'amplitude et la phase de l'oscillation :

$$\rho = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{2.8}$$

$$\varphi = \Delta\,. \tag{2.9}$$

La solution réelle est donc

$$x(t) = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t + \Delta)\,. \tag{2.10}$$

Regardons de plus près notre solution : d'une part, le système oscille effectivement avec la même pulsation ω que la force extérieure (on parle d'oscillation forcée). D'autre part, *l'amplitude* de cette oscillation *dépend de la pulsation* ω, et des caractéristiques physiques du système à travers m et ω_0. La dépendance en ω est très intéressante : on voit que si la pulsation de la force appliquée est éloignée de la pulsation propre ω_0, l'oscillation ne sera pas très importante, mais elle devient de plus en plus grande dès que ω s'approche de ω_0, et est même divergente pour $\omega \to \omega_0$! Evidemment, ce résultat n'est pas réaliste, car l'oscillation contiendrait alors une énergie infinie. Nous nous doutons bien que les choses vont s'arranger dès que nous prenons en compte le frottement.

Considérons alors le cas plus réaliste d'un **oscillateur forcé en présence de frottement**, où $\gamma \neq 0$. On cherche une solution (particulière) de l'EDL (2.1). En suivant la même stratégie, on remplace

$$x(t) = \mathrm{Re}(\hat{x}\, e^{i\omega t})$$
$$F(t) = \mathrm{Re}(\hat{F}\, e^{i\omega t})$$

dans (2.1), et on obtient

$$(k + i\omega\gamma - m\omega^2)\,\hat{x} = \hat{F} \tag{2.11}$$

d'où,

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma/m} \quad \Rightarrow \quad \rho\, e^{i\varphi} = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma/m}\, e^{i\Delta}\,. \tag{2.12}$$

On retrouve évidemment la solution (2.7) pour $\gamma = 0$. Pour $\gamma \neq 0$, le facteur qui multiplie $e^{i\Delta}$ au second membre n'est plus réel. Pour obtenir le module et la phase de $\hat{x}$

il faut donc extraire module et phase du second membre de l'équation[2]. On trouve ainsi

$$\rho = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\gamma/m)^2}} \tag{2.13}$$

$$\varphi - \Delta = \arctan\frac{(-\omega\gamma/m)}{(\omega_0^2-\omega^2)} = -\arctan\frac{(\omega\gamma/m)}{(\omega_0^2-\omega^2)}\,. \tag{2.14}$$

2.2 La fonction de transfert

Il convient de récrire les équations (2.13) et (2.14) en mettant en évidence le rapport entre les deux amplitudes complexes :

$$\frac{\hat{x}}{\hat{F}} = \frac{\rho\, e^{i\varphi}}{F_0\, e^{i\Delta}} = \frac{\rho}{F_0}e^{i(\varphi-\Delta)} = \frac{1/m}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\omega\gamma/m}\,. \tag{2.15}$$

Ce rapport entre amplitudes complexes est noté generalement $T(\omega)$ et appelé **fonction de transfert** du système :

$$T(\omega) = \frac{\hat{x}}{\hat{F}} \quad \textbf{fonction de transfert.} \tag{2.16}$$

La fonction de transfert est une fonction de la pulsation de la force appliquée ω qui permet de déterminer à la fois amplitude et phase de la *sortie* $\hat{x}$ (complexe) en fonction de celles de l'*entrée* $\hat{F}$. On a donc en général

$$\frac{\rho}{F_0} = \left|T(\omega)\right| \tag{2.17}$$

$$\varphi - \Delta = \theta_T = \arg(T(\omega)) \tag{2.18}$$

Ce résultat et la méthode de résolution en notation complexe sont très importants et nous les réutiliserons par la suite à plusieurs reprises. Résumons l'idée de fonction de transfert par un schéma :

$$\begin{array}{lcccl}
F(t) & \rightarrow & \boxed{\text{EDL}} & \rightarrow & x(t) \\
= F_0\cos(\omega t+\Delta) & & & & = \rho\cos(\omega t+\varphi) \\
= \mathrm{Re}(\hat{F}e^{i\omega t}) & & & & = \mathrm{Re}(\hat{x}e^{i\omega t}) \\
 & & & & \\
\Rightarrow \quad \hat{F} & \rightarrow & \boxed{\text{EDL}} & \rightarrow & \hat{x} = T(\omega)\,\hat{F}
\end{array}$$

Si un système linéaire reçoit en entrée une fonction harmonique, qu'on peut écrire comme partie réelle d'une fonction complexe $\hat{F}e^{i\omega t}$, la réponse du système est donnée par une fonction harmonique de même pulsation, dont l'amplitude et la phase dépendent de la pulsation ω et peuvent être déterminés à partir de celles d'entrée grâce à la fonction de transfert $T(\omega)$. Si on écrit la fonction en sortie sous forme complexe, soit $\hat{x}e^{i\omega t}$, alors on a $\hat{x} = T(\omega)\ \hat{F}$, et l'amplitude et la phase de $\hat{x}$ correspondent à l'amplitude et au déphasage de $x(t)$.

[2]On rappelle que le nombre complexe $z = 1/(a+ib)$ peut s'écrire comme$(a-ib)/(a^2+b^2)$ et que, par conséquent, module et phase s'obtiennent par $\left|z\right| = \left|(a-ib)/(a^2+b^2)\right| = 1/\sqrt{a^2+b^2}$, arg $z =$ arg $(a-ib) = \arctan(-b/a)$.

2.3 La résonance

Comme indiqué par l'equation 2.13, l'amplitude de $x(t)$ dépend de l'amplitude de la fonction en entrée, F_0, et de sa pulsation ω. Le module de la fonction de transfert $|T(\omega)|$ donne le rapport entre ces deux amplitudes. Le tracé de $|T(\omega)|$ s'appelle **courbe de résonance**. La figure 2.2 en présente plusieurs exemples associés à différentes valeurs du coefficient d'amortissement γ. Pour les systèmes très amortis, (grand γ), la courbe

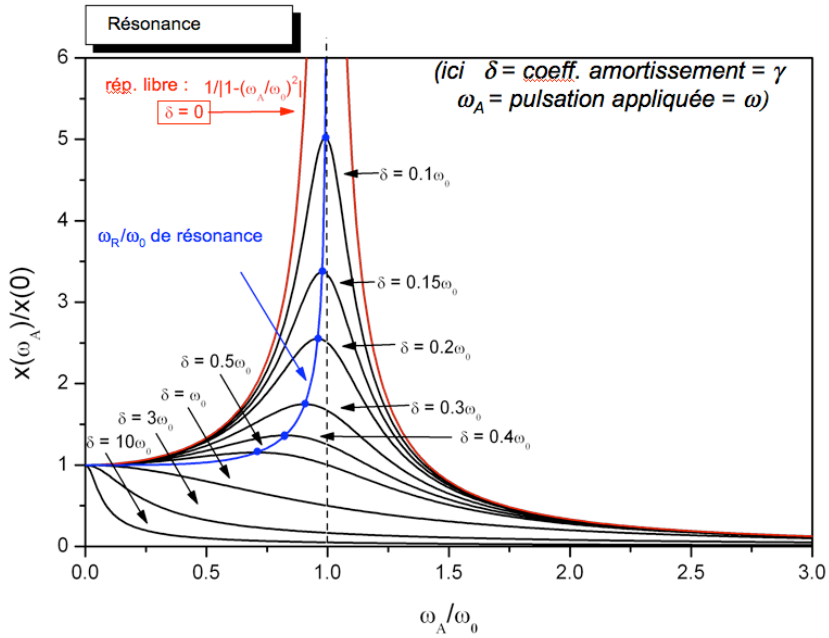

FIG. 2.2 – Courbes de résonance en fonction de ω/ω_0 pour des différentes valeur de γ (noté δ sur la figure).

est toujours décroissante : l'amplitude de sortie est égale à l'amplitude d'entrée pour $\omega = 0$ (c'est-à dire pour une force constante, non oscillante) et décroît ensuite avec la pulsation. Pour de plus faibles amortissements, au contraire, la réponse augmente d'abord avec ω, et atteint un maximum lorsque la pulsation est égale à une pulsation ω_R dite **pulsation de résonance** et donnée par

$$\omega = \omega_R = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2m^2\omega_0^2}} \quad \text{pulsation de résonance}\,. \tag{2.19}$$

La pulsation de résonance est toujours inférieure à ω_0 mais s'approche de ω_0 pour des amortissement faibles. Elle n'atteint ω_0 que pour $\gamma = 0$, et dans ce cas particulier l'amplitude devient infinie, comme nous l'avons trouvé précédemment. Comment interpréter les tracés de la figure 2.2 ? Tout simplement, l'oscillateur est déjà capable d'osciller à sa pulsation propre ω_0 si on le déplace de sa position d'équilibre. Le système forcé se comporte alors comme une balançoire qu'on pousse. Si la sollicitation extérieure vient le pousser toujours dans le bon sens, c'est-à-dire en phase avec sa propre oscillation, son

oscillation sera entretenue : la force extérieure transfère à l'oscillateur l'énergie nécessaire à compenser (et dépasser) les pertes par dissipation, d'autant plus qu'elle est en phase avec l'oscillation propre. Par contre, si la pulsation de $F(t)$ est très différente de la pulsation propre ω_0, la force va plutôt ralentir le mouvement de l'oscillateur car son action sera autant de le pousser que de le freiner, et l'amplitude en sortie sera faible. Le pic de résonance correspond donc à un couplage constructif entre force extérieure et oscillateur.

L'étroitesse du pic de résonance sur la figure 2.2 dépend aussi des conditions de résonance. La largeur du pic à mi-hauteur $\Delta\omega$ peut être calculée et vaut environ γ/m. Typiquement, on compare $\Delta\omega$ à la pulsation de résonance, en définissant le **facteur de qualité**

$$Q = \frac{\omega_R}{\Delta\omega} \simeq \frac{\omega_0}{\gamma/m} \quad \text{facteur de qualité}\,, \tag{2.20}$$

où on a utilisé l'approximation $\omega_R \simeq \omega_0$. Pourquoi définir ce paramètre ? On compare la pulsation de résonance avec la largeur du pic, autrement dit à la "résolution" avec laquelle on peut déterminer sa position. Si on effectue une mesure de la courbe de résonance d'un système physique, on pourra donc identifier la pulsation de résonance (et donc la pulsation propre) du système avec une incertitude d'autant plus petite que la largeur du pic $\Delta\omega$ est faible et le facteur de qualité Q grand. Rappelons-nous en effet que l'oscillateur harmonique n'est qu'un modèle pour tous les systèmes physiques oscillants, et que la détermination de la fréquence propre peut donner des information précieuses sur les paramètres physiques propres à ces systèmes ! D'autre part, la détermination de Q donne accès à un autre paramètre physique important, l'amortissement γ : nous avons ainsi un double outil pour explorer la nature physique d'un système par sa réponse à une sollicitation. L'étude de la courbe de résonance est en effet une opération qu'on fait souvent en physique expérimentale, pour étudier un système physique d'intérêt mais aussi pour déterminer la réponse d'un instrument de mesure. Un instrument de mesure est lui aussi un système sensible à une sollicitation extérieure, dont on mesure la réponse : dans ce cas, la facteur de qualité permet d'estimer la précision de l'instrument.

2.4 Diagramme de Bode

Terminons ce chapitre par un dernier point un peu plus technique concernant la manière de représenter la fonction de transfert du système $T(\omega)$.

Pour commencer, nous avons tracé son amplitude (la courbe de résonance) mais pas sa phase $\theta_T(\omega)$. L'équation 2.14 nous permet de la calculer : on a $\theta_T(0) = \arctan(0) = 0$ et pour $\omega \to \omega_0-$ on trouve $\theta_T(\omega) = -\arctan(\infty) = -\pi/2$. Il faut maintenant raccorder cette partie de la solution $\theta_T(\omega)$ à une deuxième partie définie en (ω_0+, ∞) de manière à avoir une fonction continue, ce qui demande d'aller chercher la solution sur une autre branche de la fonction multivaluée arc-tangente. On prendra donc $\theta_T(\omega_0+) = -\pi/2$ en se plaçant sur la branche immédiatement inférieure de la fonction, et pour $\omega \to \infty$ on aura donc $\theta_T(\omega) \to -\pi$.

Nous avons une première représentation graphique de la fonction de transfert avec les figures 2.2 et 2.3. Cependant, une représentation particulière, dite **diagramme de Bode**, est souvent utilisée (pas seulement pour l'oscillateur), car particulièrement adaptée à

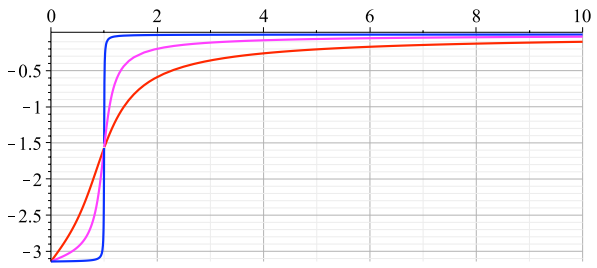

FIG. 2.3 – Phase $\theta_T(\omega)$ de la fonction de transfert de l'oscillateur forcé amorti en fonction de ω/ω_0 pour $\gamma/m = 0.01$ (courbe bleue), 0.3 (courbe rose) et 1 (courbe rouge).

repérer rapidement les caractéristiques essentielles de la fonction. Il s'agit de représenter la pulsation ω (on utilise parfois la pulsation réduite ω/ω_0) sur une échelle logarithmique à base 10, puis de représenter le module $|T(\omega)|$ en **décibels**, alors que la phase reste en échelle linéaire. Par définition, exprimer une grandeur en décibels consiste à prendre 20 fois son $\log_{10}$, et on a donc :

$$\begin{array}{lcll} \omega & \rightarrow & \log_{10}\omega & \\ |T(\omega)| & \rightarrow & 20\log_{10}|T(\omega)| & \text{(décibels)} \\ \theta_T(\omega) & \rightarrow & \theta_T(\omega) & \end{array}$$

Les avantages de cette représentation sont multiples. D'une part, elle permet de visualiser plusieurs ordres de grandeurs de la pulsation sur un même graphe, par exemple du dixième, centième ou millième de ω_0 jusqu'à 100 ou 1000 ω_0. D'autre part, le pic de résonance (s'il y en a un) est clairement visible : $|T(\omega)|$ en décibels est positif seulement lorsqu'il est supérieur à 1, donc en correspondance du pic de résonance ($|T(\omega)|$ en décibels vaut 0 en $\omega = 0$ et devient négatif dès que l'amplitude en sortie devient inférieure à celle en entrée, pour $\omega \rightarrow \infty$). Enfin, et c'est peut-être la principale raison pour ce choix, la décroissance de $|T(\omega)|$ en $1/\omega^2$ donne une dépendance linéaire pour $20\log_{10}|T(\omega)|$ pour $\omega \rightarrow \infty$. De plus, comme on verra plus tard, nous serons amenés à étudier les fonctions de transfert d'autres systèmes physiques dont la décroissance plus ou moins rapide, par exemple en $1/\omega$ ou $1/\omega^3$. Le choix des décibels permet alors d'identifier tout de suite l'allure de cette décroissance, car elle est liée directement à la *pente* de la droite pour $20\log_{10}|T(\omega)|$: en effet,

- Si $|T(\omega)| \sim (\frac{\omega}{\omega_0})^{-1}$, alors $20\log_{10}|T(\omega)| \sim -20\log(\frac{\omega}{\omega_0})$ et $\theta_T(\infty) - \theta_T(0) = \pi$;
- Si $|T(\omega)| \sim (\frac{\omega}{\omega_0})^{-2}$, alors $20\log_{10}|T(\omega)| \sim -40\log(\frac{\omega}{\omega_0})$ et $\theta_T(\infty) - \theta_T(0) = 2\pi$;
- Si $|T(\omega)| \sim (\frac{\omega}{\omega_0})^{-3}$, alors $20\log_{10}|T(\omega)| \sim -60\log(\frac{\omega}{\omega_0})$ et $\theta_T(\infty) - \theta_T(0) = 3\pi$;
- ...

Par conséquent on a, pour $\omega \rightarrow \infty$, une droite de pente -20, -40, -60 selon la rapidité de la décroissance de la fonction de transfert[3].

[3] On parle en effet de **filtre** (on reviendra sur ce terme) **de premier, deuxième, troisième ordre** pour ces cas respectivement, pour indiquer la rapidité avec laquelle la fonction de transfert, et donc l'amplitude du signal-réponse du système, s'annule pour les grandes fréquences.

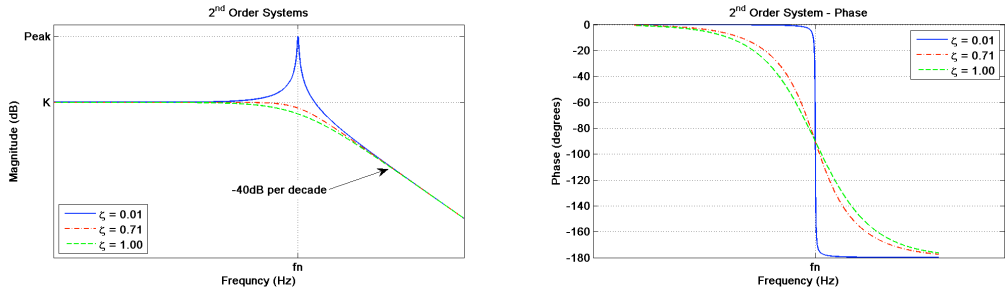

FIG. 2.4 – Diagramme de Bode pour l'oscillateur forcé amorti pour trois valeurs différent de l'amortissement (indiqué ici par le symbole ζ).

Le diagramme de Bode pour l'oscillateur forcé amorti est representé sur la figure 2.4. On remarque encore, pour finir, que dans le cas où il n'y a pas de résonance, le point $\omega = \omega_0$ apparaît comme une sorte de coude dans le diagramme du module de la fonction de transfert, qui sépare la région où $|T(\omega)| \sim 1$ et $20\log_{10}|T(\omega)| \sim 0$ (amplitude en sortie égale à l'amplitude en entrée), de celle où l'amplitude décroît vers zéro (partie linéaire en décibels).

2.5 Résonances dans la nature

Nous venons d'étudier le phénomène de la résonance dans le cas de l'oscillateur mécanique. Ce phénomène est observé dans beaucoup de systèmes naturels. Mesurer la fréquence de résonance et la largeur du pic nous donne des informations sur les paramètres physiques du système.

Les exemples sont nombreux, et incluent tous les systèmes oscillants que nous avons mentionné. On trouve d'autres exemples intéressant par exemple dans le "Cours de physique" de Feynman, qui partent du niveau atomique et sub-atomique pour aller jusqu'à des plus grandes échelles. On y trouve par exemple le cas de l'absorption du rayonnement électromagnétique par un cristal. Dans ce cas, seule la lumière de fréquence proche à la fréquence de résonance des ions du cristal est absorbée (et utilisée pour les mettre en mouvement). La même chose advient pour un atome ionisé ou une molécule qui vibre. Je conseille très fortement la lecture des chapitres 22 à 25 du Feynman. Tout y est très bien expliqué. C'est une lecture très instructive qui demande un peu de patience mais permet d'aller en profondeur dans la compréhension physique des phénomènes dont nous avons parlé dans ce cours.

Chapitre 3

L'étude expérimentale d'un système physique : la chaîne de mesure

Une fois qu'on a réussi à mettre en mouvement un système oscillant, comment cette oscillation se transmet au milieu environnant ? Comment peut-on la "capturer" pour la mesurer ? Et enfin, que devient le signal ainsi capturé, comment peut-on le transmettre, le décrire ? Ces questions nous amènent à aborder la question la construction d'une chaîne de mesure.

Cette dernière opération est le problème de la *mesure physique* : l'obtention d'un signal issu d'un système physique au moyen d'un instrument et son étude. Nous allons voir quelles sont les étapes de cette opération.

Concrètement, on a besoin de construire une **chaîne de mesure**, dont la structure typique est la suivante :

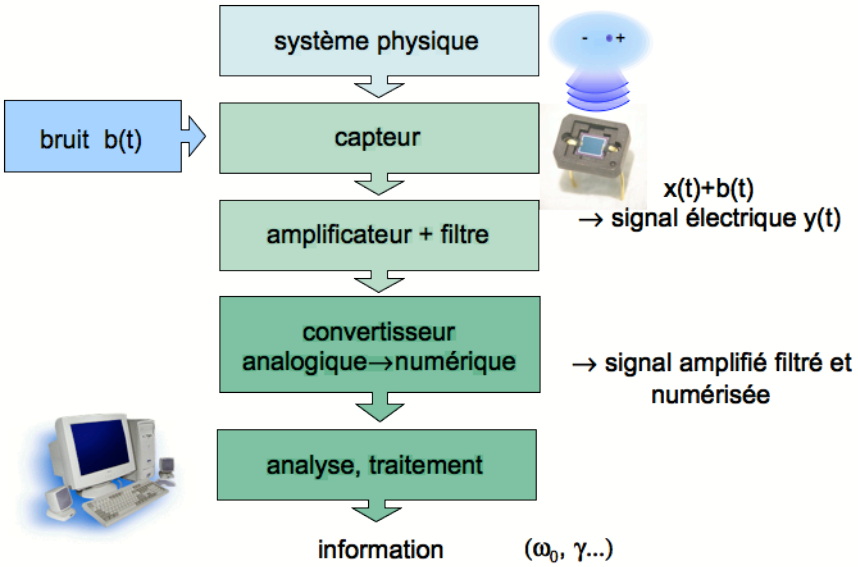

FIG. 3.1 – La chaîne de mesure.

Chaque étape mérite une discussion. Et chaque étape est en quelque sorte liée à une partie du cours : le plan du cours pourrait se résumer à cette chaîne !

3.1 Le signal physique

Dans notre étude de l'oscillateur forcé, nous avons entrepris de décrire un système physique comme un objet qui reçoit une sollicitation par une force extérieure *en entrée* et répond par un signal mesurable *en sortie*. Que la sollicitation soit présente dans la nature (exemple : attraction lunaire (entrée) qui cause les marées (réponse)) ou bien appliquée par un opérateur (exemple : polarisation d'un atome), on a donc un signal en sortie qu'on peut essayer d'attraper et d'étudier. Si dans certains cas le signal en sortie peut être mesuré directement (position d'une masse attachée à un ressort, niveau de la mer, température d'un corps) dans d'autre cas, comme par exemple pour l'oscillation des charges dans un atome, la mesure ne peut être directe. Mais l'oscillation des charges dans un atome a une conséquence mesurable : la création d'une onde électromagnétique qui se propage dans l'espace environnant, et qui peut être capté par exemple grâce à une photodiode. La production d'une onde qui se propage est souvent en cause dans le processus de mesure : il peut s'agir d'une onde sonore, d'une onde électromagnétique (lumineuse ou pas), d'une onde transversale se propageant le long d'une corde ou à la surface d'un liquide, etc. Dans tous les cas, pour pouvoir étudier un système physique, il est nécessaire en premier lieu de disposer d'une grandeur mesurable liée au phénomène physique qui nous intéresse.

On appelle **signal physique** la grandeur qu'on souhaite mesurer et qui contient de l'information utile. Le plus souvent c'est une grandeur variable au cours du temps. D'autres exemples sont : onde électromagnétique radio ou télécom, dont on veut extraire une information transmise ; pression atmosphérique au sol ; son émis par un animal ; taux d'ozone dans l'atmosphère. Ces signaux sont censés nous renseigner sur le système d'intérêt. Il faut donc les enregistrer, puis les traiter de sorte à en sortir l'information cherchée de la manière la plus efficace possible.

Les signaux physiques peuvent avoir des caractéristiques diverses. Ils sont en général **analogiques**, c'est-à-dire continus dans le temps, mais on a souvent affaire à des signaux **numériques**, suites discrètes de valeurs, soit parce que le signal d'origine a été échantillonné (on a parlera plus tard), soit parce qu'on s'intéresse à un phénomène intrinsèquement discret, comme par exemple la suite temporelle des cotations d'une action en bourse ou des températures minimales journalières dans une région. Un signal peut être **déterministe**, c'est-à-dire prévisible, qui suit une loi connue, comme par exemple le signal électrique fourni par un générateur qu'on aurait réglé à une certaine amplitude et fréquence, mais aussi **aléatoire**, non prévisible, issue d'un processus contenant une part de hasard, pour laquelle on peut seulement donner la probabilité d'obtenir une certaine valeur à un temps donné. On reparlera de ces aspects plus loin.

3.2 Le capteur

Le capteur est un instrument possédant une caractéristique mesurable qui est sensible à la grandeur physique qu'on veut mesurer. Par exemple, si on veut mesurer le taux d'ozone dans l'atmosphère, on pourra utiliser un dispositif qui émet de la lumière dans la bande d'absorption de l'ozone, l'envoie vers un échantillon d'air puis enregistre

l'intensité de la lumière transmise. Une photodiode pourra par exemple être utilisée pour mesurer cette intensité. Le fonctionnement d'une photodiode est basée sur une jonction semi-conducteur dont les caractéristiques courant-tension sont modifiées par les photons incidents, et permet donc de traduire l'intensité lumineuse incidente en signal électrique.

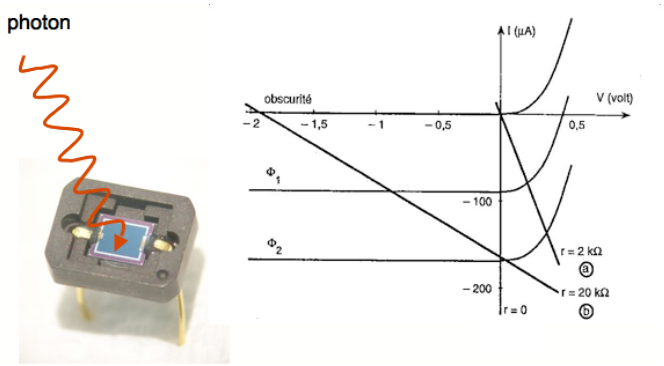

FIG. 3.2 – Photodiode et ses caractéristiques courant-tension.

Un autre exemple simple de capteur est le microphone (figure 3.3). Pour enregistrer les variations de pression qui caractérisent la propagation d'un son, on utilise une membrane qui vibre sous l'effet de la vibration de l'air environnant (il s'agit précisément d'un oscillateur mécanique forcé !). La membrane est solidaire d'une bobine placée dans un champ magnétique. Les vibrations de la membrane sont transmises à la bobine, ce qui engendre un courant électrique qu'on peut enregistrer.

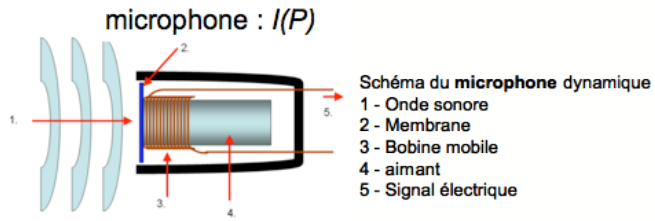

FIG. 3.3 – Schéma d'un microphone.

Un troisième exemple : la thermistance (figure 1.2). Ce dispositif exploite la variation de résistance électrique de certaines céramiques en fonction de la température. Les variations de résistance entraînent une modulation du courant électrique qui donne le signal enregistré.

Comme on le voit dans ces exemples, une caractéristique commune à la plupart des capteur est de traduire le signal issu de la variable à mesurer en signal électrique, plus facile à transmettre, traiter et sauvegarder. Une autre remarque est que, pour le cas des signaux électromagnétiques, le capteur est en général sensible à l'énergie transportée par le signal et pas directement aux champs : cela implique que seule l'amplitude (au carré) du signal peut être mesurée, et pas sa phase.

Remarquons aussi que, très souvent, le couplage entre le système physique oscillant et le milieu extérieur, dont nous avons parlé à propos de la propagation des ondes, joue un rôle fondamental dans le processus de mesure : c'est la propagation du signal dans l'espace environnant (onde lumineuse, sonore, diffusion thermique) qui permet de le transporter jusqu'au capteur et donc de le mesurer. Ce couplage n'est jamais parfait, ce qui limite la précision de la mesure et est source de bruit (voir 3.3).

Il est important, lors du choix d'un capteur pour une expérience donnée, de tenir compte de ses **caractéristiques principales**, et particulièrement :

- l'intervalle de fonctionnement : ses valeurs mesurables minimum et maximum, qui en limitent évidemment l'usage à une plage de valeurs ;
- la linéarité : la proportionnalité entre signal d'entrée et signal de sortie, qui n'est pas une caractéristique indispensable mais en facilite l'usage ; on doit dans tous cas savoir si le capteur est linéaire ou pas dans la gamme de valeurs qu'on souhaite mesurer ;
- la précision : la plus petite différence mesurable entre deux valeurs proches ;
- le temps de réponse : la rapidité de la réponse du capteur à la sollicitation, le retard de sa réponse, qui en limite l'usage dans le cas de mesure de grandeurs rapidement variables dans le temps.

Il est donc évident que le choix d'un capteur approprié est fondamental pour la réussite d'une mesure !

3.3 Bruit

L'opération de conversion en signal électrique n'est pas parfaite. La génération d'un signal électrique est toujours soumise à des *fluctuations aléatoires*, d'origines diverses, comme par exemple

- l'agitation thermique des charges électriques dans les conducteurs (bruit "Johnson")
- le caractère discret (quantique) de la charge électrique : un courant électrique n'est pas réellement une quantité continue car il doit pouvoir se réduire à un nombre d'électron par seconde. Le courant réel à un instant donné peut donc différer du courant moyen (qui lui peut être non entier), ceci impliquant une fluctuation (bruit "Shot noise").

On parle pour ces deux cas de bruit fondamental, car ce sont des caractéristiques inévitables et intrinsèques à la mesure du signal électrique.

A ces causes de fluctuations il faut ajouter toute source de fluctuation due au couplage imparfait du capteur au système physique étudié, à l'interférence d'autres systèmes voisins, aux vibrations mécaniques, etc., en général à toutes les imperfections du procédé de mesure, qui peuvent en général être améliorées mais difficilement éliminées. On parle alors de bruit environnemental.

L'effet commun de toutes ces causes est d'introduire une variabilité aléatoire dans le signal de mesure, qu'on appelle *le bruit*. Comment décrit-on un bruit ? En général, c'est

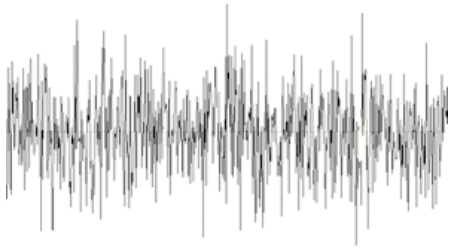

FIG. 3.4 – Bruit thermique : la valeur quadratique moyenne des fluctuations de la tension v aux bornes d'une résistance R est donnée par la relation de Nyquist $\bar{v}^2 = 4\,k_B T\,R\,\Delta f$, où Δf est la bande passante considérée.

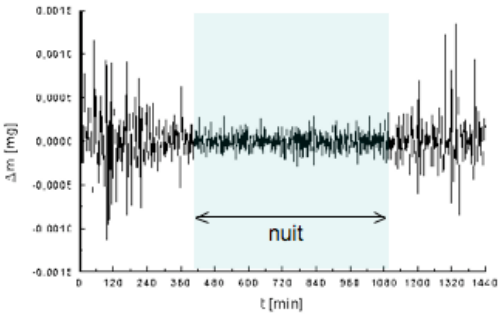

FIG. 3.5 – Exemple de bruit environnemental : les vibrations mécaniques enregistrées dans un laboratoire, dues particulièrement au passage de voitures et au fonctionnement d'autres appareils dans les alentours, diminue sensiblement au cours de la nuit.

un signal aléatoire, c'est-à-dire un signal qui ne peut pas être décrit parfaitement mais dont on a seulement une connaissance statistique. On peut donner sa valeur moyenne, son écart type, d'autres caractéristiques statistiques de son allure, mais on ne peut pas prévoir sa valeur exacte à un instant donné. C'est un type de signal important qui nous occupera à la fin du cours. Il est intéressant aussi de remarquer que dans beaucoup de cas le signal physique qui nous intéresse est lui-même un signal aléatoire : pensons par exemple à la mesure de la température moyenne annuelle sur Terre, ou bien au signal enregistré lors d'un électroencéphalogramme, ou bien à un signal radio. Il s'agit bien sûr de signaux qui contiennent une information bien précise et qui résultent d'un phénomène physique bien identifié, mais qui sont partiellement imprévisibles, ou tellement compliqués qu'on ne peut en avoir qu'une connaissance partielle.

Lors d'une mesure, le signal intéressant $x(t)$ est mélangé à du bruit, qu'on indiquera par $b(t)$. Dans beaucoup de cas, mais pas toujours, le bruit est *additif*, c'est-à-dire qu'il se somme simplement au signal d'intérêt. A l'issu de la mesure on obtient un signal

$$y(t) = x(t) + b(t)\,. \tag{3.1}$$

La question se pose donc de comment "séparer" le signal intéressant du bruit. Selon le

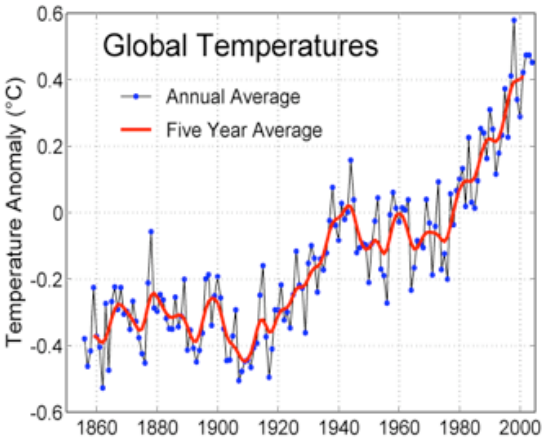

FIG. 3.6 – Exemple de signal aléatoire : une estimation des fluctuations de température sur la terre au cours des ans : moyennes annuelles (en bleu) et sur 5 ans (en rouge).

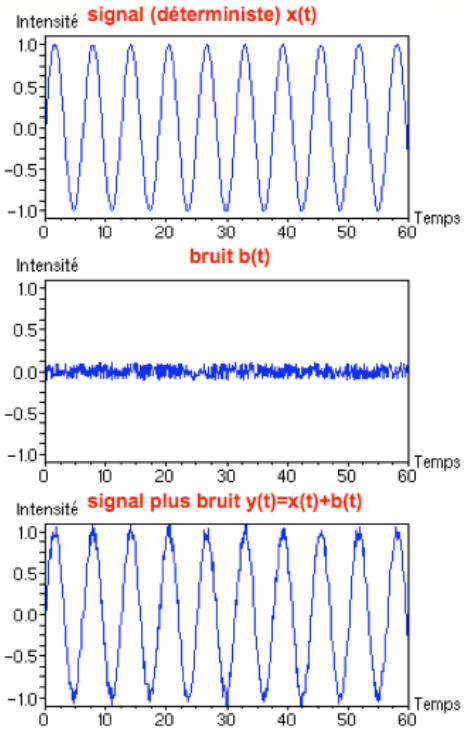

FIG. 3.7 – Un exemple de signal plus bruit.

type de bruit, des méthodes différentes peuvent être utilisées afin de réduire la part de bruit ou, en d'autres mots, d'améliorer le **rapport signal sur bruit**. Typiquement, ce qu'on cherche à faire est une opération de **filtrage**.

3.4 Filtre + Amplificateur

Dans le cas d'un signal électrique bruité $y(t)$, un filtre est en général un circuit électrique qui reçoit le signal $y(t)$ en entrée et donne en sortie un signal modifié $s(t)$, pour lequel on espère avoir un meilleur rapport signal sur bruit. Pour cela, on cherche à amplifier la partie intéressante du signal, que nous avons appelé $x(t)$, et à atténuer le bruit $b(t)$. Nous allons étudier dans le détail quelques filtres électriques simples, ce qui nous permettra de mieux comprendre leur fonctionnement. Il n'existe pas que des filtres électriques : on peut filtrer un signal lumineux pour en isoler une composante (une longueur d'onde) par une gélatine colorée ou, pour une meilleure résolution, utiliser un filtre interférentiel.

Remarquons que les filtres et les capteurs sont eux aussi des systèmes physiques, qui répondent à un signal d'entrée en générant un signal de sortie ! Si le filtre ou le capteur sont *linéaires*, alors leur effet sur le signal en entrée peut être décrit par une EDL exactement comme pour le cas d'un système physique. Leur comportement peut être déterminé par les mêmes méthodes. Un filtre ou un capteur linéaires sont donc aussi décrit par une fonction de transfert $T(\omega)$, ce qui veut dire, comme nous l'avons vu, que leur réponse dépendra non seulement de l'intensité du signal en entrée, mais aussi de sa fréquence, s'il s'agit d'un signal oscillant. On peut donc construire des filtres électriques qui "laissent passer" les oscillations de faible fréquence et pas celles à haute fréquence, ou le contraire, ou bien qui sont "transparents" pour des fréquences intermédiaires mais coupent les basses et les hautes fréquences. On parle ainsi de filtres **passe-bas**, **passe-haut**, **passe-bande** (ou encore **coupe bande** s'ils atténuent le signal dans une fenêtre de fréquences). On peut ainsi imaginer une méthode de filtrage efficace pour les cas où le signal qui nous intéresse oscille sur des fréquences bien différentes des fréquences caractéristiques du bruit additif. Il suffit de faire passer le signal par un filtre qui coupe les fréquences caractéristiques du bruit et laisse passer (ou, encore mieux, amplifie) les autres pour récupérer le signal intéressant presque sans bruit ! Dans l'exemple de la figure 3.7, par exemple, on voit que le bruit varie de manière beaucoup plus rapide, et donc sur des fréquences plus élevés que le signal $x(t)$: un filtre passe-bas fera l'affaire.

Malheureusement, les choses ne sont pas souvent si simples. Le bruit thermique, par exemple, qui est un bruit fondamental et donc impossible à éliminer au niveau du capteur, est un bruit dit "large-bande". Ses fluctuations font intervenir un grand nombre de fréquences différentes en même temps, des plus faibles aux plus élevées. L'opération de filtrage devient donc beaucoup plus complexe. Mais pas impossible : il faut dans ce cas utiliser toutes les informations "théoriques" qu'on a sur le signal cherché pouvoir l'extraire du signal bruité. Ces techniques de filtrage font l'objet de la théorie du traitement du signal et nous ne les aborderons pas dans ce cours.

3.5 Conversion analogique-numérique

Imaginons que nous avons conçu un filtre permettant l'extraction du signal physique d'intérêt. C'est un signal analogique, c'est-à-dire qu'il varie dans le temps de manière continue dans un intervalle de valeurs. Pour pouvoir le traiter avec un ordinateur, il

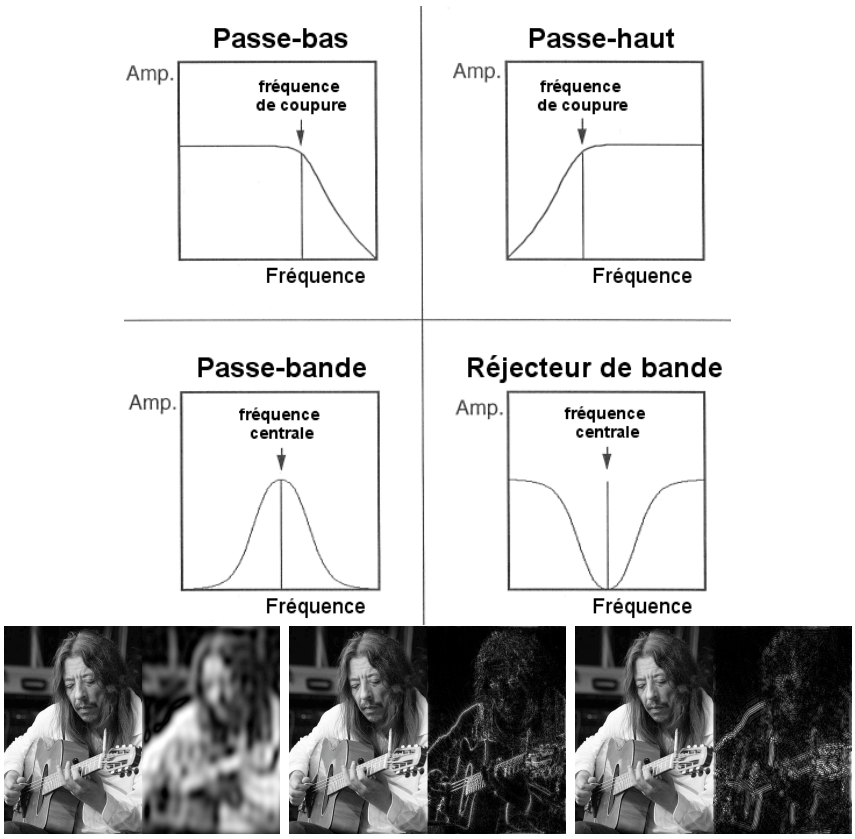

FIG. 3.8 – Transmittance des principales filtres. Application de filtres passe bas, passe haut et passe bande (dans l'ordre) à une image.

faut cependant le rendre numérique (digital) : générer à partir de sa valeur analogique, une valeur numérique (codée sur plusieurs bits), proportionnelle à la valeur analogique entrée. En effet, l'ordinateur travaille seulement sur des nombres binaires, et peut donc représenter seulement un nombre fini de valeurs discrètes (avec N bits on peut représenter 2^N valeurs entre une valeur minimum et une maximum). La conversion analogique-numérique consiste à la fois à **discrétiser le signal**, c'est à dire recueillir la valeur du signal à des temps donnés, espacés d'un intervalle de temps fini, et à le **quantiser**, c'est-à-dire approcher son amplitude, point par point, en la représentant sur un ensemble fini de valeurs possibles. Le signal est alors numerisé[1] ("digitalisé").

Evidemment, cette conversion peut faire perdre de l'information sur le signal, et entraîner donc des conséquences négatives sur le processus de mesure. Cependant, cette perte d'information peut être évitée si on effectue la conversion analogique-numérique

[1]Un signal échantillonné et numérisé est une suite de valeurs discrètes, comme dans la figure 3.9. Cependant, on peut parfois avoir affaire à un signal digitalisé mais continu dans le temps. C'est par exemple ce qu'on obtient en faisant suivre à l'échantillonnage d'un signal l'action d'un **bloqueur**. En effet, une fois le signal filtré et échantillonné, pour pouvoir réaliser la quantification, on doit maintenir constant la valeur à quantifier afin de permettre au convertisseur analogique-numérique de traiter l'échantillon et de le numériser. On appelle cette opération le blocage. Si le temps de blocage est égal au pas d'échantillonnage, on a donc un signal généralement non nul pour tout instant t.

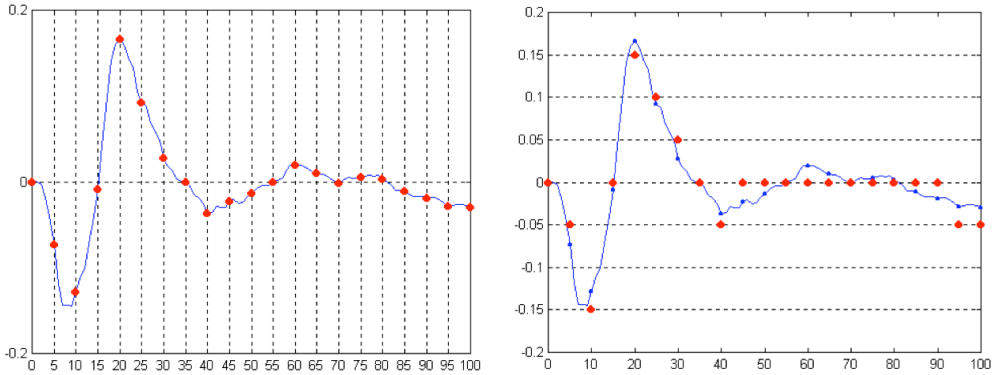

FIG. 3.9 – Discretisation puis quantisation d'un signal analogique.

en suivant quelques règles fondamentales. Nous allons étudier par quelles méthodes on peut reconnaître les éventuels problèmes qui en suivent et les éviter (ou limiter) dans le chapitre sur l'échantillonnage des signaux.

Quels sont les avantages de la numérisation du signal ? D'une part, nous l'avons dit, cela permet de le traiter par ordinateur. D'autre part, le signal numérique présente aussi une stabilité beaucoup plus importante quand il est transmis ou enregistré. Une fois le signal traduit en bits, l'effet d'un éventuel bruit qui s'y rajouterait devient négligeable.

3.6 Analyse et traitement du signal

Finalement, comment interpréter un signal ? Pour l'instant, nous nous sommes limités à des cas très simples de phénomènes physiques. Pour un système linéaire la réponse à un signal sinusoïdal en antrée est un signal sinusoïdal de même fréquence en sortie. Nous nous sommes contentés de mesurer son amplitude et sa phase. Mais les signaux physiques ne sont pas toujours si simples ! La figure 3.10 par exemple montre les signaux issus de la prononciation des trois voyelles A, I et O, chantées sur une même note, une fois traduits en signal électrique. On note que ce sont des signaux périodiques plus complexes qu'une simple sinusoïde. Comment est-il possible d'étudier ces signaux, de

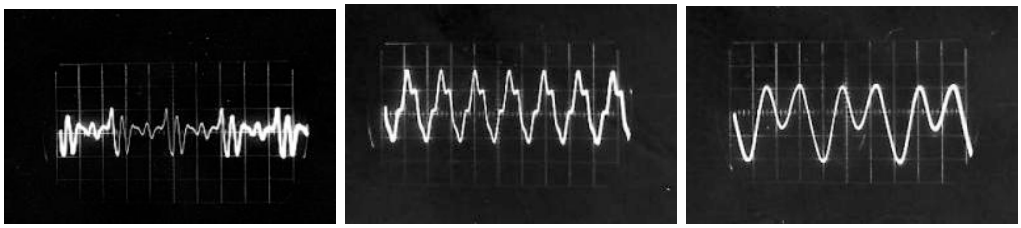

FIG. 3.10 – Signaux issu des voyelles A, I, O.

les comparer entre eux de manière pertinente ? Des méthodes d'analyse sont nécessaires pour les distinguer et reconnaître laquelle des trois voyelles est chantée, ou de montrer que les trois sont sur une même note. Ce problème fera l'objet du chapitre 5, et nous

permettra d'introduire un concept clé de notre parcours : la *décomposition de Fourier*. Plus tard, nous généraliserons ce concept aux signaux non périodiques et nous serons alors en mesure d'étudier des signaux plus complexes.

Chapitre 4

Analogie mécanique-électrique : les circuits électriques

Nous avons vu qu'une mesure consiste a capter un signal physique, le traduire en signal électrique, puis lui faire subir un certain nombre de transformations. Nous avons vu aussi que les capteurs et les filtres sont des systèmes physiques se comportant comme des "boîtes" qui reçoivent un signal en entrée et délivrent un signal en sortie :

$e(t)$	$\rightarrow$	$\boxed{\text{EDL}}$	$\rightarrow$	$s(t)$
entrée		système physique, (filtre, capteur, atome...)		sortie

Les filtres que nous considérerons sont des circuits électriques. Il existe des liens et des analogies fortes entre le comportement de ces circuits électriques et d'autres systèmes physiques. Comme d'ailleurs nous l'avons déjà remarqué, plusieurs systèmes appartenant à des différentes branches de la physique peuvent avoir un comportement similaire. Les circuits électriques qui nous allons étudies jouent un rôle actif dans la chaîne de mesure, mais représentent aussi des systèmes physiques modèles, faciles à mettre en place et à étudier, dont le comportement est similaire à celui de systèmes physiques plus difficiles à manipuler. C'est aussi pour cela que nous allons nous intéresser aux circuits électriques. Après quelques rappels d'électricité, nous discuterons en détail l'analogie entre l'oscillateur mécanique et le circuit RLC.

4.1 Les circuits électriques : rappels

L'étude théorique d'un circuit est basée sur les lois de l'électromagnétisme. Les grandeurs physiques recherchées sont habituellement le courant[1] i qui circule dans un élément et la tension (ou différence de potentiel) e aux bornes de cet élément. Un élément

[1] Nous utilisons dans ce chapitre la même notation, i, pour le courant électrique et pour le complexe unitaire. Le contexte devrait cependant permettre de les distinguer facilement !

de circuit linéaire satisfait la relation :

$$e(i_1 + i_2) = e(i_1) + e(i_2) \tag{4.1}$$

Nous utiliserons la convention suivante : soit A et B deux points qui bornent un élément du circuit. Soit i le courant qui circule dans l'élément de A vers B et soit v_n le potentiel au point n. La différence de potentiel e aux bornes de l'élément est alors

$$e \equiv v_B - v_A \tag{4.2}$$

tandis que la chute de tension v aux bornes de cet élément s'écrit

$$v \equiv v_A - v_B \,. \tag{4.3}$$

Tout élément d'un circuit linéaire peut s'écrire comme une combinaison de trois éléments de base : résistance R, capacitance C et inductance L. Le tableau donne les définitions de ces quantités et leurs relations avec le courant et la tension.

Quantité	Symbole	Unité	Symbole	Correspondance
Charge	q	coulomb	C	
Courant	i	ampère	A	Cs^{-1}
Tension	v (ou e)	volt	V	JC^{-1}
Résistance	R	ohm	Ω	$VA^{-1} = JsC^{-2}$
Capacitance	C	farad	F	$CV^{-1} = C^2J^{-1}$
Inductance	L	henry	H	$VsA^{-1} = Js^2C^{-2}$
Puissance	P	watt	W	$VA = Js^{-1}$

Un courant sera normalement activé dans un circuit lorsqu'une tension e y est appliquée. Si e varie avec le temps, de même i dépendra du temps. On note souvent les grandeurs qui varient dans le temps par des lettres minuscules (v, i, e), les grandeurs constantes par des lettres majuscules (V, I, E).

4.1.1 Lois de Kirchhoff

La première loi de Kirchhoff, ou **loi des nœuds**, établit l'interdépendance des courants en un nœud, ou point de jonction, d'un circuit : en tout temps, la somme algébrique des courants arrivant à un nœud est nulle,

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0 \tag{4.4}$$

C'est une application de la loi de la conservation de la charge : puisque la charge ne peut être créée ni détruite, le flux total de charge (le courant) *vers* le nœud est nul.

La deuxième loi de Kirchhoff ou **loi des mailles** est une application de la loi de conservation de l'énergie. Si l'on déplace une charge le long d'une maille d'un circuit et qu'on la ramène à son point de départ, la somme des changements de potentiel ressentis

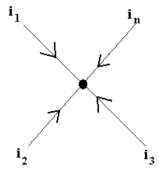

FIG. 4.1 – Loi des nœuds.

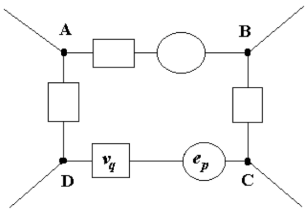

FIG. 4.2 – Loi des mailles.

par cette charge doit être nulle. La figure représente une telle maille entrant dans la constitution du circuit où A, B, C et D représentent des nœuds. Les petits rectangles sont les éléments du circuit. On a également fait figurer une source de tension externe e sur la branche DC. Supposons qu'il y a n éléments dans la maille. Un nombre l de ceux-ci sont associés à une différence de tension e_p et un nombre m à une chute de tension v_q, avec $l + m = n$. La seconde loi de Kirchhoff s'écrit :

$$\sum_{p=1}^{l} e_p + \sum_{p=1}^{m} v_p = 0 \quad \textbf{(Loi des mailles)} \tag{4.5}$$

c'est-à-dire que la somme des différences de potentiel est égale à la somme des chutes de tension pour tout trajet fermé.

4.1.2 Eléments de circuit

Comme on l'a dit plus haut, tout circuit linéaire peut être représenté comme une combinaison de résistances, capacitances et inductances pures. La loi d'Ohm s'applique aux résistances mais pas aux deux autres sortes d'éléments, qu'on appelle éléments réactifs. Voyons comment écrire les relations entre courant et tension pour ces éléments.

Résistance. La loi d'Ohm établit la relation entre le courant i circulant dans une résistance pure R à l'instant t et la tension v_R aux bornes de cette résistance au même instant, qui s'écrit

$$v_R = v_A - v_B = Ri \quad \textbf{(Loi d'Ohm)} \tag{4.6}$$

Condensateur. Un condensateur est un élément constitué de deux armatures conductrices (appelées électrodes) en influence totale et séparées par un isolant polarisable (diélectrique). Sa propriété principale est de pouvoir stocker des charges électriques opposées sur ses armatures. Le condensateur est globalement neutre ; si on applique une tension v_c entre les deux plaques, les charges électriques négatives (électrons) en provenance de la borne négative de la source tendent à se déplacer sur la plaque correspondante

tandis que les charges positives (manque d'électrons) se rassemblent sur l'autre. La capacité du condensateur donne la mesure de cet effet. Pour un condensateur de capacité C, les charges q et $-q$ sur chaque plaque sont

$$q = Cv_c\,. \tag{4.7}$$

Si la tension varie au cours du temps, la variation de charge qui s'en suit correspond à une circulation de courant dans la branche du circuit où se trouve le condensateur. On peut donc écrire

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dv_c(t)}{dt}\,. \tag{4.8}$$

Ceci implique donc que

$$v_c(t) = v_c(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt\,. \tag{4.9}$$

Dans le cas d'une alimentation continue constante, $dv_c/dt = 0$ et le condensateur correspond à un circuit ouvert : il n'y a pas de passage de courant, $i(t) = 0$.

Inductance. On appelle inductance un bobinage d'un fil conducteur éventuellement enroulé autour d'un noyau en matériau ferromagnétique. Si la bobine est traversée par un flux d'induction magnétique Φ variable, une tension v est induite à ses bornes. La loi de Faraday donne :

$$v(t) = \frac{d\Phi}{dt} \tag{4.10}$$

S'il n'y a pas d'induction dans un élément du circuit provenant d'un autre élément de ce circuit, on peut caractériser chaque élément inductif du circuit par son inductance L telle que

$$\Phi = Li. \tag{4.11}$$

On a donc aux bornes d'un tel élément

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{4.12}$$

Dans le cas d'un courant continu constant $i(t) = I =$cte, soit $di/dt = 0$: une inductance pure parcourue par un courant continu est un court-circuit, $v_L(t) = 0$.

4.1.3 Combinaison des éléments d'un circuit

Résistances. Soit deux résistances en série. La première loi de Kirchoff implique qu'un même courant y circule. La deuxième loi de Kirchoff et la loi d'Ohm donnent quant à elles

$$v_A - v_C = v_A - v_B + v_B - v_C = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2)i\,. \tag{4.13}$$

Deux résistances en série sont donc équivalentes à une seule résistance totale R_s

$$R_s = R_1 + R_2 \tag{4.14}$$

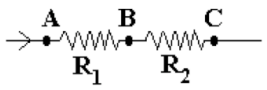

FIG. 4.3 – Deux résistances en série.

Soit maintenant deux résistances en parallèle. On doit avoir : $i = i_1 + i_2$ et $v_A - v_B = R_1 i_1 = R_2 i_2 = R_t i$. On en tire que :

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{ou} \quad R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\,. \tag{4.15}$$

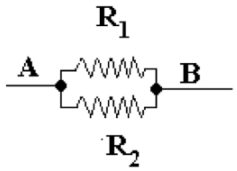

FIG. 4.4 – Deux résistances en parallèle.

Condensateurs. Soit deux condensateurs en série. On a alors $q_1 = q_2 = q$ car le point B est neutre, $v_1 = v_B - v_A = q/C_1$ pour le condensateur 1, et $v_2 = v_C - v_B = q/C_2$ pour le condensateur 2, d'où $v_1 + v_2 = v_C - v_A = q(1/C_1 + 1/C2)$. Pour la capacité totale C_s on a donc

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{ou} \quad C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\,. \tag{4.16}$$

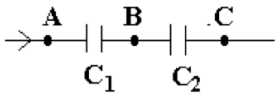

FIG. 4.5 – Deux capacités en série.

Par contre, si les deux condensateurs sont en parallèle, on doit avoir $q = q_1 + q_2$, mais aussi $v_B - v_A = q/C_1 = q/C_2$, d'où on obtient :

$$C_p = C_1 + C_2\,. \tag{4.17}$$

Inductances. Pour deux inductances en série ou en parallèle, le développement est similaire et on obtient

$$L_s = L_1 + L_2\,. \tag{4.18}$$

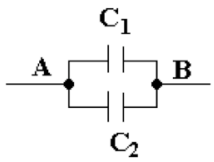

FIG. 4.6 – Deux capacités en parallèle.

et

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \text{ou} \quad L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}\,. \tag{4.19}$$

•*Exercice*

Montrer les relations précédentes.

•*Exercice*

Montrer que la chute de tension v_{R_2} aux bornes de la résistance R_2 pour le circuit en figure 4.7 (diviseur de potentiel) est donnée par $v_{R_2} = R_2 e/(R_1 + R_2)$.

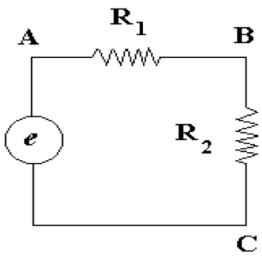

FIG. 4.7 – Circuit diviseur de potentiel.

4.1.4 Mise en équations : un exemple

Les relations entre courant et tension pour les éléments réactifs L et C font intervenir des dérivées ou des intégrales par rapport au temps. De ce fait, les équations d'un circuit comprenant de tels éléments seront intégro-différentielles. Une équation intégro-différentielle est une équation, dont l'inconnue est une fonction, et qui contient *dérivées et primitives* de cette fonction. Il est parfois utile de récrire l'équation comme une équation différentielle en choisissant comme fonction inconnue la primitive d'ordre plus élevée. Les méthodes que nous allons développer dans ce cours s'appliquent cependant aussi bien aux équations différentielles que intégro-différentielles, même si nous nous concentrerons sur le premier cas.

Exemple. Comme application des lois fondamentales, nous allons calculer l'état du circuit schématisé ci-dessus soumis à une excitation extérieure. Un générateur externe, que nous supposerons de résistance négligeable (si ce n'était pas le cas, il faudrait

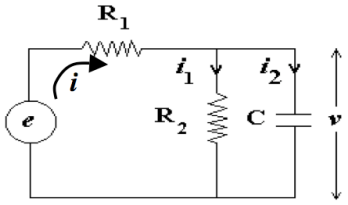

FIG. 4.8 – Exemple de circuit.

effectuer la transformation $R_1 \to R_1' = R_1 + R_g$, où R_g est la résistance interne du générateur), exerce une excitation.

La première loi de Kirchhoff s'écrit $i = i_1 + i_2$. Aux bornes de la capacité C, on a $v = q/C$ et $i/2 = Cdv/dt$. La loi d'Ohm pour la résistance R_2 s'écrit $v = R_2 i_2$ et la deuxième loi de Kirchhoff donne $e = R_1 i + v$. En combinant ces équations on trouve facilement

$$e(t) = R_1 C \frac{dv(t)}{dt} + \big(1 + \frac{R_1}{R_2}\big) v(t). \tag{4.20}$$

On a donc une équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène, où la tension appliquée e joue le rôle de l'excitation externe et $v(t)$ est la fonction inconnue à déterminer.

4.2 Analogie mécanique électrique

Dans le premier cours, nous avons pris comme modèle de système oscillant l'oscillateur mécanique forcé amorti, dont on rappelle l'EDL :

$$kx(t) + \gamma \dot{x}(t) + m\ddot{x}(t) = F(t)\,.$$

Nous allons voir que ce système a son analogue dans un circuit très étudié : le circuit RLC. Pour le voir, essayons de construire *formellement* un analogue électrique de l'oscillateur forcé. Notre analogue devra suivre la même équation différentielle.

Pour commencer, il nous faut un signal d'entrée, une sollicitation extérieure qui puisse mettre "en mouvement" le circuit. On devine que ce rôle sera joué par une tension appliquée en entrée du circuit, imposée de l'extérieur. Appelons $v_e(t)$ cette tension et supposons qu'elle joue le rôle de la force $F(t)$ dans le cas mécanique :

$$F(t) \leftrightarrow v_e(t)\,.$$

Comment procéder maintenant ? Cette tension est égale à la somme des chutes de tension sur les éléments du circuit (les impédances). Regardons alors l'équation différentielle : on voit que le terme extérieur doit être égal à la somme de trois termes : il pourrait donc s'agir des trois impédances en série, car dans ce cas les chutes de potentiel se somment. Quelles impédances ? Chaque terme de l'EDL contient une dérivée différente de la fonction inconnue $x(t)$. Nous venons de voir que pour les trois éléments passifs on

a

$$\begin{aligned} C \rightarrow \qquad & v_C = \tfrac{1}{C}\int i dt &&= \frac{1}{C}\, q \\ R \rightarrow \qquad & v_R = Ri &&= R\,\dot{q} \\ L \rightarrow \qquad & v_L = L\tfrac{di}{dt} &&= L\,\ddot{q}\,. \end{aligned}$$

Il semblerait donc que la variable analogue à la position x de l'oscillateur puisse être la charge q . En effet, c'est la charge électrique qui peut se déplacer et osciller dans un circuit électrique, suite à la sollicitation d'une tension appliquée. C'est donc une hypothèse raisonnable de prendre :

$$x(t) \leftrightarrow q(t)\,.$$

Peut-on mesurer cette charge ? Oui, s'il y a un condensateur dans le circuit, il suffit de mesurer la tension aux bornes du condensateur, car $v_C = q/C$. Si on prend comme tension de sortie $v_s(t) = v_C(t)$, on aura donc accès directement à la bonne grandeur, la fonction qu'on cherche à déterminer et qui est l'analogue de $x(t)$. Tentons le coup alors : qu'obtient-on en prenant le circuit RLC en figure 4.9 ?

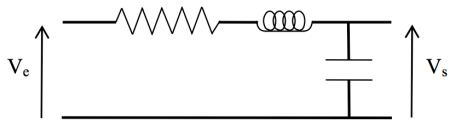

FIG. 4.9 – Le circuit RLC.

La loi des mailles donne $v_e = v_R + v_L + v_C$, d'où

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{C}\, q + R\,\dot{q} + L\,\ddot{q} = v_e(t) \\ \updownarrow \\ kx(t) + \gamma\dot{x}(t) + m\ddot{x}(t) = F(t)\ : \end{gathered} \tag{4.21}$$

On obtient bien la même EDL, et par conséquent, le même comportement pour le système ! Si v_e est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω, la charge q sur le condensateur oscille de manière sinusoïdale avec la même pulsation. Si on modifie $F(t)$ et $v_e(t)$, en prenant par exemple une fonction non périodique, la réponse changera, mais de la même manière pour les deux systèmes.

Regardons un peu plus en détail cette analogie. Quel est le rôle de chaque composant du circuit ? Par comparaison, on a

$$\begin{aligned} m &\leftrightarrow L \\ \gamma &\leftrightarrow R \\ k &\leftrightarrow \frac{1}{C}\,. \end{aligned}$$

- L'inductance L joue le rôle de la masse, c'est l'inertie du système. Plus L est grande, plus il est difficile de mettre en mouvement les charges (ou de les arrêter). C'est le phénomène d'induction qui fait qu'une variation de courant (= une accélération de la charge q) est freinée par effet de l'inductance.
- La résistance électrique R est l'élément dissipatif du circuit. C'est là que l'énergie est dissipée en chaleur par effet Joule[2]. De manière semblable à la dissipation mécanique dans un gaz, ce sont les collisions des charges sur les atomes du conducteur qui conduisent à cette dissipation.
- L'inverse de la capacité $1/C$ joue le rôle de la force de rappel. En effet, plus la capacité est élevée, plus on peut accumuler de charges sur les faces du condensateur à "effort" v_e égal, plus on peut s'éloigner de la position d'équilibre $q = 0$. La "force de rappel" du condensateur est donc petite dans ce cas, correspondant à une faible valeur de k pour le ressort.

Les choses commencent à être assez claires. On comprend pourquoi ces deux systèmes à première vue si différents se comportent de la même manière. Tous deux comportent un élément qui retient la variable en la limitant, de l'inertie et un élément dissipatif.

Une dernière précision doit être faite cependant pour uniformiser les notations. Comme nous l'avons vu, pour mesurer la charge q il faut passer par la mesure de la tension aux bornes de la capacité v_C. Il est donc pratique de récrire l'EDL (4.21) en termes de la tension mesurée en sortie $v_s = v_C = q/C$, ce qui donne

$$v_s(t) + RC\,\dot{v}_s(t) + LC\,\ddot{v}_s(t) = v_e(t)\,. \tag{4.22}$$

4.3 Notation complexe en électronique

4.3.1 Réponse du circuit RLC en régime harmonique

On appelle **régime harmonique** l'état d'un système soumis à une excitation sinusoïdale. D'après ce que nous venons de voir, la réponse du circuit RLC à une sollicitation sinusoïdale (en d'autres termes, son comportement en régime harmonique) est identique à ce que nous avons obtenu pour l'oscillateur mécanique. Par analogie, on obtient la *fonction de transfert* du circuit RLC : si $\tilde{v}_s(\omega)$ et $\tilde{v}_e(\omega)$ sont les amplitudes complexes en entrée et en sortie, définies comme au premier cours, nous obtenons

$$\frac{\tilde{v}_s(\omega)}{\tilde{v}_e(\omega)} = T(\omega) = \frac{1/LC}{1/LC - \omega^2 + i\omega R/L} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega R/L} \tag{4.23}$$

avec $w_0^2 = 1/LC$ la pulsation propre du circuit.

△*Une représentation interactive de la réponse d'un filtre RLC à une tension sinusoïdale et de la fonction de transfert correspondante peut être trouvée sur le site web "Figures animées pour la physique",*

http ://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/index.html .

Après avoir construit le circuit, on peut faire varier les valeurs des trois composants et visualiser soit les tensions en entrée et sortie, soit les module et phase de la fonction de transfert.

[2]La puissance dissipée dans une résistance est, en tension continue, $W = VI = RI^2 = V^2/R$.

4.3.2 Impédance complexe

Il sera utile, en conclusion de ce chapitre, de revenir sur la notation complexe et de préciser la manière dont elle est utilisée couramment en électronique pour l'étude des circuits en régime alternatif, c'est-à-dire soumis à une tension sinusoïdale. Nous avons déjà vu que toute fonction sinusoïdale peut être mathématiquement représentée par une exponentielle complexe, avec la convention que le signal mesurable correspond à la partie réelle de l'expression complexe : $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}(\tilde{x}(t))$ avec $\tilde{x}(t) = Ae^{i((\omega t+\varphi))}$. Nous savons aussi qu'un opérateur linéaire (addition, multiplication par une quantité indépendante du temps, différentiation ou intégration par rapport au temps, etc.) peut être appliqué à la représentation complexe d'un signal alternatif sans perdre la correspondance avec le signal mesurable.

Soit alors[3] $\mathrm{i}(t) = I\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}(\tilde{\mathrm{i}})$ le courant circulant dans un élément de circuit de bornes A et B et $v = v_A - v_B$ la chute de tension aux bornes de l'élément. Dans le cas des trois éléments de circuits que nous avons considérés, la résistance, le condensateur ou l'inductance, i et v sont reliés par une relation linéaire.

Ainsi, dans le cas d'une **résistance**, on a

$$\mathrm{Re}(\tilde{v}) = v = R\mathrm{i} = RI\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}(R\tilde{\mathrm{i}}) \tag{4.24}$$

et donc :

$$\tilde{v} = R\tilde{\mathrm{i}}\,. \tag{4.25}$$

Si l'élément du circuit est un **condensateur**, on a

$$\mathrm{Re}(\tilde{\mathrm{i}}) = \mathrm{i} = C\frac{dv}{dt} = \mathrm{Re}(C\frac{d\tilde{v}}{dt}) = \mathrm{Re}(C\,i\omega\tilde{v}) \tag{4.26}$$

d'où

$$\tilde{v} = \frac{1}{i\omega C}\tilde{\mathrm{i}}\,. \tag{4.27}$$

Finalement, dans le cas d'une **inductance**,

$$\mathrm{Re}(\tilde{v}) = v = L\frac{d\mathrm{i}}{dt} = \mathrm{Re}(L\frac{d\tilde{\mathrm{i}}}{dt}) = \mathrm{Re}(L\,i\omega\tilde{\mathrm{i}}) \tag{4.28}$$

ce qui implique que

$$\tilde{v} = i\omega L\tilde{\mathrm{i}}\,. \tag{4.29}$$

Remarquons que, comme la partie oscillante des fonctions complexes considérées ici est toujours égale à $\exp(i\omega t)$, les relations précédentes sont aussi valables pour les amplitudes complexes de courant et tensions :

$$\hat{v} = R\hat{\mathrm{i}}\,, \tag{4.30}$$

$$\hat{v} = \frac{1}{i\omega C}\hat{\mathrm{i}}\,, \tag{4.31}$$

$$\hat{v} = i\omega L\hat{\mathrm{i}}\,. \tag{4.32}$$

[3]Rappelons que nous avons choisi d'indiquer, pour toute fonction sinusoïdale $x(t)$, avec $\tilde{x}$ la fonction complexe oscillante dont $x(t)$ est la partie réelle, et avec $\hat{x}$ son amplitude : $\tilde{x} = \hat{x}\exp(i\omega t)$.

On est ainsi amené à introduire la notion d'impédance complexe Z, définie par la relation :

$$\tilde{v} = Z(\omega)\,\tilde{\imath} \tag{4.33}$$

ou, de manière équivalente,

$$\hat{v} = Z(\omega)\,\hat{\imath}\,. \tag{4.34}$$

Nous avons déjà assez d'expérience dans l'étude des systèmes linéaires pour interpréter l'impédance complexe dans les termes que nous avons utilisé dans les paragraphes précédentes : on peut dire que l'impédance complexe est la fonction de transfert associée à chaque élément de circuit, permettant de déterminer l'amplitude (complexe) de la réponse de cet élément (la tension v) pour une sollicitation (le courant i) sinusoïdal *de pulsation* ω.

Les expressions de Z pour les différents éléments de circuit sont donc

Résistance	$Z_R(\omega) = R$
Condensateur	$Z_C(\omega) = 1/i\omega C$
Inductance	$Z_L(\omega) = i\omega L$

L'introduction des impédances complexes des trois éléments de base (résistance, capacitance et inductance) permet de simplifier la résolution de l'état d'un circuit en régime alternatif. En effet, les impédances complexes des divers éléments d'un circuit se combinent de la même façon que si ces éléments étaient des résistances pures. Pour deux éléments quelconques en série,

$$Z_s = Z_1 + Z_2\,, \tag{4.35}$$

tandis que pour deux éléments en parallèle,

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\,. \tag{4.36}$$

Attention cependant à ne pas oublier que les relations simples (4.24), (4.26) et (4.28) ne sont valables que pour une excitation sinusoïdale ! Cependant, les résultats valables pour des signaux sinusoïdaux permettent en réalité d'aborder le cas de signaux périodiques plus complexes, grâce à une décomposition astucieuse, comme nous le verrons au chapitre 5.