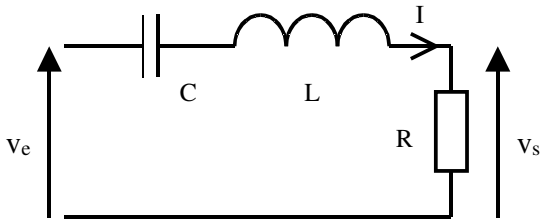
Contrôle de Mesures Physiques, 8 novembre 2005.

Durée: 2 heures.

Aucun document autorisé. Téléphones portables éteints.
Calculatrice type collège, non graphiques et non programmable autorisée.

1) Etude d'un circuit électronique

a. Déterminez l'expression de la transmittance du circuit CLR représenté ci-dessous. On notera $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $\xi = RC\omega_0/2$.
b. Evaluez le module de la transmittance pour $\omega \to 0$, $\omega \to \omega_0$ et $\omega \to \infty$.
c. Tracez le module de la transmittance en fonction de ω.



2) Série de Fourier

Soit le signal sinusoïdal $x(t) = x_0 \sin(\omega t + \phi)$.

a. Calculer son développement en série de Fourier sur la base des fonctions $f_n = \exp(j\omega t)$.
b. Représenter son spectre c_n (module et phase).
c. Calculer la puissance moyenne de $x(t)$, $P(x) = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt$, en utilisant le théorème de Parseval.

3) Solution d'équations différentielles par transformée de Laplace

Dans la suite des deux réactions chimiques du premier ordre

$$A \xrightarrow{k1} B \xrightarrow{k2} C,$$

l'espèce A se décompose en produisant l'espèce B avec une constante de vitesse k_1 ; ensuite, B donne C avec constante de vitesse k_2. On se limitera au cas où $k_1 \neq k_2$.

Une certaine quantité de A est dissoute très rapidement dans un solvant, initialement pur, à l'instant $t=0$: on peut donc assumer comme conditions initiales que :

- les trois concentrations sont nulles à $t<0$
- en $t=0$, la concentration de A passe à la valeur A_0, les autres restent zéro.

On se propose d'étudier l'évolution dans le temps des concentrations des trois espèces, que l'on note respectivement $a(t) = [A]$, $b(t) = [B]$ et $c(t) = [C]$.

1. La vitesse à la quelle l'espèce A diminue est simplement proportionnelle à sa concentration. On peut donc établir une équation différentielle simple :

$$\frac{da(t)}{dt} = -k_1 a(t)$$

Montrer explicitement, *par intégration directe*, que la solution $a(t)$ de l'équation différentielle précédente, avec les conditions initiales données, est $a(t) = A_0 \exp\{-k_1 t\}\Gamma(t)$.

2. On s'intéresse maintenant à l'espèce B. La concentration de cette espèce chimique est incrémentée par la décomposition de A, et diminuée par la transformation de B en C : l'équation différentielle qui régie l'évolution de $b(t)$ est donc

$$\frac{db(t)}{dt} = k_1 a(t) - k_2 b(t)$$

a. Identifier le "signal d"entrée" ou sollicitation, et le "signal de sortie" ou réponse du système. Séparer les termes correspondants dans à l'équation différentielle et en déduire la transmittance *H(p)* associée.
b. Déterminer alors, en utilisant la TL, la concentration $b(t)$ de l'espèce B, en utilisant la loi d'évolution $a(t)$ déterminée à la question précédente.

3. On s'intéresse maintenant à l'espèce C.

a. Quelle est l'équation différentielle qui régie l'évolution de sa concentration $c(t)$? Quels sont les signaux d'entrée et de sortie? Que vaut la transmittance *H(p)*?
b. Déterminer $c(t)$, en utilisant encore la TL et les résultats de la question 2.

4. Tracer sur un même graphe $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ afin de vérifier que la solution trouvée est physiquement raisonnable (on pourra éventuellement choisir k_1=2, k_2=1 pour le graphe).