

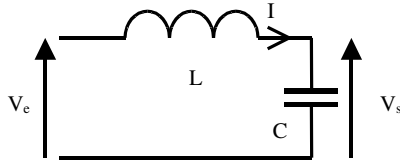
Examen de Mesures Physiques, 3 septembre 2004.

Tous documents autorisés.

Le sujet comporte deux problèmes indépendants (sur 2 pages).

I. Analyse d'un système linéaire

Soit le circuit LC représenté ci-dessous :



- 1) Exprimer l'équation différentielle liant $V_e(t)$ à $I(t)$.
- 2) Donner l'équation différentielle analogue pour un système mécanique, en notant F la force appliquée et x le déplacement de la masse ponctuelle m (on introduira d'autres éléments mécaniques si besoin).
- 3) Exprimer l'équation différentielle liant $V_s(t)$ à $V_e(t)$ pour le circuit LC étudié ici.
- 4) Exprimer la transformée de Laplace de cette dernière équation différentielle et en déduire la transmittance $H(p)$ du système. On fera apparaître la pulsation caractéristique $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
- 5) Tracer la réponse fréquentielle du système : on tracera simplement le module de $H(\omega)$, avec $H(\omega) = H(p)|_{p=j\omega}$.
- 6) Comment se comporte le système pour différentes pulsations appliquées ω_a :
a. $\omega_a \ll \omega_0$ b. $\omega_a \gg \omega_0$ c. $\omega_a \sim \omega_0$
- 7) Comment se comporte le système lorsqu'on applique un signal non harmonique (distinguer plusieurs cas) ?
- 8) Comment se comporte le système lorsqu'on applique un bruit blanc ?
- 9) Donner l'expression (sans faire de calcul) de la réponse impulsionnelle de ce système et tracer cette réponse.
- 10) Conclure sur la stabilité du système au vu de sa réponse impulsionnelle.

Tournez la page, svp.

II. Echantillonnage d'un signal

- 1) Dans cette première partie on considère un signal réel dont le spectre est $X(f) = \frac{j}{f}$ avec $j^2 = -1$ et $f = \omega/2\pi$ la fréquence. NB : le spectre est imaginaire pur et $X(f)$ est une fonction impaire de la fréquence : $X(-f) = -X(f)$.
 - a. Tracer le spectre : module et phase de $X(f)$.
 - b. On échantillonne le signal avec une fréquence d'échantillonnage f_e . Donner l'expression du spectre du signal échantillonné : $\hat{X}(f)$ en fonction de $X(f)$. NB : on ne demande pas de calculer explicitement $\hat{X}(f)$.
 - c. Tracer le spectre du signal échantillonné (on tracera simplement la partie imaginaire, puisque la partie réelle de $X(f)$ est nulle).
 - d. Montrer que l'influence du repliement de spectre est maximale pour la fréquence $f = f_e/2$.
 - e. Exprimer ce que vaut $\hat{X}(f_e/2)$ dans le cas du signal considéré ici.

- 2) On considère maintenant le cas particulier d'un signal carré, périodique de période T : $x(t) = 1$ pour $t \in [0, T/2]$ et -1 pour $t \in [T/2, T]$. Ce signal a un spectre discret, donné par les coefficients complexes de la série de Fourier : c_n . Pour faire le lien avec la 1^{ère} partie on pourra noter son spectre $X(f)$, avec f défini uniquement pour les valeurs particulières $f_n = n \times f_0$ où $f_0 = 1/T$ est la fréquence fondamentale.
 - a. Le signal $x(t)$ étant réel et impair, quelles propriétés a-t-on pour les c_n ?
 - b. Donner l'expression générale des c_n et les valeurs particulières pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = -1$.
 - c. Représenter le spectre du signal en module et phase.
 - d. On échantillonne le signal avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 8f_0$. Cette fréquence vous paraît-elle correcte ? (vérifie-t-elle la condition d'échantillonnage de Shannon ?).
 - e. Evaluer l'erreur introduite par le repliement de spectre sur le terme à $f = 7f_0$: on prendra en compte le repliement des spectres décalés de $\pm f_e$ et de $\pm 2f_e$.
 - f. Tracer le spectre du signal ainsi échantillonné.