

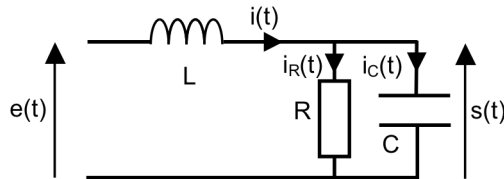
Examen du 12 janvier 2009.

Durée : 2h.

Aucun document autorisé sauf le formulaire des TF/TL fourni. Téléphones portables éteints.
Calculatrices type collège, non graphiques et non programmables autorisées.

Exercice 1. Filtre.

Considérer le circuit suivant :



- Ecrire l'équation différentielle qui relie la tension de sortie $s(t)$ à la tension d'entrée $e(t)$.
- En déduire la transmittance du circuit $T(\omega)$. Testez les cas limites pour $V_s(\omega)$ lorsque $\omega \rightarrow 0$ et ∞ . De quel type de filtre s'agit ? Comment évolue l'amplitude de $V_s(\omega)$ pour ω grand ?
- Déterminer, en fonction des valeurs des composants, les deux paramètres ω_0 (pulsation propre du circuit) et ξ (amortissement) permettant d'exprimer la transmittance sous la forme suivante : $T(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}$.
- Montrer que $|T(\omega)|$ peut avoir un maximum et déterminer la pulsation de résonance ω_R correspondante. Préciser dans quelles conditions ce maximum peut avoir lieu.
- Tracer $|T(\omega)|$ pour différentes valeurs de ξ en utilisant les résultats de la question précédente.

Exercice 2. Signaux aléatoires.

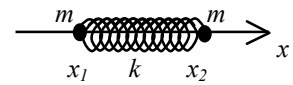
- Le signal aléatoire $x(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance (DSP) constante et égale à γ . Exprimer et tracer la fonction d'auto-corrélation $\psi_{xx}(t)$. Tracer $S_{xx}(f)$, la DSP de $x(t)$ en fonction de la fréquence f . Que vaut σ_x^2 , la variance de $x(t)$?
- On considère un filtre passe-bas idéal, caractérisé par sa transmittance $H(f)$:

$$H(f) = 1 \quad \text{pour } f < f_0 \quad \text{et}$$

$$H(f) = 0 \quad \text{pour } f > f_0.$$
 Le filtre est utilisé pour filtrer le signal $x(t)$. On appellera $y(t)$ le signal filtré. Comment exprime-t-on la DSP $S_{yy}(f)$ du signal filtré en fonction des propriétés de $x(t)$ et de celles du filtre ? Tracer $S_{yy}(f)$.
- En déduire $\psi_{yy}(t)$ et la tracer.
- Calculer la variance de $y(t)$, σ_y^2 , en fonction des paramètres donnés.

Exercice 3. Molécule diatomique.

On s'intéresse à la vibration d'une molécule diatomique. Les deux atomes qui composent la molécule, identiques et de masse m , sont reliés par une force qu'on peut approcher, si on se limite au cas de petites oscillations, par une *force élastique* (voir figure). On note x_1 et x_2 les positions des deux atomes le long de l'axe reliant leurs centres. Pour simplifier le problème, on considère que les deux atomes occupent à l'équilibre un même site d'abscisse $x_2 = x_1$. Dès qu'ils s'en éloignent, ils ressentent une force de rappel élastique de $k(x_2 - x_1)$. En plus de la force élastique, les deux atomes sont soumis à une *force de frottement*, de coefficient γ .



- Écrire les deux équations différentielles couplées en x_1 et x_2 décrivant le mouvement des deux atomes, puis montrer que ces deux équations conduisent à l'équation différentielle $m\ddot{y} + \gamma\dot{y} + 2ky = 0$ par le changement de variable $y = x_2 - x_1$.
- À l'instant $t=0$, la molécule reçoit un choc qui met en mouvement relatif les deux atomes tel que $y(0) = x_2(0) - x_1(0) = 0$, $\dot{y}(0) = \dot{x}_2(0) - \dot{x}_1(0) = V$. Résoudre l'équation différentielle en utilisant la transformée de Laplace, pour ces conditions initiales.
- Tracer la solution $y(t)$ obtenue pour deux valeurs significatives de γ et vérifier la solution d'un point de vue physique.

Exercice 4. Echantillonnage

- Rappeler l'expression du spectre du signal $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ de durée infinie et celui du même signal limité à une durée T_e : $x(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot \text{Rect}(t/(T_e/2))$.
- Tracer, sur une même figure, le spectre dans le cas du signal de durée infinie et celui dans le cas de durée finie en indiquant, pour ce dernier, la position des zéros des lobes secondaires.
- Calculer les valeurs du pas d'échantillonnage Δt et de la fréquence d'échantillonnage f_e pour un échantillonnage à 20 points / période du signal.
- Calculer le nombre de points N nécessaire pour mesurer 10 périodes. Calculer la durée T_e correspondant à ce nombre de points. Calculer le pas en fréquence Δf pour un tel échantillonnage.
- Tracer soigneusement, sur la même figure de la question **b**, le spectre du signal ainsi échantillonné, tel qu'on l'obtiendrait par FFT. Expliquer la forme du spectre obtenu.