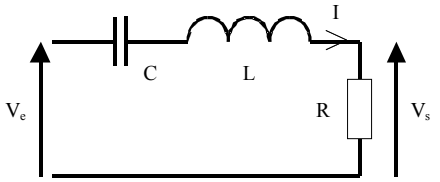
LP342 MESURES PHYSIQUES
Examen du 24 juin 2008

Aucun document autorisé. Téléphones portables éteints.
Calculatrices type collège, non graphiques et non programmable autorisées.

Exercice 1. Circuit CLR en régime harmonique

Soit le circuit CLR série suivant :



1. Donnez la relation liant $Vs(\omega)$ à $Ve(\omega)$ en fonction des impédances complexes des composants.
2. Exprimez la transmittance $T(\omega)$ du circuit en fonction de la pulsation propre $\omega_0=1/\sqrt{LC}$ et du coefficient de qualité $Q=1/(\omega_0 RC)$.
3. Testez les cas limites pour $Vs(\omega)$ lorsque $\omega \to 0$, $+\infty$ et $\omega = \omega_0$. De quel type de filtre s'agit-il ?
4. Vérifiez que pour $\omega = \omega_0$ il existe une résonance dans le circuit (résonance d'intensité) pour laquelle le module de la transmittance est maximum.
5. Tracez le diagramme de Bode du filtre (module et phase).

Exercice 2. Radioactivité.

La radioactivité est le phénomène naturel au cours duquel des noyaux atomiques instables se désintègrent en dégageant de l'énergie sous forme de rayonnements divers, pour se transformer en des noyaux atomiques plus stables.

Soit l'isotope 1 qui se transforme en isotope 2 selon une constante radioactive λ_1. L'isotope 2 décroît selon la constante radioactive λ_2, donnant lieu à une forme stable. La décroissance de l'isotope 1 n'est pas influencée par l'isotope 2. Par contre, la quantité d'isotope 2 au temps t dépend de la quantité d'isotope 1 à l'origine et des deux constantes radioactives λ_1 et λ_2.

Si $N_1(t)$ et $N_2(t)$ sont les quantités d'isotopes 1 et 2 au temps t, on a donc :

$dN_1/dt = -\lambda_1 N_1$,

$dN_2/dt = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$.

1. Montrer que la solution de la première équation peut s'écrire comme $N_1(t)= N_1(0)\, exp(-\lambda_1 t)\, \Gamma(t)$.
2. En considérant $N_1(t)$ comme signal d'entrée et $N_2(t)$ comme signal de sortie, appliquer la transformée de Laplace pour déterminer la transmittance $H(p)$ du système.
3. Déterminer l'évolution dans le temps de N_2 pour le $N_1(t)$ trouvé à la première question.
4. La demi-vie d'un élément radioactif c'est la temps que ça prend pour que la moitié de ses atomes se désintègrent -- et se transforment en quelque chose d'autre. Le tableau ci-dessous énumère, dans leur ordre d'apparition, tous les produits de désintégration de l'Uranium-238, avec leur demi-vie. L'Uranium-238 a une demi-vie de 4.5 milliard d'années, alors que ses premiers produits de désintégration ont des demi-vies beaucoup plus courtes.
   La constante radioactive λ_1 de l'Uranium-238 (isotope 1) est donc très inférieure à la constante radioactive λ_2 d'un de ses produits, par exemple l'Uranium 234 (isotope 2). Montrer qu'un *équilibre séculaire* est observé pour $t \to +\infty$: la quantité de l'isotope 2 décroît selon la même constante radioactive λ_1 de l'isotope 1.
5. Tracer $N_1(t)$ et $N_2(t)$ pour ce dernier cas.

[redacted]

Exercice 3. Echantillonnage d'un signal rectangulaire.

On considère le signal rectangulaire $x(t) = \mathrm{Rect}(t/a)$ égal à 1 pour $-a/2 \le t \le a/2$, zéro ailleurs.

1. Tracer le signal et le module de sa transformée de Fourier en fonction de la fréquence $f = \omega/2\pi$. Déterminez l'expression des zéros f_k du spectre.
2. Le signal est échantillonné avec un pas temporel $\Delta t = a/10$ et sur une durée de $T_e = 4a$. Calculer la fréquence d'échantillonnage f_e, la résolution en fréquence Δf et le nombre de points N (pour une analyse par FFT).
3. Tracer le signal échantillonné et son spectre discret (obtenu par FFT).
4. Qu'est-ce qu'on aurait trouvé avec un pas d'échantillonnage $\Delta t = a/4$ et la même durée T_e ? La fréquence d'échantillonnage et la résolution en fréquence ont changé ? Tracer un schéma indicatif.

Exercice 4. Signal déterministe plus bruit.

1. Rappeler la définition de bruit blanc $b(t)$ de densité spectrale de puissance $\gamma_b/2$: donner sa moyenne, l'expression de sa fonction d'auto-corrélation $\varphi_{bb}(\tau)$ et celle de sa DSP $S_{bb}(f)$.
2. Soit $x(t)$ un signal rectangulaire de durée T : $x(t) = C\ Rect(t/T)$. Déterminer sa transformée de Fourier $X(f)$. En déduire sa DSP, qu'on identifiera au module carré de sa transformée de Fourier : $S_{xx}(f)=|X(f)|^2$.
3. Montrer que la fonction d'auto-corrélation de $x(t)$ est $\varphi_{xx}(\tau) = C^2\ Tri(t/2T)$ (**question bonus**).
4. Le signal $x(t)$ est transmis via une chaîne électronique qui produit du bruit *indépendant* de $x(t)$. On caracterise ce bruit par la fonction $b(t)$. On mesure en sortie $y(t) = x(t)+b(t)$. Déterminer et tracer la fonction d'auto-corrélation $\varphi_{yy}(\tau)$ et la DSP $S_{yy}(f)$ du signal mesuré.