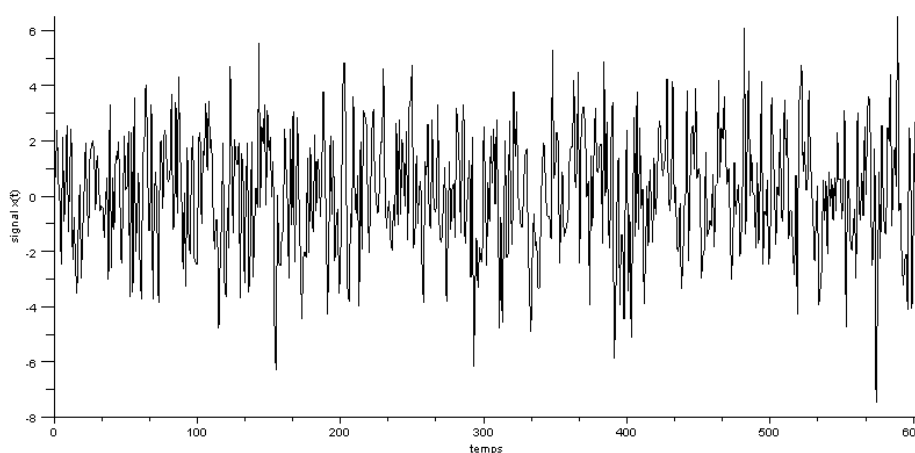


Evaluation Continue n°3 – 8 décembre 2009

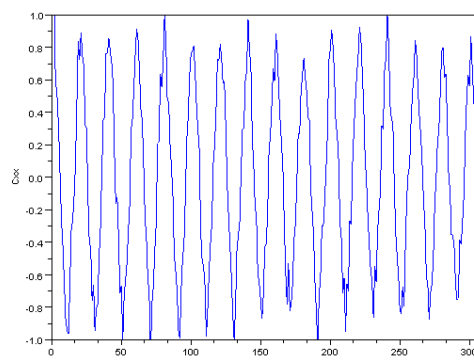
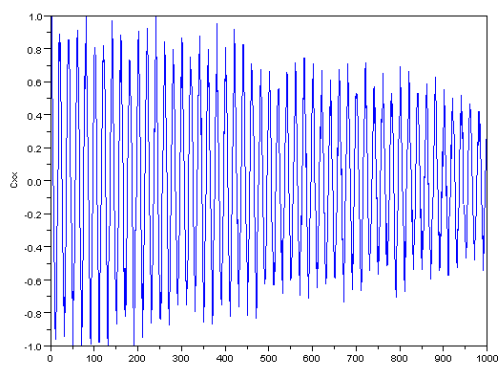
*Documents et calculatrices interdits. Téléphones portables éteints.
Vous trouverez un dictionnaire des TF et TL en annexe.*

I. Analyse d'un signal

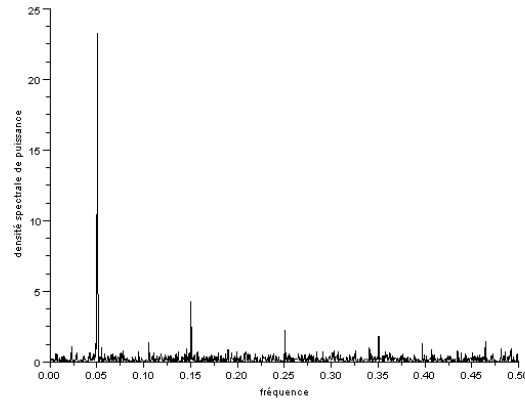
On considère le signal présenté en fonction du temps sur la figure 1.



1. Que peut-on dire de ce signal à première vue ? Semble-t-il stationnaire ? quel calcul proposez vous de faire pour le vérifier, sachant qu'on connaît le signal sur un nombre de points $N = 2048$ avec un temps d'échantillonnage d'une seconde.
2. Pour explorer plus avant ce signal on calcule sa fonction d'auto-corrélation $C_{xx}(\tau)$, tracée sur la figure 2 (à gauche elle est tracée sur un temps long, à droite on a fait un zoom jusqu'à $\tau = 300$)



- 2.1 Quelle première conclusion pouvez-vous tirer de ce résultat sur la structure réelle du signal x ?
- 2.2 Comment interprétez-vous la décroissance globale observée sur la figure de gauche ?
- 2.3 Quelles investigations supplémentaires proposez-vous ?
3. On veut calculer le spectre de ce signal, expliquez les deux calculs qui sont possibles pour l'obtenir. On trace le spectre obtenu sur la figure 3.



- 3.1 Décrire le spectre et identifier les pics. On appellera f_0 la fréquence 0,05 Hz.
- 3.2 On définit le signal $s(t)$, créneau oscillant entre -1 et +1 à la période T . Tracer $s(t)$.
- 3.3 Calculer la série de Fourier de $s(t)$. En déduire l'allure du spectre de $s(t)$.
- 3.4 Que peut-on en conclure sur la structure réelle du signal $x(t)$. Calculer la période T , comparer aux résultats obtenus à la question 2. Vérifier que l'intensité des pics observés sur la figure correspond à ce qui est attendu.

II. Pandémie

Cet exercice est une modélisation simple de la propagation de la grippe au sein de la population d'un pays. Cette maladie contagieuse apparaît suite à l'arrivée d'individus malades dans ce pays. On note $e(t)$ le nombre de malades de la grippe entrant dans ce pays par unité de temps. Le nombre de malades dans le pays à l'instant t est $n(t)$ et on note c et g les taux de contamination et de guérison respectivement.

- 1 L'équation différentielle qui régit l'évolution du nombre de malades est :

$$\frac{dn(t)}{dt} = c n(t) - g n(t) + e(t)$$

Justifier cette équation et indiquer les dimensions des constantes c et g ?

2. On examine tout d'abord le cas où le pays, initialement sans habitants malades, est infecté à un instant donné, pris comme origine des temps, par un nombre limité E de malades entrant. La fonction $e(t)$ peut alors s'écrire $e(t) = E \delta(t)$.

- 2.1 Ecrire la transformée de Laplace (TL) de l'équation différentielle obtenue dans ce cas. On notera par des majuscules les transformées des fonctions définies précédemment.
- 2.2 En déduire l'expression de la TL $N(p)$.
- 2.3 Par TL inverse, déterminer $n(t)$.
- 2.4 Tracer sur un même graphe les fonctions $n(t)$ obtenues pour les cas $c > g$ et $c < g$ et commenter les allures observées en les justifiant physiquement.
- 2.5 Comment définiriez vous la transmittance $H(p)$ associée à ce problème ? (Justifier la réponse).

3. On examine maintenant le cas où l'afflux de personnes malades dans ce pays, initialement sans habitants malades, est globalement constant au cours du temps et vaut F à partir d'un instant initial, pris comme origine des temps. La fonction qui décrit $e(t)$ peut alors s'exprimer: $e(t) = F I(t)$. On supposera en outre que $c < g$.

- 3.1 Ecrire la TL de l'équation différentielle dans ce nouveau cas.
- 3.2 Exprimer la nouvelle fonction $N(p)$.
- 3.3 En déduire par TL inverse l'expression de $n(t)$.
- 3.4 Tracer sur un même graphe $e(t)$ et $n(t)$.

- 3.5 Montrer que le nombre d'habitants malades converge vers une limite que l'on exprimera en fonction des constantes du problème.
- 3.6 Indiquer dans quels cas cette limite est inférieure (ou supérieure) au nombre de malades initial et commenter.

III. Résolution d'équation différentielle par Transformation de Laplace

Soit une fonction $f(x)$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

- 1.1 Exprimer la TL de $f'(x)$: $TL[f'](p)$ en fonction de la TL de f : $TL[f](p) = F(p)$ et de $f(0)$.
- 1.2 Exprimer la TL de $f''(x)$: $TL[f''](p)$ en fonction de la TL $f](p)$, de $f'(0)$ et de $f(0)$.
2. Déterminer par TL la fonction $f(x)$ solution de $f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0$ et qui vérifie $f'(0) = f(0) = 1$
3. Tracer la courbe $f(x)$ en fonction de x .