L3 – Physique – parcours PSVP
LP 342 – Mesures Physiques
Année 2007-2008

Evaluation Continue n°3 – 22 mai 2008

Documents et calculatrices interdits. Téléphones portables éteints.
Formulaire des TL et TF distribué en cours autorisé.

Exercice 1. Résolution d'équation différentielle par TL

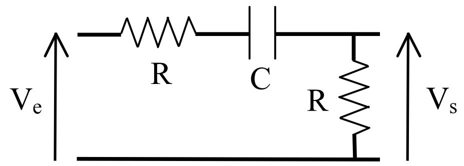
On veut étudier le mouvement d'un projectile immergé dans un liquide, selon une direction qu'on choisira comme axe (Ox). Le long de cet axe, la position du projectile est repérée par $x(t)$ et le projectile n'est soumis à aucune autre force que le frottement visqueux du liquide : $F_v = -\gamma\, \dot{x}(t)$ où γ est une constante.
A l'instant initial $t = 0$, la position de l'objet est $x(0) = x_0$, et sa vitesse $\dot{x}(0) = v_0$.

- **a.** Montrez que l'équation différentielle qui décrit la dynamique du projectile peut s'écrire comme $\ddot{x}(t) + a\, \dot{x}(t) = 0$ et déterminez la constante a.
- **b.** En appliquant deux fois la propriété des transformées de Laplace des dérivées au sens des fonctions, $TL[\dot{x}] = pTL[x] - x(0+)$, donnez une expression générale pour la TL de la dérivée seconde $TL[\ddot{x}]$.
- **c.** On recherche la solution $x(t)$ de l'équation différentielle déterminée à la question **a**. Utilisez le résultat précédent pour déterminer une expression générale de la transformée de Laplace $X_L(p)$ de $x(t)$, en fonction des conditions initiales et des paramètres du problème.
- **d.** On simplifie le problème en choisissant comme origine de l'axe la position initiale : $x(0) = x_0 = 0$. Déterminez alors la solution $x(t)$. En étudier les limites pour $t = 0$ et $t \to \infty$, puis tracer $x(t)$ pour deux valeurs différentes de γ.

- **e.** Une possibilité alternative pour résoudre le même problème est de considérer comme variable principale la vitesse $v(t) = \dot{x}(t)$ plutôt que la position $x(t)$. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par $v(t)$?
- **f.** Résoudre cette équation différentielle et déterminer $v(t)$ par TL, toujours avec la condition initiale $v(0) = v_0$. Tracer $v(t)$.
- **g.** Vérifiez la cohérence des résultats obtenus aux questions **d** et **f**.

Exercice 2. Transmittance et TL

Le circuit représenté ci-après est utilisé comme filtre. Il est composé de deux résistances R identiques et d'un condensateur C en série. On note respectivement V_e et V_s les tensions d'entrée et de sortie.



a. Etablir l'équation différentielle reliant les tensions $V_e(t)$ et $V_s(t)$.

b. Exprimez la transmittante H(p) de ce filtre par transformée de Laplace.

c. Réponse indicielle : Déterminez la réponse de ce filtre à une tension d'entrée de la forme : $V_e(t)=V_0.\Gamma(t)$.

d. Réponse impulsionelle : Déterminez la réponse de ce filtre à une tension d'entrée de la forme : $V_e(t)=V_0.\delta(t)$.

Exercice 3. Signaux aléatoires

On assimile un signal b(t) à un bruit blanc

a. Ecrire la relation entre la densité spectrale de puissance (DSP) notée $S_{bb}(\nu)$ de b(t) et sa fonction d'autocorrélation: $\varphi_{bb}(\tau)$.

b. La DSP de b(t) est constante égale à $\gamma_b/2$. Déterminez $\varphi_{bb}(\tau)$ et la tracer.

c. Que vaut la variance ? Justifiez votre réponse.

Le signal b(t) est appliqué à l'entrée d'un filtre caractérisé par une réponse impulsionnelle $h(t) = 2m.\mathrm{sinc}(2\pi m.t)$ (où m désigne une constante). Le signal en sortie du filtre est $x(t)=b(t)*h(t)$.

d. Déterminez la transmittance $H(\nu)$ du filtre.

e. Déterminez la DSP du signal filtré : $S_{xx}(\nu)$ et la tracer.

f. En déduire la fonction d'autocorrélation du signal filtré : $\varphi_{xx}(\tau)$ et la tracer.

g. Déterminez la variance du signal filtré et commentez sa valeur par rapport à celle de b(t).