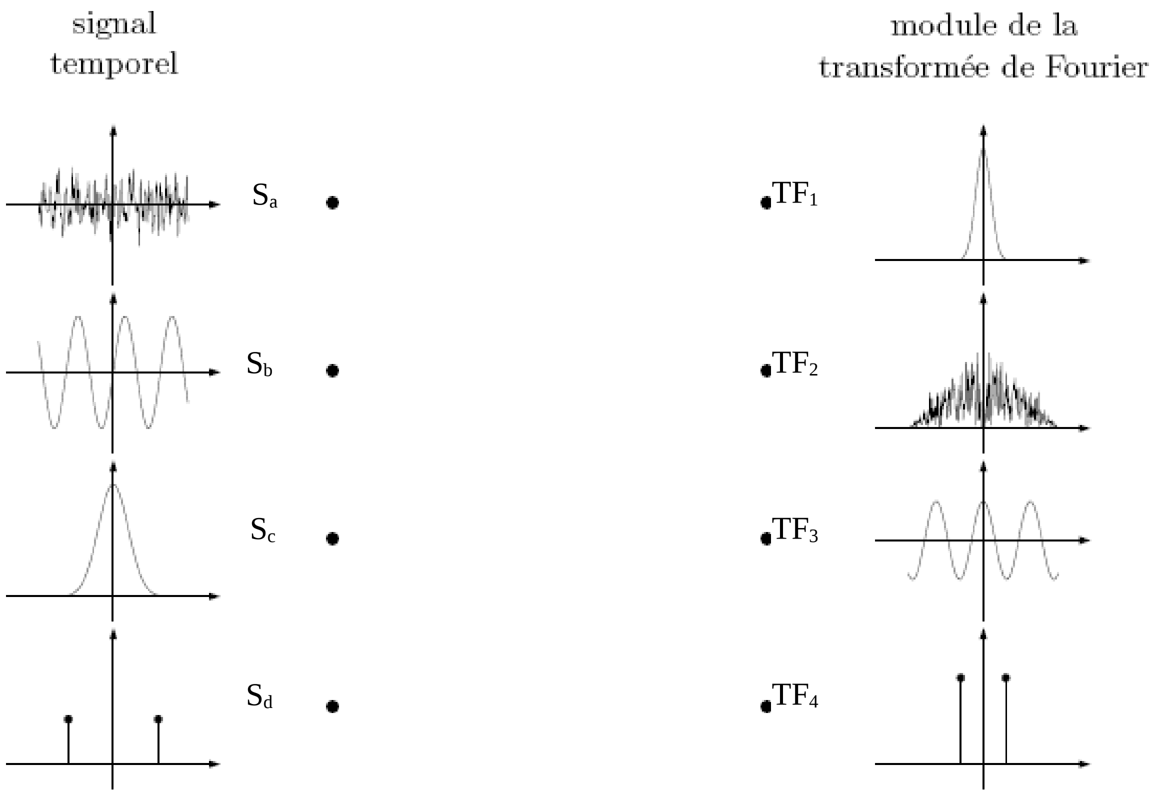
L3 – Physique – parcours PSVP
LP 342 – Mesures Physiques
Année 2008-2009

Evaluation Continue n°2 – 25 novembre 2008

Documents et calculatrices interdits. Dictionnaire des TL-TF autorisé.

Exercice 1. Transformée de Fourier

Ci-dessous sont représentés quatre signaux temporels notés S_a, S_b, S_c et S_d et les quatre spectres en module de leur transformée de Fourier : TF_1, TF_2, TF_3 et TF_4. Etablissez, en les justifiant, les correspondances entre chacun des signaux et ces spectres.



Exercice 2. Transformée de Fourier et échantillonnage

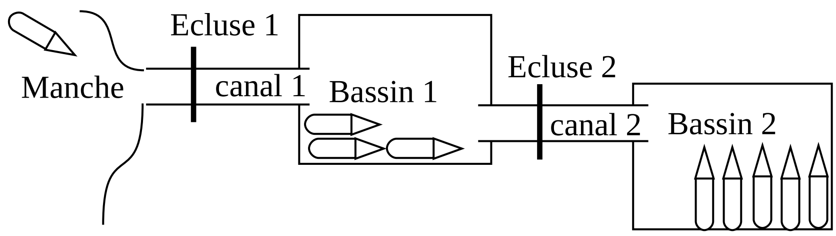
Un pendule de torsion non linéaire, excité par des oscillations de faible amplitude, oscille de manière bi-périodique : l'angle de torsion est donné par:

$$x(t) = a.\cos(\omega_0.t) + b.\sin(2\omega_0.t), \text{ avec } b<a.$$

1. Que vaut la période T du signal x(t) ?
2. Tracez |X(f)|, le spectre du signal x(t) obtenu par TF, en fonction de la fréquence f.
3. On mesure ce signal pendant une durée T_e égale à 5 périodes. Tracez le spectre |X(f)| obtenu dans ces conditions, en indiquant sur le graphe les valeurs remarquables.
4. On souhaite échantillonner le signal ainsi mesuré afin de le traiter numériquement. Quel pas d'échantillonnage dt faut il choisir pour que le spectre obtenu permette de retrouver les deux contributions sinusoïdales au signal ?

Exercice 3. Le port d'Honfleur

On s'intéresse à l'évolution temporelle de la hauteur d'eau dans deux bassins d'un port de la Manche du type d'Honfleur. Les bassins communiquent entre eux et avec la mer par l'intermédiaire de deux canaux comportant des écluses qui retiennent l'eau (lorsqu'elles sont fermées) afin que les bateaux puissent rester à flot en permanence, que la marée soit haute ou basse. Le schéma ci-après représente une vue du dessus du port.



On notera z la hauteur d'eau à l'extérieur du port, dans la mer, et h_1 et h_2 les hauteurs d'eau dans les bassins 1 et 2 respectivement.

Dans cette première partie, l'écluse 2 reste fermée. Le bassin 1 communique seulement avec la mer.

A. Lâché d'eau.

A un instant t=0, l'écluse 1 est brutalement ouverte alors que h_1 est inférieure à z la hauteur d'eau à l'extérieur du port, supposée constante et égale à z_0. Pour simplifier le problème, on supposera que $h_1(t=0)=0$ et donc $z(t)=z_0.\Gamma(t)$ avec $z_0>0$.

La masse d'eau dm rentrant depuis la mer dans le bassin durant un temps dt est $dm=\lambda_1\rho g(z-h_1)dt$ où g désigne l'accélération de la pesanteur, ρ la masse volumique de l'eau et λ_1 une constante qui dépend de la forme du canal 1. Cette masse d'eau fait varier la hauteur d'eau dans le bassin 1 d'une quantité dh_1.

1. Exprimez dh_1 en fonction de dm, ρ et de S_1 : la surface du bassin 1.
2. En déduire que l'évolution temporelle de la hauteur d'eau $h_1(t)$ satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dh_1(t)}{dt} - k_1(z_0.\Gamma(t) - h_1(t)) = 0 \qquad \text{où } k_1 \text{ est une constante que l'on déterminera.}$$

3. Résoudre cette équation par transformation de Laplace et déterminez $h_1(t)$. (on notera $H_1(p)$ la TL de $h_1(t)$)
4. Donnez l'allure de la courbe $h_1(t)$.

B. Régime des marées

L'écluse 1 reste ouverte alors que la mer monte et descend périodiquement à l'extérieur du port. La hauteur d'eau $h_1(t)$ dépend maintenant de l'évolution temporelle de la hauteur d'eau à l'extérieur : $z(t)=z_0\sin(\omega t).\Gamma(t)$.

5. *Question Bonus* : Quelle est la valeur approchée de la constante ω ?
6. Ecrire la nouvelle équation différentielle à laquelle obéit $h_1(t)$
7. Résolvez cette équation différentielle par transformation de Laplace et déterminez $h_1(t)$.

   Remarque : pour effectuer la décomposition en éléments simples, on se souviendra que : $p^2+c^2=(p-ic)(p+ic)$.

Dans cette seconde partie, l'écluse 2 est ouverte. Le bassin 1 communique avec la mer et le bassin 2.

Dans l'état initial, les hauteurs d'eau initiales dans les deux bassins 1 et 2 sont identiques, égales à 0 pour simplifier les calculs. A t=0, l'écluse 1 est ouverte alors que la hauteur d'eau à l'extérieur est $z_0>0$. ($h_1(0)= h_2(0)=0$). Les bassins 1 et 2 se remplissent d'eau, le bassin 2 étant alimenté par le bassin 1 par l'intermédiaire du canal 2.
Le bassin 2 a une surface S_2 et le canal 2 est caractérisé par une constante λ_2.

8. Montrez que l'équation différentielle à laquelle obéit $h_2(t)$ est :

$$\frac{dh_2(t)}{dt} + k_2 h_2(t) = k_2 h_1(t)$$

où k_2 désigne une constante que l'on déterminera.

9. Ecrire la nouvelle équation différentielle à laquelle satisfait $h_1(t)$.

10. Par transformation de Laplace, en déduire le système d'équations auquel répondent H_1 et H_2 les TL de h_1 et h_2. On ne cherchera pas à résoudre ce système.