

Université Pierre et Marie Curie 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05

INTRODUCTION A L'ANALYSE SPECTRALE

Maria Barbi



Licence de physique
CNED

Table des matières

Introduction	7
Partie I - Mesurer	9
1 Systèmes linéaires et équations différentielles linéaires (EDL)	11
1.1 Systèmes linéaires	11
1.2 Equations différentielles linéaires	13
1.3 Les oscillateurs en physique	14
1.3.1 L'oscillateur libre	14
1.3.2 Le potentiel harmonique	15
1.3.3 Exemples	16
1.4 L'oscillateur libre en notation complexe	20
1.4.1 Energie de l'oscillateur libre	23
1.4.2 Oscillateur amorti	24
2 L'excitation d'un oscillateur : résonance	27
2.1 L'oscillateur forcé amorti	27
2.2 La fonction de transfert	30
2.3 La résonance	31
2.4 Diagramme de Bode	32
2.5 Résonances dans la nature	34
3 L'étude expérimentale d'un système physique : la chaîne de mesure	35
3.1 Le signal physique	36
3.2 Le capteur	36
3.3 Bruit	38
3.4 Filtre + Amplificateur	41
3.5 Conversion analogique-numérique	41
3.6 Analyse et traitement du signal	43
4 Analogie mécanique-électrique : les circuits électriques	45
4.1 Les circuits électriques : rappels	45
4.1.1 Lois de Kirchhoff	46
4.1.2 Eléments de circuit	47
4.1.3 Combinaison des éléments d'un circuit	48
4.1.4 Mise en équations : un exemple	50

4.2	Analogie mécanique électrique	51
4.3	Notation complexe en électronique	53
4.3.1	Réponse du circuit RLC en régime harmonique	53
4.3.2	Impédance complexe	54
Partie II - Analyser		57
5	La Série de Fourier (SF)	59
5.1	Introduction : réponse d'un système linéaire à une somme d'excitations sinusoïdales	59
5.2	Signaux périodiques : premier exemple et motivations	61
5.3	Série de Fourier sur la base des fonctions trigonométriques	63
5.4	Série de Fourier sur la base des exponentielles complexes	64
5.5	Spectres	66
5.6	Exemples et propriétés	67
5.6.1	Un exemple interactif sur le web	68
5.7	Energie et puissance	70
5.7.1	Conclusion	72
6	Transformée de Fourier (TF)	75
6.1	Décomposition d'une fonction aperiodique : la transformée de Fourier	75
6.1.1	Passage de la SF à la TF	76
6.1.2	Définition de TF et TF inverse	77
6.2	Conditions d'existence	78
6.3	Spectre d'énergie	79
6.4	Exemple et remarques	80
6.4.1	Dualité temps-fréquence, influence de la durée du signal sur son spectre	81
6.5	TF au sens des distributions : la distribution delta de Dirac $\delta(y)$	82
6.5.1	Propriétés de la distribution de Dirac	83
6.6	Nos premières TF	85
6.6.1	Les TF des fonctions de base : le dictionnaire	85
6.7	Pour aller plus loin : les propriétés des TF	86
7	Fonctions périodiques et fonctions limitées dans le temps	89
7.1	Introduction	89
7.2	TF et SF d'une fonction périodique	90
7.3	Influence de la durée limitée de l'acquisition	92
7.3.1	TF d'un signal sinusoïdal de durée limitée	92
7.3.2	Influence de la forme de la porte	93
7.3.3	Spectre d'une fonction périodique de durée limitée T_e	94
8	Echantillonnage et Transformée de Fourier Rapide (FFT)	97
8.1	Echantillonnage d'une fonction	97
8.2	Théorème de Shannon et repliement de spectre	99
8.2.1	TF (continue) d'une fonction échantillonnée	99

8.2.2	Périodisation du spectre	99
8.2.3	Théoreme de Shannon	100
8.2.4	Repliement de spectre	101
8.3	TF discrète et FFT	103
8.3.1	FFT	105
8.3.2	Transformée inverse	105
8.3.3	FFT et périodisation du signal	105
8.4	Ce qu'il faut retenir	107
Partie III - Prévoir		109
9	Transformée de Laplace (TL)	111
9.1	Généralisation de la TF : la transformée de Laplace	111
9.1.1	Définition de TL et TL inverse	112
9.1.2	Relation entre TF et TL	113
9.2	Calculer des TL	113
9.2.1	Deux exemples : TL de la fonction rectangle et de la fonction échelon	113
9.2.2	Dictionnaire et propriétés des TL	114
10	TF et TL des dérivées d'une fonction	117
10.1	Introduction	117
10.1.1	Exponentielles complexes, dérivées et transformées	118
10.2	TF et TL des dérivées d'une fonction	119
10.2.1	Fonctions continues et dérivables	119
10.2.2	Fonctions discontinues et nulles pour $t < 0$	120
10.3	Utilisation des distributions pour le calcul des TL des dérivées	121
10.3.1	Cas des fonctions d'entrée discontinues : fonction échelon	121
10.3.2	Dérivées au sens des distributions	121
11	Resolution d'EDL par TL	125
11.1	Résolution d'EDL par TL	125
11.1.1	Exemple 1. Des fonctions continues et dérivables.	125
11.1.2	Exemple 2. Entrée discontinue et conditions initiales	126
11.1.3	Résolution d'EDL par TL, formule générale.	127
11.2	La résolution d'EDL en pratique	127
11.2.1	Réponse libre (transitoire pur) et réponse forcée (régime permanent)	127
11.2.2	La transmittance $H(p)$	128
11.2.3	Mode opératoire	129
11.3	Caractérisation d'un système	130
11.3.1	Réponse fréquentielle	131
11.3.2	Réponse impulsionnelle	132
11.3.3	Réponse indicielle	132

12 Un point de vue alternatif : la convolution	135
12.1 Décomposer l'entrée dans le domaine du temps	135
12.2 Déterminer le signal de sortie	136
12.3 La réponse du système comme produit de convolution	137
12.4 Exemples de convolution	138
13 Oscillations et ondes.	141
13.1 Oscillations et ondes	141
13.1.1 Onde progressive	142
13.1.2 Onde progressive périodique	143
13.1.3 Onde progressive périodique sinusoïdale	143
14 Signaux aléatoires	145
14.1 Rappels de probabilité	145
14.2 Signaux aléatoires	149
14.2.1 Stationnarité et ergodicité	150
14.2.2 Fonction de corrélation	154
14.3 Cas des signaux déterministes	159
14.4 Un signal sans mémoire : le bruit blanc	159
14.5 Spectre d'un signal aléatoire	161
14.5.1 La densité spectrale de puissance (DSP)	162
14.6 Théorème de Wiener-Khintchine	162
14.6.1 DSP et puissance	163
14.6.2 Estimateurs de la DSP : le périodogramme	164
14.6.3 Spectres des signaux aléatoires et des signaux déterministes	165
14.7 Et pour conclure... Réponse d'un système linéaire à un signal aléatoire	167
14.7.1 Filtrage d'un signal bruité	168
A Dictionnaire	171
Annexes	171
B Principales propriétés des TF et TL	173

Introduction

La mesure est une étape importante dans la production du résultat expérimental en Physique. Avec le développement des techniques d'acquisition digitale des données et des ordinateurs, il s'est développé un ensemble d'outils mathématiques afin d'extraire efficacement l'information utile. Ce cours est une introduction à ces outils.

La dynamique des systèmes physiques est décrite par une ou plusieurs équations différentielles. Ce sont ces équations que l'on cherche à caractériser par le biais de la mesure. Les série et transformée de Fourier ou la transformée de Laplace introduites ici, ainsi que la notion de spectre qui leur est associée établissent un lien simple entre les observables (les quantités mesurées) et les équations.

Ce lien reste cependant valide dans le cadre des *systèmes linéaires* (c'est-à-dire régis par des équations différentielles linéaires) auxquels nous nous restreignons ici. Ceci ne constitue pas une limitation forte puisqu'il est généralement possible de "linéariser" les équations qui décrivent les processus physiques. L'approximation linéaire est valide dans la limite des petites variations (lorsque les termes non linéaires d'ordre supérieur sont négligeables). Les méthodes et outils présentés ici sont donc applicables dans un grand nombre de situations et de contextes applicatifs (mécanique, optique, électricité, écologie, biologie...). On fera souvent référence dans les illustrations et les exercices aux filtres électroniques passifs (type "RLC") parce qu'ils constituent des exemples simples que l'on peut facilement étudier et tester en laboratoire.

On a délibérément choisi une approche qui privilégie l'interprétation physique des nouveaux concepts introduits ici comme la notion du spectre par exemple à une présentation mathématique au formalisme strict.

Plan du cours

- Equations différentielles, oscillateurs et ondes ; oscillations forcées en régime harmonique : fonction de transfert et résonance
- La chaîne de mesure : bruit, capteurs, filtres, numérisation, analyse
- La série de Fourier et le régimes non harmoniques ; spectres
- Transformées de Fourier (TF) et Laplace (TL) : spectres continus
- Signaux numériques : échantillonnage et quantification, Transformée de Fourier Rapide
- Résolution d'équations différentielles par TL : TL d'une dérivée, conditions initiales et distributions

- Retour sur les filtres : transmittance, réponse impulsionnelle et convolution
- Signaux aléatoires : fonction corrélation et densité spectrale e puissance, bruit blanc, filtrage.

Partie I - Mesurer

Chapitre 1

Systemes linéaires et équations différentielles linéaires (EDL)

1.1 Systemes linéaires

Commençons par l'introduction du sujet central de ce cours, les systèmes physiques linéaires. Par *système* on entend ici un objet physique, ou plus précisément un modèle d'objet physique ou d'autre nature, qui reçoit un (ou plusieurs) signal d'entrée (ou excitation) et produit un (ou plusieurs) signal de sortie (ou réponse). La notion de système est donc très générale : une pièce chauffée peut être considérée comme un système qui reçoit comme signal d'entrée la programmation de la chaudière au cours de la journée et comme signal de sortie la température intérieure. Un atome qui reçoit de l'énergie sous forme de lumière et émet une onde électromagnétique à une fréquence différente est un autre exemple. En général, on s'intéressera à des *systèmes dynamiques*, pour lesquels les variables d'entrée et de sortie varient avec le temps.

Un **système dynamique linéaire** est un système dynamique pour lequel la relation entre la fonction d'entrée et la fonction de sortie est linéaire, c'est-à-dire que le système est régi par le **principe de superposition** : si l'entrée est une combinaison linéaire de deux fonctions,

$$e(t) = \alpha e_1(t) + \beta e_2(t), \quad (1.1)$$

avec $e_1(t)$ et $e_2(t)$ deux fonctions d'entrée, alors la sortie est la combinaison linéaire des deux réponses :

$$s(t) = \alpha s_1(t) + \beta s_2(t), \quad (1.2)$$

avec $s_1(t)$ la réponse à $e_1(t)$ et $s_2(t)$ la réponse à $e_2(t)$. En d'autres termes : pour un système linéaire, la relation $s = F(e)$ entre entrée e et sortie s est linéaire : $F(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha F(e_1) + \beta F(e_2)$. Ce résultat se généralise ensuite à un nombre quelconque d'excitations : si on sait écrire une excitation en entrée comme une somme de fonctions, il sera possible de calculer la réponse correspondante en additionnant des réponses individuelles calculables explicitement.

Un exemple simple de système linéaire est un capteur de champ magnétique, constitué d'un bobinage de fil de cuivre enroulé autour d'un noyau ferromagnétique. En présence



FIG. 1.1 – Prototype de capteur de champ magnétique.

d'un champ magnétique variable B (signal d'entrée), la tension v mesurée aux bornes de la bobine (signal de sortie) est donnée par la loi de Faraday,

$$v = -N \frac{d\Phi}{dt} = -NS \frac{dB}{dt}$$

où N est le nombre de spires, S leur section et Φ le flux de champ magnétique. Or, **l'opérateur de dérivation est un opérateur linéaire** :

$$\frac{d}{dt}(\alpha B_1(t) + \beta B_2(t)) = \alpha \frac{d}{dt} B_1(t) + \beta \frac{d}{dt} B_2(t).$$

Par conséquent, la relation entre entrée et sortie est linéaire pour ce système.

Remarquons cependant que un capteur de champ magnétique réel ne fonctionnera pas parfaitement dans toutes les conditions : si le champ B est de trop forte amplitude il induit la saturation du matériau ferromagnétique : un système réel peut ne suivre le comportement linéaire de son modèle mathématique que dans des conditions données, et ne plus être linéaire au delà de certaines limites.

Pour d'autres systèmes, la relation entre le signal d'entrée et le signal de sortie n'est pas linéaire : le système n'est donc pas linéaire. Par exemple, une thermistance est un capteur de température basé sur la variation de résistance électrique d'oxydes métalliques en fonction de la température. La loi de dépendance est décrite par une relation non linéaire (relation de Steinhart-Hart) :

$$\frac{1}{T} = A + B \ln(R) + C(\ln(R))^3$$

La thermistance est donc un système non linéaire dans n'importe quelles conditions - même si on pourra approcher son comportement par une loi linéaire si par exemple on considère de très faibles variation de température.

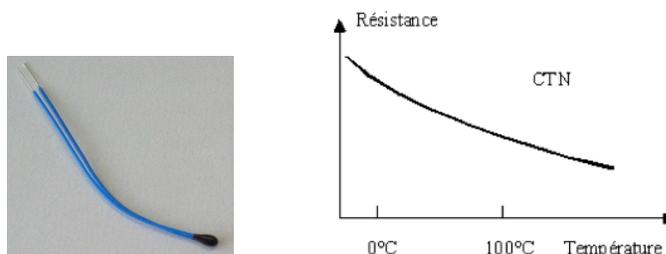


FIG. 1.2 – Une thermistance et sa courbe de réponse.

1.2 Equations différentielles linéaires

La relation mathématique qui relie l'entrée et la sortie d'un système linéaire est toujours donnée par une équation différentielle linéaire. Rappelons brièvement de quoi il s'agit.

Une **équation différentielle (ED)** est une équation portant sur une fonction inconnue (que l'on veut déterminer) d'une variable réelle. Dans l'ED peuvent apparaître la variable, la fonction et ses dérivées.

L'**ordre** de l'équation différentielle est, par définition, l'ordre de la dérivée la plus élevée de la fonction inconnue.

Exemple : Soit $x(t)$ la fonction inconnue de la variable t . Soit $f(x, t)$ une fonction donnée de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et a une constante :

$$ax(t) + \frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(x, t)$$

est une ED de second ordre pour $x(t)$.

La solution recherchée est donc la fonction $x(t)$ qui résout l'ED. Il est important de souligner qu'il n'existe pas toujours de solution explicite (pouvant s'exprimer comme une combinaison de fonctions élémentaires) de l'ED, comme par exemple pour l'équation $\frac{dx(t)}{dt} = x^2 - t$. Dans ce cas, soit on cherche une solution numérique, soit on fait une analyse qualitative de la solution, par exemple en étudiant le signe de la dérivée.

Plus simple est le cas des équations différentielles linéaires, auxquelles on s'intéressera dans ce cours. Une équation différentielle est dite **linéaire (EDL)** si elle ne fait intervenir les dérivées de la fonction inconnue que dans une combinaison linéaire. Un exemple d'EDL de second ordre :

$$a(t)\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b(t)\frac{dx(t)}{dt} + c(t)x(t) = f(t).$$

Un contre-exemple est donné par l'équation du pendule,

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta(t) = 0 :$$

l'ED n'est pas linéaire parce que la fonction $\sin \theta(t)$ n'est pas une fonction linéaire de $\theta(t)$ ($\sin(\theta_1 + \theta_2) \neq \sin \theta_1 + \sin \theta_2$!).

L'équation différentielle linéaire est dite **homogène**¹ si si tous les termes font intervenir des dérivées des inconnue $x(t)$, et il n'y a pas de termes dépendants seulement de la variable ou constants. Par exemple, les ED $x(t) + \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0$ ou $\frac{dx(t)}{dt} + c\frac{d^2x(t)}{dt^2} = x(t)$ sont homogènes.

¹Plus généralement, une équation différentielle (non nécessairement linéaire) est dite homogène si, en remplaçant t par kt et $x(t)$ par $kx(t)$ l'équation reste inchangée.

Enfin, une EDL est dite à coefficients constants si tous les coefficients qui multiplient la fonction et ses dérivées ne dépendent pas explicitement du temps. La forme générale d'une **EDL à coefficients constants** est la suivante :

$$a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t). \quad (1.3)$$

C'est à ce type d'équations que nous allons nous intéresser dans ce cours.

1.3 Les oscillateurs en physique

Pourquoi donc s'intéresser aux EDL ? Une première raison est que les EDL sont associées à tous les systèmes assimilables à des *oscillateurs*. Qu'est-ce qu'un oscillateur et pourquoi cela nous intéresse-t-il particulièrement ?

1.3.1 L'oscillateur libre

Le cas le plus simple et le plus classique d'oscillateur est celui de l'oscillateur mécanique libre : une masse m accrochée à un ressort de raideur K . La variable qui nous intéresse

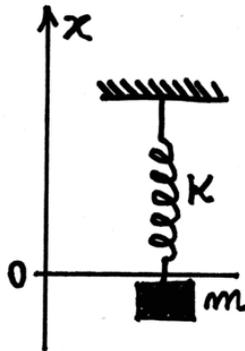


FIG. 1.3 – Schéma de l'oscillateur mécanique libre.

dans ce cas est la position $x(t)$ de la masse par rapport à sa position d'équilibre.

Comment s'écrivent les équations du mouvement pour un tel système ? Partons de la relation fondamentale de la dynamique, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, qui s'écrit dans notre cas unidimensionnel

$$-Kx = m\ddot{x} \quad (1.4)$$

où on a introduit la notation usuelle pour les dérivées temporelles

$$\begin{aligned} \text{vitesse} \quad \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = v, \\ \text{accélération} \quad \ddot{x} &= \frac{d^2x}{dt^2} = a, \end{aligned}$$

et la forme explicite de la force de rappel élastique $F = -Kx$. L'équation (1.4) est bien sous la forme d'une équation différentielle linéaire, homogène, à coefficients constants, du second ordre pour $x(t)$:

$$a_1\ddot{x}(t) + a_2\dot{x}(t) + a_3x(t) = 0 \quad (1.5)$$

avec $a_1 = m$, $a_2 = 0$, $a_3 = -K$.

Un système masse+ressort est donc *équivalent* à une EDL du second ordre : nous voyons ici le premier exemple concret de cette équivalence entre un système physique linéaire et l'équation qui détermine son comportement².

1.3.2 Le potentiel harmonique

Rappelons que le potentiel pour un ressort de constante de raideur K est

$$V(x) = \frac{1}{2}Kx^2. \quad (1.6)$$

On obtient la force par dérivation (dans le cas unidimensionnel) : $F = -\frac{\partial V}{\partial x} = -Kx$.

Notre intérêt pour le système masse-ressort vient du fait qu'il constitue un modèle simplifié de ce qu'il se passe pour un grand nombre d'autre situations. Prenons pour commencer un exemple concret : le modèle classique d'un cristal.

Modèle classique d'un cristal.

Dans un cristal, les atomes sont liés les uns aux autres par des forces (électrostatiques) qui les piègent dans des positions précises, organisés dans le réseau cristallin. Chaque

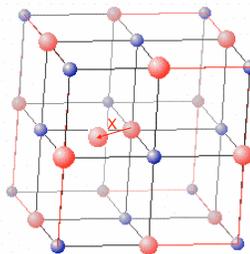


FIG. 1.4 – Structure cubique d'un cristal. Le vecteur x représente le déplacement d'un atome de sa position d'équilibre.

²Dans ce premier cours, je vais me concentrer sur les EDL de second ordre, car elles sont particulièrement adaptées à l'introduction des méthodes qui nous intéressent. Cependant, les équations différentielles du premier ordre ne sont pas moins importantes en physique : de résolution plus directe, elles seront traitées dans un premier temps seulement dans les exercices. Un peu plus tard, nous introduirons les méthodes générales de résolution d'EDL s'appliquant alors à toute équation différentielle linéaire.

atome est donc contraint d'occuper une position donnée, correspondante au minimum du potentiel électrostatique produit par tous les autres atomes. Un schéma du cristal est donné en figure 1.4. A température donnée l'atome possède cependant une certaine énergie et peut donc se déplacer autour de sa position d'équilibre. Nous ne connaissons pas la forme exacte de ce potentiel, dont la composante le long d'un axe x est schématisée sur la figure 1.5. Cependant, si l'atome n'effectue que des petits déplacements autour de

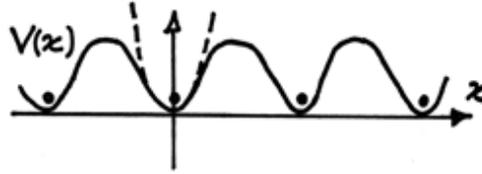


FIG. 1.5 – Projection le long d'un axe x du potentiel périodique qui piège les atomes dans un cristal. Chaque minimum correspond à une position d'équilibre. Pour x petit, le potentiel peut être approché par une fonction quadratique.

sa position d'équilibre (température faible), alors on peut approcher le potentiel autour de son minimum par un développement de Taylor. Prenons par exemple la position d'équilibre $x = 0$: pour x petit, on a

$$V(x) = V(0) + \frac{\partial V}{\partial x}(0) x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0) x^2 + O(x^3). \quad (1.7)$$

Dans cette expression, $V(0)$ est une constante qu'on peut mettre à zéro sans perte de généralité (il suffit de redéfinir le zéro du potentiel), $\frac{\partial V}{\partial x}(0)$ est nulle car $x = 0$ est un minimum de $V(x)$, et $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0)$ est une autre constante que l'on va appeler K : on obtient donc au second ordre en x

$$V(x) \simeq \frac{1}{2} K x^2, \quad (1.8)$$

un **potentiel quadratique** en x (dit aussi **harmonique**) en x , c'est à dire exactement le même que pour un ressort ! L'atome se déplace donc autour de sa position d'équilibre comme une masse accrochée à un ressort, dont la raideur K dépend de la forme explicite de son potentiel d'interaction avec les autres atomes du réseau.

Peut-on généraliser ce même raisonnement pour d'autres problèmes ? La réponse est oui, et, de plus, c'est très général : pour chaque système *lié* par un potentiel autour d'une position d'équilibre, le potentiel est à son minimum peut être approché par un potentiel harmonique.

1.3.3 Exemples

Les exemples sont vraiment très nombreux et touchent à tous les domaines. Au niveau macroscopique, des oscillations caractérisent par exemple une masse lié par un ressort ou un pendule³.

³Pour le cas d'un pendule de masse m et longueur ℓ la forme explicite du potentiel est connue : $V(\theta) = mg\ell(1 - \cos \theta)$. Pour des petits déplacements angulaires θ on peut approcher le potentiel par

Modes d'oscillation atomiques

Comme pour les atomes dans un solide, les atomes (ou groupes atomiques) dans une molécule peuvent osciller : dans une molécule diatomique, par exemple, la variable oscillante x sera donnée par la distance entre les deux atomes ; dans une molécule plus complexe, par exemple celle de l'eau (figure 1.6), différents *modes d'oscillation* se combinent, caractérisés par des distances linéaires ou angulaires entre atomes.

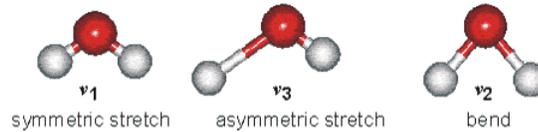


FIG. 1.6 – Modes de vibrations dans une molécule diatomique ou dans une molécule triatomique non linéaire comme celle de l'eau. Les distances entre l'atome d'oxygène et les atomes d'hydrogène ou l'angle entre les deux liaisons H-O oscillent et peuvent être considérés comme des variables soumises à des potentiels harmoniques pour les faibles variations.

Polarisabilité des atomes

En passant à des échelles plus petites, on remarque que les électrons sont aussi liés au noyau atomique par un potentiel. Si on place un atome dans un champ électrique on peut déplacer le nuage électronique de sa position d'équilibre (polarisation de l'atome), puis le laisser osciller : la variable oscillante sera alors par exemple la distance entre les centres de masse des charges positives et négatives (figure 1.7). Ce mouvement oscillatoire produit un champ électromagnétique et peut donc être mesuré. Sur une échelle plus grande, c'est encore l'oscillation des charges qui produit le champ électromagnétique émis par une antenne. Les oscillations des charges dans un circuit électrique sont un exemple principal d'oscillateur typique et très souvent considéré.

Résonance magnétique

Les électrons possèdent aussi un moment magnétique (figure 1.8) qui peut être mis en rotation dans un champ magnétique et dont les oscillations d'une composante peuvent être observées, comme c'est le cas dans la résonance magnétique (IRM). En absence de champ magnétique externe, les protons d'un échantillon tissulaire sont orientés de façon aléatoire dans l'espace sachant que la somme des vecteurs d'aimantation élémentaire (de chaque proton) microscopique est nulle et il n'y a pas de vecteur d'aimantation macroscopique. Lorsqu'un champ magnétique externe d'intensité significative est appliqué, les protons s'orientent dans sa direction sans être réellement parfaitement alignés à celui-ci : en effet, les protons tournent individuellement autour du champ à une fréquence angulaire donnée. Ce phénomène est l'origine de la formation d'un vecteur d'aimantation

$V(\theta) \simeq mg\ell\theta^2/2$. Dans cette approximation, la projection angulaire de la force $F_\theta = mg \sin \theta$ devient $F_\theta \simeq mg\theta$ et l'équation différentielle correspondante devient $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta(t) = 0$.

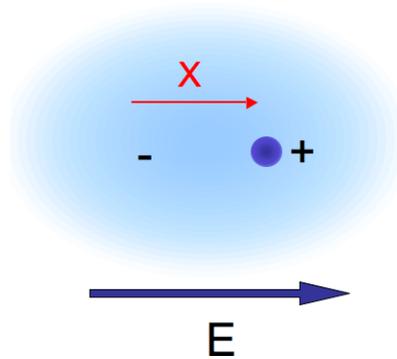


FIG. 1.7 – Polarisabilité d'un atome. La position du centre de masse du nuage électronique se déplace de sa position d'équilibre sous l'action d'un champ électrique E . Si le champ s'annule, le nuage oscille autour de sa position d'équilibre et le potentiel qui le lie au noyau atomique peut être approché par un potentiel harmonique dans la limite des faibles déplacements.

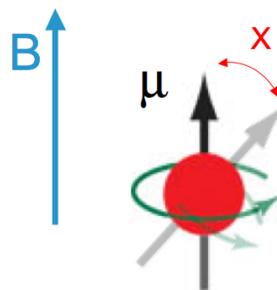


FIG. 1.8 – Les oscillations du moment magnétique d'un atome autour de sa position d'équilibre sont exploitées dans l'IRM.

macroscopique. L'application très courte d'un second champ magnétique orthogonale au premier perturbe la direction du vecteur aimantation, qui retourne ensuite à l'équilibre par un processus de relaxation qu'on peut mesurer.

Oscillations dans l'ADN

Mais la physique n'est pas le seul domaine dans lequel on observe des phénomènes oscillatoires. Un exemple issu de la biologie sont les "modes de respiration" observés dans l'ADN (figure 1.9) : les deux bases dans chaque paire sont liées l'une à l'autre par un potentiel dont on ne connaît pas la forme exacte ; à température finie, les deux bases vibrent autour de leur position d'équilibre, la distance qui le sépare oscille. Si pour des températures plus élevées cette vibration peut conduire à la séparation locale (puis globale) des deux brins d'ADN, à faible température il est possible de décrire le phénomène par un potentiel harmonique qui approche le potentiel d'interaction.

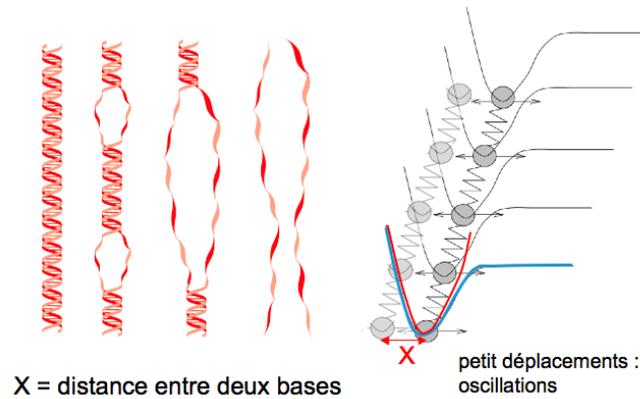


FIG. 1.9 – Les vibrations des bases dans une chaîne d'ADN peut être décrite par l'oscillation dans un potentiel harmonique fonction de la distance entre les deux bases. A température plus élevée la forme explicite (non linéaire) du potentiel entre en jeu et les vibrations peuvent induire une séparation des deux brins d'ADN.

Oscillations dans l'atmosphère

Un exemple un peu plus complexe issu de la géologie est le comportement de l'atmosphère, qui se comporte aussi comme un oscillateur géant. Son oscillation est un peu plus compliqué à décrire par rapport aux cas discutés avant car l'atmosphère est un objet étendu et il faut donc considérer ses oscillations en chaque point du globe ; ces oscillations sont tout de même cohérentes et peuvent être mises en évidence par exemple par des cartes de la pression au sol (figure 1.10).

– Signal au sol (Pression, CI: 20Pa)

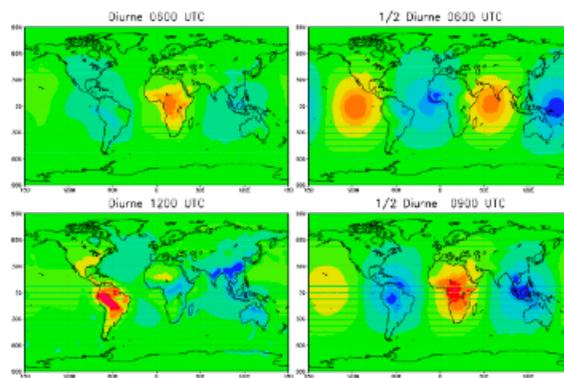
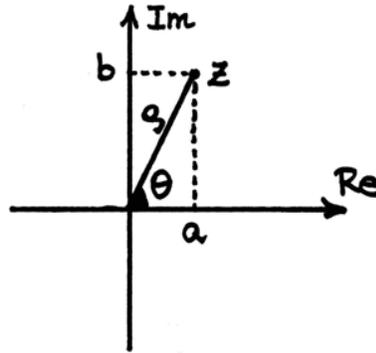


FIG. 1.10 – Une carte de la pression au sol permet de mettre en évidence les oscillations de l'atmosphère terrestre.

A ces exemple s'ajoutent une infinité d'autre systèmes : le fonctionnement d'un servomecanisme comme un thermostat réglant la température, l'évolution d'une population d'animaux dépendants de l'apport de nutriments et soumis à des prédateurs... Tous ces phénomènes se comportent donc comme des oscillateurs, pourvu qu'on les excite de

FIG. 1.11 – Représentation d'un nombre complexe z .

manière appropriée et qu'on se place dans la limite des petits déplacements par rapport à l'état d'équilibre.

1.4 L'oscillateur libre en notation complexe

En section 1.3 nous avons écrit l'équation différentielle qui régit le mouvement de l'oscillateur libre (et donc, comme nous venons de le voir, des systèmes liés en général dans la limite des petits déplacements). Est-ce que le système masse-ressort suit bien un comportement oscillatoire ? Pour le savoir il faut résoudre l'EDL. La résolution d'une telle équation se fait par des méthodes classiques qu'il est important de connaître. Il est possible cependant de trouver la solution rapidement par une méthode qui tire partie du caractère oscillatoire de la solution. Cette méthode que nous présentons maintenant fait intervenir la **notation complexe**. Dès ce premier exemple, nous allons donc introduire cette notation et l'exploiter pour une résolution plus rapide de l'équation.

Pourquoi la notation complexe quand on s'intéresse à des oscillations ? On pourrait penser que les fonctions trigonométriques seraient plus adaptées. Voyons.

Appelons i le nombre imaginaire unité⁴, tel que

$$i^2 = -1.$$

Un nombre complexe z est alors donné par ses composantes réelle a et imaginaire b comme $z = a + ib$ et peut être représenté sur le plan complexe comme en figure 1.11. On peut ensuite passer aux coordonnées polaires ρ et θ (figure 1.11) et écrire

$$z = a + ib = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta} \quad (1.9)$$

où on a utilisé la formule d'Euler⁵ et où

$$\rho^2 = |z|^2 = a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib) = z\bar{z} \quad (\text{module carré de } z), \quad (1.10)$$

$$\theta = \arctan(b/a) = \arg(z) \quad (\text{argument ou phase de } z). \quad (1.11)$$

⁴On remarque que en électronique on fait typiquement le choix de la lettre j plutôt que i pour le nombre imaginaire unité, alors que la lettre i est traditionnellement employée pour désigner l'intensité de courant.

⁵La formule d'Euler s'écrit pour tout nombre réel x : $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$.

On observe que, selon l'équation (1.9), la partie réelle a de z s'écrit $a = \operatorname{Re}(z) = \rho \cos \theta$, et est donc une fonction trigonométrique de θ ⁶. Supposons maintenant d'avoir ρ constant dans le temps et $\theta(t) = \omega t + \phi$ une fonction linéaire du temps : alors le vecteur représentatif de z tourne à vitesse constante dans le plan complexe en décrivant un cercle de rayon ρ . Sa partie réelle,

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\rho e^{i(\omega t + \phi)}) = \rho \cos(\omega t + \phi)$$

est une fonction oscillante du temps (figure 1.12).

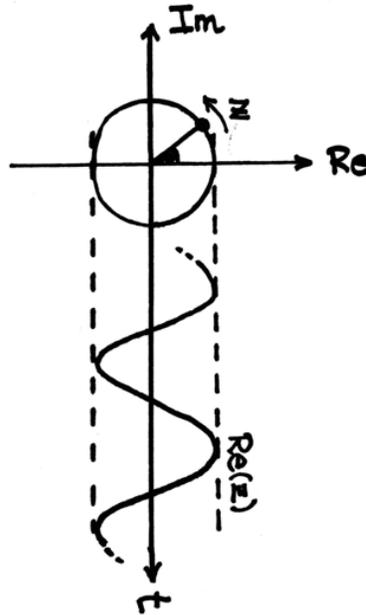


FIG. 1.12 – La partie réelle d'un nombre complexe z .

Ces considérations nous donnent une idée pour la résolution des EDL de second ordre. Partons de l'hypothèse que la solution cherchée est une solution oscillante, qui peut s'écrire en toute généralité comme

$$x(t) = \rho \cos(\omega t + \varphi).$$

On peut alors écrire $x(t)$ comme la partie réelle d'une fonction complexe : $x(t) = \operatorname{Re}(\tilde{x}(t))$ avec

$$\tilde{x}(t) = x(t) + iy(t) \tag{1.12}$$

$$= \rho e^{i(\omega t + \varphi)} \tag{1.13}$$

On cherche, à la place de $x(t)$, une solution complexe $\tilde{x}(t)$ de l'équation du mouvement,

$$m\ddot{\tilde{x}}(t) + K\tilde{x}(t) = 0.$$

⁶La même chose vaut pour $b = \operatorname{Im}(z) = \rho \sin \theta$.

On a donc

$$m(\ddot{x}(t) + i\ddot{y}(t)) + K(x(t) + iy(t)) = 0$$

en utilisant la notation (1.12), et on obtient pour ses parties réelle et imaginaire

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + Kx(t) &= 0 \\ m\ddot{y}(t) + Ky(t) &= 0. \end{aligned}$$

Si $\tilde{x}(t)$ est solution de l'équation, alors $x(t) = \operatorname{Re}(\tilde{x}(t))$ et $y(t) = \operatorname{Im}(\tilde{x}(t))$ le sont aussi⁷. En trouvant les solutions complexes $\tilde{x}(t)$ de l'EDL, on obtient donc ainsi ses solutions réelles.

Il s'agit donc maintenant de chercher une solution $\tilde{x}(t)$ de l'EDL. Plus précisément, nous allons chercher $\tilde{x}(t)$ sous la forme (1.13). Il nous faut calculer sa dérivée seconde. C'est ici que l'on découvre la praticité de la notation complexe, car les dérivation de l'exponentielle complexe ne fait que multiplier la grandeur par un terme constant ! On obtient

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \rho e^{i(\omega t + \varphi)} \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= i\omega \rho e^{i(\omega t + \varphi)} \\ \ddot{\tilde{x}}(t) &= -\omega^2 \rho e^{i(\omega t + \varphi)} \end{aligned}$$

et donc l'EDL se traduit par une simple équation algébrique :

$$\begin{aligned} -m\omega^2 \tilde{x}(t) + K\tilde{x}(t) &= 0 \\ (-m\omega^2 + K)\tilde{x}(t) &= 0 \\ \Rightarrow (-m\omega^2 + K) &= 0. \end{aligned}$$

Notre fonction $\tilde{x}(t) = \rho e^{i(\omega t + \varphi)}$ est donc solution de l'EDL à condition que la pulsation ω soit

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_0. \quad (1.14)$$

On appelle ω_0 la **pulsation propre** de l'oscillateur. Avec $\omega = \omega_0$, $\tilde{x}(t)$ est solution de l'EDL et par conséquent $x(t)$ aussi : nous avons déterminé la *forme générale de la solution* cherchée,

$$x(t) = \operatorname{Re}(\tilde{x}(t)) = \rho \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (1.15)$$

Comme d'habitude, les deux paramètres libres ρ et φ doivent maintenant être déterminés à partir des **conditions initiales** du problème. Typiquement, il nous faut connaître la position et la vitesse initiales de la masse :

$$x(t=0) = x_0 \quad (1.16)$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0. \quad (1.17)$$

⁷Il faut bien remarquer que cette propriété est assurée seulement si l'équation différentielle est linéaire : si elle contenait par exemple un terme en \dot{x}^2 , ou x^2 , on aurait pour \tilde{x} que $\tilde{x}^2 = (x+iy)(x+iy) = x^2 + y^2 - 2xy$ et par conséquent les parties réelle et imaginaire de l'équation ne dépendraient plus l'une seulement de x et l'autre seulement de y comme dans le cas linéaire.

• **Exercice**

En remplaçant les conditions initiales (1.16) et (1.17) dans la solution générale (1.15), montrer que

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right)$$

• **Exercice**

A partir de l'exercice précédent déterminer puis tracer la solution du problème de l'oscillateur libre dans les deux cas :

1. $x_0 = 0, v_0 \neq 0$;
2. $v_0 = 0, x_0 \neq 0$.

Comparer avec les deux solutions de la figure suivante. Que valent les deux amplitudes maximales indiquées sur l'axe des ordonnées ?

Revenons maintenant sur la forme générale de la solution. Nous avons trouvé qu'un système physique régit par l'EDL (1.4), une fois mis en mouvement ($v(0) \neq 0$) ou déplacé de sa position d'équilibre ($x(0) \neq 0$) se met à osciller suivant un mouvement sinusoïdal avec une pulsation ω_0 donnée qui ne dépend pas des conditions initiales mais seulement des paramètres de l'EDL. Si nous pouvons *mesurer* cette oscillation, nous aurons des renseignements importants sur les caractéristiques physiques du système : pour le cas d'un ressort, le rapport K/m ; dans le cas d'un atome, par exemple, la pulsation propre peut donner des informations sur la masse ou la charge d'un électron, ou de la force d'interaction avec les atomes voisins pour un atome dans un solide, etc. La mesure du mouvement est donc un véritable outil d'investigation sur le système physique. Dans les prochaines sections et chapitres, nous allons discuter les autres éléments nécessaires à la mise en place effective de cette mesure.

1.4.1 Energie de l'oscillateur libre

Que peut-on dire de l'énergie associée à une telle oscillation ? L'énergie s'écrit comme d'habitude comme la somme des énergies cinétique E_c et potentielle E_p . Dans le cas de l'oscillateur mécanique, on a

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\rho^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}K\rho^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}K\rho^2 \quad (1.18)$$

car $\omega_0^2 = K/m$. L'énergie de l'oscillateur est donc constante ! En d'autres termes, l'énergie est conservée. Les deux contributions cinétique E_c et potentielle E_p oscillent comme $E \sin^2$ et $E \cos^2$ respectivement. Leur somme est E , leur valeur moyenne⁸

⁸On rappelle que $\int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}T$.

$$\bar{E}_c = \bar{E}_p = \frac{1}{2}E.$$

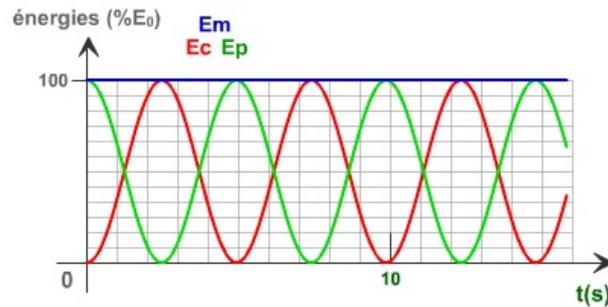


FIG. 1.13 – Energie potentielle, cinétique et totale d'un système masse-ressort. (Extrait du site "Figures animées pour la physique").

△ Une jolie animation du mouvement d'une masse accrochée à un ressort peut être trouvée sur le site web "Figures animées pour la physique", <http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/index.html>.

Le graphe des contributions de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique à l'énergie totale du système obtenu dans cette animation est reporté en figure 1.13.

1.4.2 Oscillateur amorti

Est-il raisonnable d'avoir une telle conservation de l'énergie en nature ? Nous savons que non : tout système mécanique est sujet à des forces de frottement et plus généralement tout système réel est soumis à une **dissipation de l'énergie** plus ou moins importante. Pour en tenir compte, il faut donc modifier notre équation du mouvement et y introduire des termes supplémentaires qui rendent compte d'un certain amortissement.

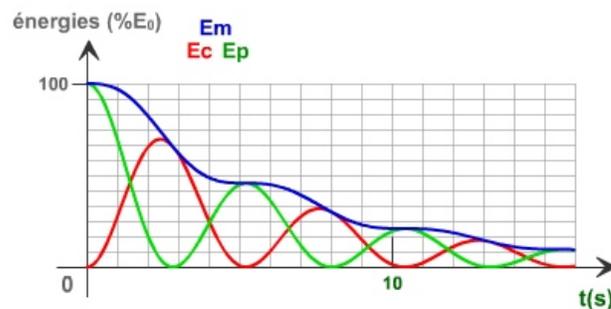


FIG. 1.14 – Energie potentielle, cinétique et totale d'un système masse-ressort en présence de dissipation. (Extrait du site "Figures animées pour la physique").

Une manière simple de *modéliser* ces effets est d'introduire une **force d'amortissement (ou force de frottement visqueux)** proportionnelle à la vitesse :

$$F_{\text{am}} = -\gamma \dot{x} \quad (1.19)$$

où γ est appelé coefficient de frottement. Le système masse-ressort en présence de dissipation est couramment appelé **oscillateur amorti**. Evidemment, le mouvement de la masse en sera affecté. L'animation sur le site "[Figures animées pour la physique](#)" permet de visualiser ce mouvement et de voir ses conséquences sur l'énergie, qui sont reportées en figure 1.14 On voit comme attendu que les deux contributions à l'énergie diminuent dans le temps (la diminution est d'autant plus rapide que le coefficient de frottement est important).

Nous allons voir comment résoudre l'EDL correspondante à l'oscillateur amorti par une méthode similaire à celle utilisée ici dans le chapitre 2, mais nous en profiterons aussi pour introduire d'autres éléments, et particulièrement une force extérieure.

Chapitre 2

L'excitation d'un oscillateur : résonance

Nous avons vu que beaucoup de systèmes physiques peuvent se mettre en oscillation, et que la mesure de leur mouvement nous renseigne sur leurs propriétés physiques. Mais le fait qu'un système soit lié par un potentiel et puisse osciller ne garantit pas en soi que il se mette effectivement à osciller. Comment mettre le système en oscillation, et comment l'y maintenir pour un temps approprié à la mesure ? Si parfois il est suffisant de déplacer le système de l'équilibre pour observer son oscillation, dans de nombreux cas son oscillation libre est amortie trop rapidement pour permettre une mesure. Il faut alors solliciter le système par une force extérieure, capable de mettre en marche et *entretenir l'oscillation*.

Pour rendre moins abstrait ce problème, voici un exemple : supposons que nous voulions mesurer la polarisabilité électrique d'une molécule. Il faut donc écarter ses charges de leur position d'équilibre : on peut le faire en envoyant une onde électromagnétique sur la molécule, de manière à faire agir le champ électrique \mathbf{E} sur les charges. Si en plus l'intensité du champ électrique varie sinusoidalement, les charges sont constamment entraînées hors d'équilibre et se mettent à osciller. En regardant l'onde rediffusée par la molécule, on peut en estimer le mouvement.

Comment exprimer cette opération par une EDL, en considérant la molécule comme un oscillateur ?

2.1 L'oscillateur forcé amorti

Reprenons l'exemple de l'oscillateur mécanique. Considérons le problème où l'oscillateur est soumis à une force extérieure oscillante $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \Delta)$. Pour que notre description soit réaliste, intégrons dès maintenant les effets de dissipation d'énergie par frottement (cf. Section 1.4.2), par une force $F_{\text{am}} = -\gamma \dot{x}$ proportionnelle à la vitesse. L'équation du mouvement $F = ma$ donne l'EDL :

$$F(t) - kx(t) - \gamma \dot{x}(t) = m\ddot{x}(t),$$

soit

$$kx(t) + \gamma \dot{x}(t) + m\ddot{x}(t) = F(t). \quad (2.1)$$

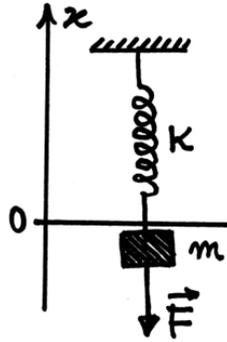


FIG. 2.1 – Scéma de l'oscillateur libre mécanique forcé amorti.

Il est instructif de considérer d'abord le **cas sans frottement**, $\gamma = 0$. Dans ce cas, l'équation différentielle s'écrit

$$kx(t) + m\ddot{x}(t) = F(t), \quad (2.2)$$

une EDL *non homogène* de second ordre. On choisit d'écrire la force en notation complexe :

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t + \Delta) = \text{Re}(\tilde{F}(t)) = \text{Re}(F_0 e^{i(\omega t + \Delta)}) = \text{Re}(\hat{F} e^{i\omega t}) \quad (2.3)$$

avec $\hat{F} = F_0 e^{i\Delta}$ l'amplitude complexe de la force¹, qui contient à la fois son amplitude F_0 et sa phase Δ .

L'EDL non homogène a comme solution la somme d'une solution particulière $x_p(t)$ et de la solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène. On connaît déjà cette dernière, puisque c'est la solution libre de l'EDL (1.4) déjà étudiée. Cherchons donc à déterminer la solution particulière que l'on notera $x(t) = x_p(t)$ pour simplifier la notation. Comme la force extérieure est oscillante, nous pouvons nous attendre à ce que la masse se mette à osciller avec *la même pulsation* de la force extérieure, éventuellement déphasée. Cherchons donc une solution $x(t)$ de la forme :

$$x(t) = \text{Re}(\hat{x} e^{i\omega t}) \quad (2.4)$$

et $\hat{x} = \rho e^{i\varphi}$ l'amplitude complexe de x , avec φ sa phase.

En remplaçant force et position complexes dans l'EDL et en utilisant les dérivées de l'exponentielle complexe comme nous l'avons déjà fait, on obtient immédiatement

$$k \hat{x} e^{i\omega t} - m\omega^2 \hat{x} e^{i\omega t} = \hat{F} e^{i\omega t}. \quad (2.5)$$

On simplifie alors l'exponentielle $e^{i\omega t}$ et on obtient une simple équation algébrique

$$(k - m\omega^2) \hat{x} = \hat{F} \quad (2.6)$$

¹On a donc choisi d'indiquer avec \tilde{x} la fonction complexe oscillante (dont $x(t)$ est la partie réelle) et avec \hat{x} son amplitude : $\tilde{x} = \hat{x} \exp(i\omega t)$.

d'où on peut déduire la solution (en notant comme précédemment $\omega_0^2 = k/m$) :

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \Rightarrow \rho e^{i\varphi} = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\Delta}. \quad (2.7)$$

Le facteur $(F_0/m)/(\omega_0^2 - \omega^2)$ étant réel (attention ! Ce n'est pas toujours le cas comme nous verrons dans un moment), nous obtenons directement l'amplitude et la phase de l'oscillation :

$$\rho = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (2.8)$$

$$\varphi = \Delta. \quad (2.9)$$

La solution réelle est donc

$$x(t) = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t + \Delta). \quad (2.10)$$

Regardons de plus près notre solution : d'une part, le système oscille effectivement avec la même pulsation ω que la force extérieure (on parle d'oscillation forcée). D'autre part, *l'amplitude* de cette oscillation *dépend de la pulsation* ω , et des caractéristiques physiques du système à travers m et ω_0 . La dépendance en ω est très intéressante : on voit que si la pulsation de la force appliquée est éloignée de la pulsation propre ω_0 , l'oscillation ne sera pas très importante, mais elle devient de plus en plus grande dès que ω s'approche de ω_0 , et est même divergente pour $\omega \rightarrow \omega_0$! Evidemment, ce résultat n'est pas réaliste, car l'oscillation contiendrait alors une énergie infinie. Nous nous doutons bien que les choses vont s'arranger dès que nous prenons en compte le frottement.

Considérons alors le cas plus réaliste d'un **oscillateur forcé en présence de frottement**, où $\gamma \neq 0$. On cherche une solution (particulière) de l'EDL (2.1). En suivant la même stratégie, on remplace

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}(\hat{x} e^{i\omega t}) \\ F(t) &= \operatorname{Re}(\hat{F} e^{i\omega t}) \end{aligned}$$

dans (2.1), et on obtient

$$(k + i\omega\gamma - m\omega^2) \hat{x} = \hat{F} \quad (2.11)$$

d'où,

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma/m} \Rightarrow \rho e^{i\varphi} = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma/m} e^{i\Delta}. \quad (2.12)$$

On retrouve évidemment la solution (2.7) pour $\gamma = 0$. Pour $\gamma \neq 0$, le facteur qui multiplie $e^{i\Delta}$ au second membre n'est plus réel. Pour obtenir le module et la phase de \hat{x}

il faut donc extraire module et phase du second membre de l'équation². On trouve ainsi

$$\rho = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma/m)^2}} \quad (2.13)$$

$$\varphi - \Delta = \arctan \frac{(-\omega\gamma/m)}{(\omega_0^2 - \omega^2)} = -\arctan \frac{(\omega\gamma/m)}{(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (2.14)$$

2.2 La fonction de transfert

Il convient de récrire les équations (2.13) et (2.14) en mettant en évidence le rapport entre les deux amplitudes complexes :

$$\frac{\hat{x}}{\hat{F}} = \frac{\rho e^{i\varphi}}{F_0 e^{i\Delta}} = \frac{\rho}{F_0} e^{i(\varphi-\Delta)} = \frac{1/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma/m}. \quad (2.15)$$

Ce rapport entre amplitudes complexes est noté généralement $T(\omega)$ et appelé **fonction de transfert** du système :

$$T(\omega) = \frac{\hat{x}}{\hat{F}} \quad \text{fonction de transfert.} \quad (2.16)$$

La fonction de transfert est une fonction de la pulsation de la force appliquée ω qui permet de déterminer à la fois amplitude et phase de la *sortie* \hat{x} (complexe) en fonction de celles de l'*entrée* \hat{F} . On a donc en général

$$\frac{\rho}{F_0} = |T(\omega)| \quad (2.17)$$

$$\varphi - \Delta = \theta_T = \arg(T(\omega)) \quad (2.18)$$

Ce résultat et la méthode de résolution en notation complexe sont très importants et nous les réutiliserons par la suite à plusieurs reprises. Résumons l'idée de fonction de transfert par un schéma :

$$\begin{aligned} F(t) & \rightarrow \boxed{\text{EDL}} \rightarrow x(t) \\ & = F_0 \cos(\omega t + \Delta) & & = \rho \cos(\omega t + \varphi) \\ & = \text{Re}(\hat{F}e^{i\omega t}) & & = \text{Re}(\hat{x}e^{i\omega t}) \\ \Rightarrow \hat{F} & \rightarrow \boxed{\text{EDL}} \rightarrow \hat{x} = T(\omega) \hat{F} \end{aligned}$$

Si un système linéaire reçoit en entrée une fonction harmonique, qu'on peut écrire comme partie réelle d'une fonction complexe $\hat{F}e^{i\omega t}$, la réponse du système est donnée par une fonction harmonique de même pulsation, dont l'amplitude et la phase dépendent de la pulsation ω et peuvent être déterminés à partir de celles d'entrée grâce à la fonction de transfert $T(\omega)$. Si on écrit la fonction en sortie sous forme complexe, soit $\hat{x}e^{i\omega t}$, alors on a $\hat{x} = T(\omega) \hat{F}$, et l'amplitude et la phase de \hat{x} correspondent à l'amplitude et au déphasage de $x(t)$.

²On rappelle que le nombre complexe $z = 1/(a + ib)$ peut s'écrire comme $(a - ib)/(a^2 + b^2)$ et que, par conséquent, module et phase s'obtiennent par $|z| = |(a - ib)/(a^2 + b^2)| = 1/\sqrt{a^2 + b^2}$, $\arg z = \arg(a - ib) = \arctan(-b/a)$.

2.3 La résonance

Comme indiqué par l'équation 2.13, l'amplitude de $x(t)$ dépend de l'amplitude de la fonction en entrée, F_0 , et de sa pulsation ω . Le module de la fonction de transfert $|T(\omega)|$ donne le rapport entre ces deux amplitudes. Le tracé de $|T(\omega)|$ s'appelle **courbe de résonance**. La figure 2.2 en présente plusieurs exemples associés à différentes valeurs du coefficient d'amortissement γ . Pour les systèmes très amortis, (grand γ), la courbe

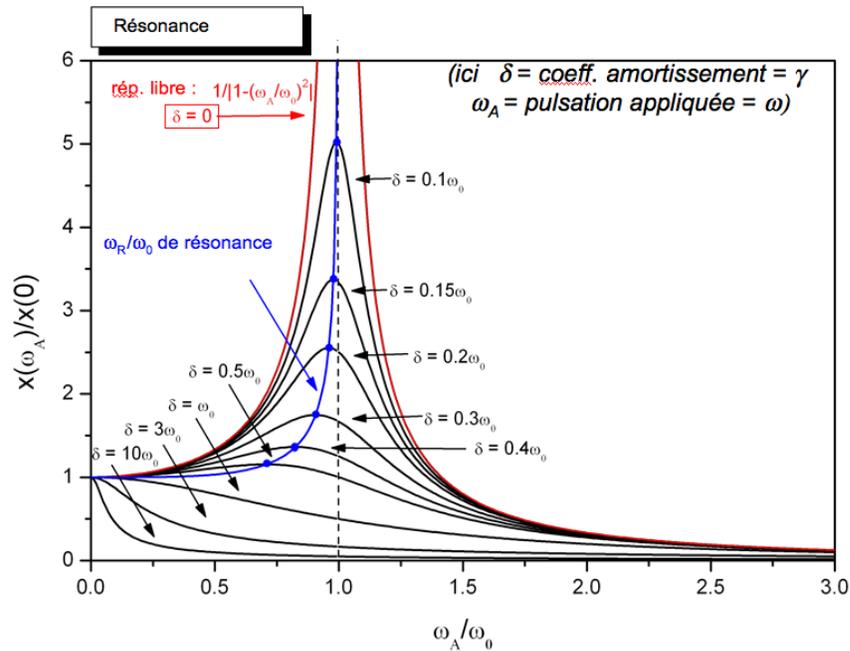


FIG. 2.2 – Courbes de résonance en fonction de ω/ω_0 pour des différentes valeur de γ (noté δ sur la figure).

est toujours décroissante : l'amplitude de sortie est égale à l'amplitude d'entrée pour $\omega = 0$ (c'est-à-dire pour une force constante, non oscillante) et décroît ensuite avec la pulsation. Pour de plus faibles amortissements, au contraire, la réponse augmente d'abord avec ω , et atteint un maximum lorsque la pulsation est égale à une pulsation ω_R dite **pulsation de résonance** et donnée par

$$\omega = \omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2m^2\omega_0^2}} \quad \text{pulsation de résonance.} \quad (2.19)$$

La pulsation de résonance est toujours inférieure à ω_0 mais s'approche de ω_0 pour des amortissements faibles. Elle n'atteint ω_0 que pour $\gamma = 0$, et dans ce cas particulier l'amplitude devient infinie, comme nous l'avons trouvé précédemment. Comment interpréter les tracés de la figure 2.2? Tout simplement, l'oscillateur est déjà capable d'osciller à sa pulsation propre ω_0 si on le déplace de sa position d'équilibre. Le système forcé se comporte alors comme une balançoire qu'on pousse. Si la sollicitation extérieure vient le pousser toujours dans le bon sens, c'est-à-dire en phase avec sa propre oscillation, son

oscillation sera entretenue : la force extérieure transfère à l'oscillateur l'énergie nécessaire à compenser (et dépasser) les pertes par dissipation, d'autant plus qu'elle est en phase avec l'oscillation propre. Par contre, si la pulsation de $F(t)$ est très différente de la pulsation propre ω_0 , la force va plutôt ralentir le mouvement de l'oscillateur car son action sera autant de le pousser que de le freiner, et l'amplitude en sortie sera faible. Le pic de résonance correspond donc à un couplage constructif entre force extérieure et oscillateur.

L'étalement du pic de résonance sur la figure 2.2 dépend aussi des conditions de résonance. La largeur du pic à mi-hauteur $\Delta\omega$ peut être calculée et vaut environ γ/m . Typiquement, on compare $\Delta\omega$ à la pulsation de résonance, en définissant le **facteur de qualité**

$$Q = \frac{\omega_R}{\Delta\omega} \simeq \frac{\omega_0}{\gamma/m} \quad \text{facteur de qualité,} \quad (2.20)$$

où on a utilisé l'approximation $\omega_R \simeq \omega_0$. Pourquoi définir ce paramètre ? On compare la pulsation de résonance avec la largeur du pic, autrement dit à la "résolution" avec laquelle on peut déterminer sa position. Si on effectue une mesure de la courbe de résonance d'un système physique, on pourra donc identifier la pulsation de résonance (et donc la pulsation propre) du système avec une incertitude d'autant plus petite que la largeur du pic $\Delta\omega$ est faible et le facteur de qualité Q grand. Rappelons-nous en effet que l'oscillateur harmonique n'est qu'un modèle pour tous les systèmes physiques oscillants, et que la détermination de la fréquence propre peut donner des informations précieuses sur les paramètres physiques propres à ces systèmes ! D'autre part, la détermination de Q donne accès à un autre paramètre physique important, l'amortissement γ : nous avons ainsi un double outil pour explorer la nature physique d'un système par sa réponse à une sollicitation. L'étude de la courbe de résonance est en effet une opération qu'on fait souvent en physique expérimentale, pour étudier un système physique d'intérêt mais aussi pour déterminer la réponse d'un instrument de mesure. Un instrument de mesure est lui aussi un système sensible à une sollicitation extérieure, dont on mesure la réponse : dans ce cas, la facteur de qualité permet d'estimer la précision de l'instrument.

2.4 Diagramme de Bode

Terminons ce chapitre par un dernier point un peu plus technique concernant la manière de représenter la fonction de transfert du système $T(\omega)$.

Pour commencer, nous avons tracé son amplitude (la courbe de résonance) mais pas sa phase $\theta_T(\omega)$. L'équation 2.14 nous permet de la calculer : on a $\theta_T(0) = \arctan(0) = 0$ et pour $\omega \rightarrow \omega_0^-$ on trouve $\theta_T(\omega) = -\arctan(\infty) = -\pi/2$. Il faut maintenant raccorder cette partie de la solution $\theta_T(\omega)$ à une deuxième partie définie en (ω_0+, ∞) de manière à avoir une fonction continue, ce qui demande d'aller chercher la solution sur une autre branche de la fonction multivaluée arc-tangente. On prendra donc $\theta_T(\omega_0+) = -\pi/2$ en se plaçant sur la branche immédiatement inférieure de la fonction, et pour $\omega \rightarrow \infty$ on aura donc $\theta_T(\omega) \rightarrow -\pi$.

Nous avons une première représentation graphique de la fonction de transfert avec les figures 2.2 et 2.3. Cependant, une représentation particulière, dite **diagramme de Bode**, est souvent utilisée (pas seulement pour l'oscillateur), car particulièrement adaptée à

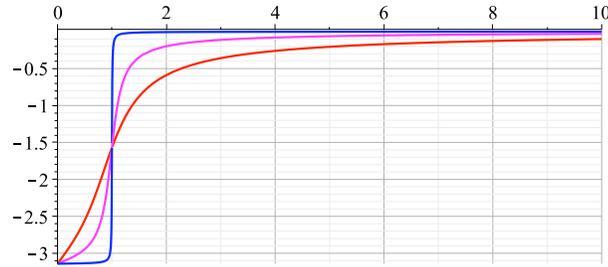


FIG. 2.3 – Phase $\theta_T(\omega)$ de la fonction de transfert de l'oscillateur forcé amorti en fonction de ω/ω_0 pour $\gamma/m = 0.01$ (courbe bleue), 0.3 (courbe rose) et 1 (courbe rouge).

repérer rapidement les caractéristiques essentielles de la fonction. Il s'agit de représenter la pulsation ω (on utilise parfois la pulsation réduite ω/ω_0) sur une échelle logarithmique à base 10, puis de représenter le module $|T(\omega)|$ en **décibels**, alors que la phase reste en échelle linéaire. Par définition, exprimer une grandeur en décibels consiste à prendre 20 fois son \log_{10} , et on a donc :

$$\begin{aligned}\omega &\rightarrow \log_{10} \omega \\ |T(\omega)| &\rightarrow 20 \log_{10} |T(\omega)| \quad (\text{décibels}) \\ \theta_T(\omega) &\rightarrow \theta_T(\omega)\end{aligned}$$

Les avantages de cette représentation sont multiples. D'une part, elle permet de visualiser plusieurs ordres de grandeurs de la pulsation sur un même graphe, par exemple du dixième, centième ou millième de ω_0 jusqu'à 100 ou 1000 ω_0 . D'autre part, le pic de résonance (s'il y en a un) est clairement visible : $|T(\omega)|$ en décibels est positif seulement lorsqu'il est supérieur à 1, donc en correspondance du pic de résonance ($|T(\omega)|$ en décibels vaut 0 en $\omega = \omega_0$ et devient négatif dès que l'amplitude en sortie devient inférieure à celle en entrée, pour $\omega \rightarrow \infty$). Enfin, et c'est peut-être la principale raison pour ce choix, la décroissance de $|T(\omega)|$ en $1/\omega^2$ donne une dépendance linéaire pour $20 \log_{10} |T(\omega)|$ pour $\omega \rightarrow \infty$. De plus, comme on verra plus tard, nous serons amenés à étudier les fonctions de transfert d'autres systèmes physiques dont la décroissance plus ou moins rapide, par exemple en $1/\omega$ ou $1/\omega^3$. Le choix des décibels permet alors d'identifier tout de suite l'allure de cette décroissance, car elle est liée directement à la *pente* de la droite pour $20 \log_{10} |T(\omega)|$: en effet,

- Si $|T(\omega)| \sim (\frac{\omega}{\omega_0})^{-1}$, alors $20 \log_{10} |T(\omega)| \sim -20 \log(\frac{\omega}{\omega_0})$ et $\theta_T(\infty) - \theta_T(0) = \pi$;
- Si $|T(\omega)| \sim (\frac{\omega}{\omega_0})^{-2}$, alors $20 \log_{10} |T(\omega)| \sim -40 \log(\frac{\omega}{\omega_0})$ et $\theta_T(\infty) - \theta_T(0) = 2\pi$;
- Si $|T(\omega)| \sim (\frac{\omega}{\omega_0})^{-3}$, alors $20 \log_{10} |T(\omega)| \sim -60 \log(\frac{\omega}{\omega_0})$ et $\theta_T(\infty) - \theta_T(0) = 3\pi$;
- ...

Par conséquent on a, pour $\omega \rightarrow \infty$, une droite de pente -20, -40, -60 selon la rapidité de la décroissance de la fonction de transfert³.

³On parle en effet de **filtre** (on reviendra sur ce terme) de **premier, deuxième, troisième ordre** pour ces cas respectivement, pour indiquer la rapidité avec laquelle la fonction de transfert, et donc l'amplitude du signal-réponse du système, s'annule pour les grandes fréquences.

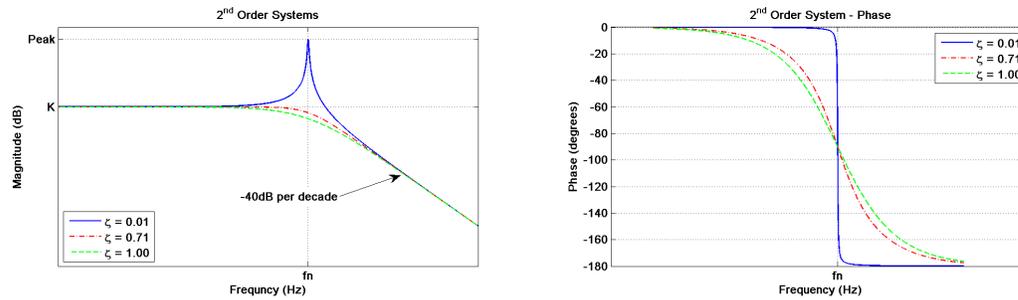


FIG. 2.4 – Diagramme de Bode pour l'oscillateur forcé amorti pour trois valeurs différent de l'amortissement (indiqué ici par le symbole ζ).

Le diagramme de Bode pour l'oscillateur forcé amorti est représenté sur la figure 2.4. On remarque encore, pour finir, que dans le cas où il n'y a pas de résonance, le point $\omega = \omega_0$ apparaît comme une sorte de coude dans le diagramme du module de la fonction de transfert, qui sépare la région où $|T(\omega)| \sim 1$ et $20 \log_{10}|T(\omega)| \sim 0$ (amplitude en sortie égale à l'amplitude en entrée), de celle où l'amplitude décroît vers zéro (partie linéaire en décibels).

2.5 Résonances dans la nature

Nous venons d'étudier le phénomène de la résonance dans le cas de l'oscillateur mécanique. Ce phénomène est observé dans beaucoup de systèmes naturels. Mesurer la fréquence de résonance et la largeur du pic nous donne des informations sur les paramètres physiques du système.

Les exemples sont nombreux, et incluent tous les systèmes oscillants que nous avons mentionnés. On trouve d'autres exemples intéressants par exemple dans le "Cours de physique" de Feynman, qui partent du niveau atomique et sub-atomique pour aller jusqu'à des plus grandes échelles. On y trouve par exemple le cas de l'absorption du rayonnement électromagnétique par un cristal. Dans ce cas, seule la lumière de fréquence proche à la fréquence de résonance des ions du cristal est absorbée (et utilisée pour les mettre en mouvement). La même chose advient pour un atome ionisé ou une molécule qui vibre. Je conseille très fortement la lecture des chapitres 22 à 25 du Feynman. Tout y est très bien expliqué. C'est une lecture très instructive qui demande un peu de patience mais permet d'aller en profondeur dans la compréhension physique des phénomènes dont nous avons parlé dans ce cours.

Chapitre 3

L'étude expérimentale d'un système physique : la chaîne de mesure

Une fois qu'on a réussi à mettre en mouvement un système oscillant, comment cette oscillation se transmet au milieu environnant ? Comment peut-on la "capturer" pour la mesurer ? Et enfin, que devient le signal ainsi capturé, comment peut-on le transmettre, le décrire ? Ces questions nous amènent à aborder la question la construction d'une chaîne de mesure.

Cette dernière opération est le problème de la *mesure physique* : l'obtention d'un signal issu d'un système physique au moyen d'un instrument et son étude. Nous allons voir quelles sont les étapes de cette opération.

Concrètement, on a besoin de construire une **chaîne de mesure**, dont la structure typique est la suivante :

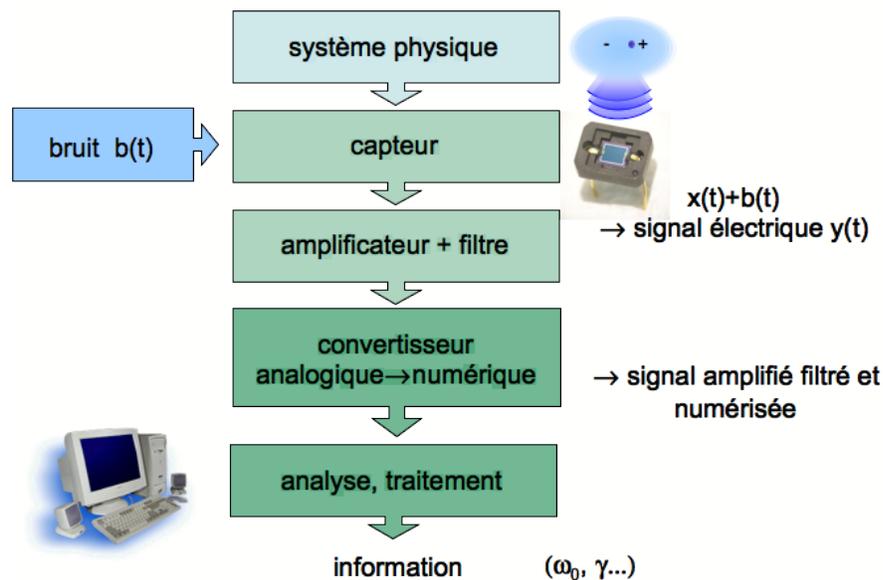


FIG. 3.1 – La chaîne de mesure.

Chaque étape mérite une discussion. Et chaque étape est en quelque sorte liée à une partie du cours : le plan du cours pourrait se résumer à cette chaîne !

3.1 Le signal physique

Dans notre étude de l'oscillateur forcé, nous avons entrepris de décrire un système physique comme un objet qui reçoit une sollicitation par une force extérieure *en entrée* et répond par un signal mesurable *en sortie*. Que la sollicitation soit présente dans la nature (exemple : attraction lunaire (entrée) qui cause les marées (réponse)) ou bien appliquée par un opérateur (exemple : polarisation d'un atome), on a donc un signal en sortie qu'on peut essayer d'attraper et d'étudier. Si dans certains cas le signal en sortie peut être mesuré directement (position d'une masse attachée à un ressort, niveau de la mer, température d'un corps) dans d'autre cas, comme par exemple pour l'oscillation des charges dans un atome, la mesure ne peut être directe. Mais l'oscillation des charges dans un atome a une conséquence mesurable : la création d'une onde électromagnétique qui se propage dans l'espace environnant, et qui peut être capté par exemple grâce à une photodiode. La production d'une onde qui se propage est souvent en cause dans le processus de mesure : il peut s'agir d'une onde sonore, d'une onde électromagnétique (lumineuse ou pas), d'une onde transversale se propageant le long d'une corde ou à la surface d'un liquide, etc. Dans tous les cas, pour pouvoir étudier un système physique, il est nécessaire en premier lieu de disposer d'une grandeur mesurable liée au phénomène physique qui nous intéresse.

On appelle **signal physique** la grandeur qu'on souhaite mesurer et qui contient de l'information utile. Le plus souvent c'est une grandeur variable au cours du temps. D'autres exemples sont : onde électromagnétique radio ou télécom, dont on veut extraire une information transmise ; pression atmosphérique au sol ; son émis par un animal ; taux d'ozone dans l'atmosphère. Ces signaux sont censés nous renseigner sur le système d'intérêt. Il faut donc les enregistrer, puis les traiter de sorte à en sortir l'information cherchée de la manière la plus efficace possible.

Les signaux physiques peuvent avoir des caractéristiques diverses. Ils sont en général **analogiques**, c'est-à-dire continus dans le temps, mais on a souvent affaire à des signaux **numériques**, suites discrètes de valeurs, soit parce que le signal d'origine a été échantillonné (on a parlera plus tard), soit parce qu'on s'intéresse à un phénomène intrinsèquement discret, comme par exemple la suite temporelle des cotations d'une action en bourse ou des températures minimales journalières dans une région. Un signal peut être **déterministe**, c'est-à-dire prévisible, qui suit une loi connue, comme par exemple le signal électrique fourni par un générateur qu'on aurait réglé à une certaine amplitude et fréquence, mais aussi **aléatoire**, non prévisible, issue d'un processus contenant une part de hasard, pour laquelle on peut seulement donner la probabilité d'obtenir une certaine valeur à un temps donné. On reparlera de ces aspects plus loin.

3.2 Le capteur

Le capteur est un instrument possédant une caractéristique mesurable qui est sensible à la grandeur physique qu'on veut mesurer. Par exemple, si on veut mesurer le taux d'ozone dans l'atmosphère, on pourra utiliser un dispositif qui émet de la lumière dans la bande d'absorption de l'ozone, l'envoie vers un échantillon d'air puis enregistre

l'intensité de la lumière transmise. Une photodiode pourra par exemple être utilisée pour mesurer cette intensité. Le fonctionnement d'une photodiode est basée sur une jonction semi-conducteur dont les caractéristiques courant-tension sont modifiées par les photons incidents, et permet donc de traduire l'intensité lumineuse incidente en signal électrique.

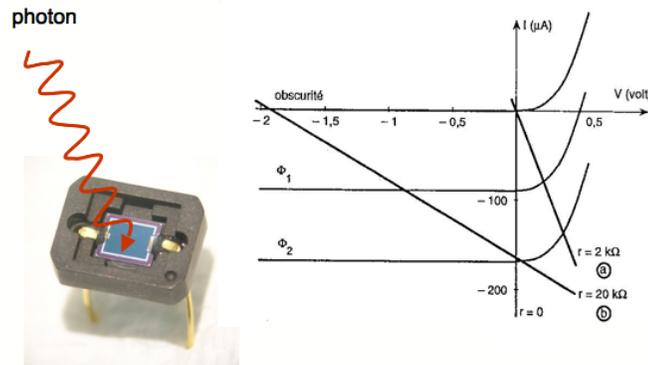


FIG. 3.2 – Photodiode et ses caractéristiques courant-tension.

Un autre exemple simple de capteur est le microphone (figure 3.3). Pour enregistrer les variations de pression qui caractérisent la propagation d'un son, on utilise une membrane qui vibre sous l'effet de la vibration de l'air environnant (il s'agit précisément d'un oscillateur mécanique forcé!). La membrane est solidaire d'une bobine placée dans un champ magnétique. Les vibrations de la membrane sont transmises à la bobine, ce qui engendre un courant électrique qu'on peut enregistrer.

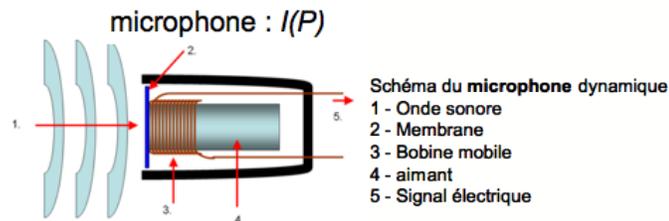


FIG. 3.3 – Schéma d'un microphone.

Un troisième exemple : la thermistance (figure 1.2). Ce dispositif exploite la variation de résistance électrique de certaines céramiques en fonction de la température. Les variations de résistance entraînent une modulation du courant électrique qui donne le signal enregistré.

Comme on le voit dans ces exemples, une caractéristique commune à la plupart des capteur est de traduire le signal issu de la variable à mesurer en signal électrique, plus facile à transmettre, traiter et sauvegarder. Une autre remarque est que, pour le cas des signaux électromagnétiques, le capteur est en général sensible à l'énergie transportée par le signal et pas directement aux champs : cela implique que seule l'amplitude (au carré) du signal peut être mesurée, et pas sa phase.

Remarquons aussi que, très souvent, le couplage entre le système physique oscillant et le milieu extérieur, dont nous avons parlé à propos de la propagation des ondes, joue un rôle fondamental dans le processus de mesure : c'est la propagation du signal dans l'espace environnant (onde lumineuse, sonore, diffusion thermique) qui permet de le transporter jusqu'au capteur et donc de le mesurer. Ce couplage n'est jamais parfait, ce qui limite la précision de la mesure et est source de bruit (voir 3.3).

Il est important, lors du choix d'un capteur pour une expérience donnée, de tenir compte de ses **caractéristiques principales**, et particulièrement :

- l'intervalle de fonctionnement : ses valeurs mesurables minimum et maximum, qui en limitent évidemment l'usage à une plage de valeurs ;
- la linéarité : la proportionnalité entre signal d'entrée et signal de sortie, qui n'est pas une caractéristique indispensable mais en facilite l'usage ; on doit dans tous cas savoir si le capteur est linéaire ou pas dans la gamme de valeurs qu'on souhaite mesurer ;
- la précision : la plus petite différence mesurable entre deux valeurs proches ;
- le temps de réponse : la rapidité de la réponse du capteur à la sollicitation, le retard de sa réponse, qui en limite l'usage dans le cas de mesure de grandeurs rapidement variables dans le temps.

Il est donc évident que le choix d'un capteur approprié est fondamental pour la réussite d'une mesure !

3.3 Bruit

L'opération de conversion en signal électrique n'est pas parfaite. La génération d'un signal électrique est toujours soumise à des *fluctuations aléatoires*, d'origines diverses, comme par exemple

- l'agitation thermique des charges électriques dans les conducteurs (bruit "Johnson")
- le caractère discret (quantique) de la charge électrique : un courant électrique n'est pas réellement une quantité continue car il doit pouvoir se réduire à un nombre d'électron par seconde. Le courant réel à un instant donné peut donc différer du courant moyen (qui lui peut être non entier), ceci impliquant une fluctuation (bruit "Shot noise").

On parle pour ces deux cas de bruit fondamental, car ce sont des caractéristiques inévitables et intrinsèques à la mesure du signal électrique.

A ces causes de fluctuations il faut ajouter toute source de fluctuation due au couplage imparfait du capteur au système physique étudié, à l'interférence d'autres systèmes voisins, aux vibrations mécaniques, etc., en général à toutes les imperfections du procédé de mesure, qui peuvent en général être améliorées mais difficilement éliminées. On parle alors de bruit environnemental.

L'effet commun de toutes ces causes est d'introduire une variabilité aléatoire dans le signal de mesure, qu'on appelle *le bruit*. Comment décrit-on un bruit ? En général, c'est

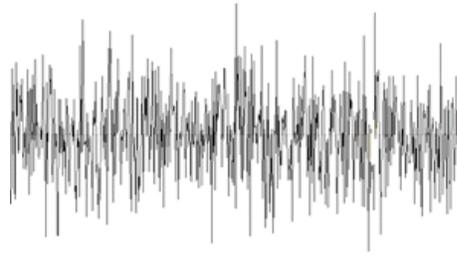


FIG. 3.4 – Bruit thermique : la valeur quadratique moyenne des fluctuations de la tension v aux bornes d'une résistance R est donnée par la relation de Nyquist $\bar{v}^2 = 4 k_B T R \Delta f$, où Δf est la bande passante considérée.

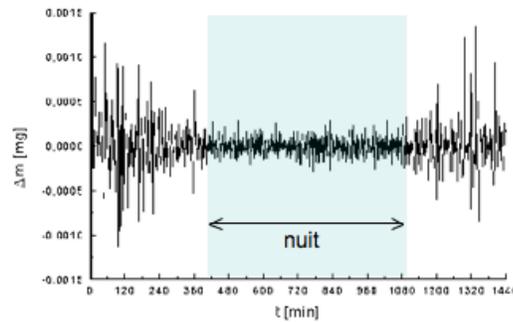


FIG. 3.5 – Exemple de bruit environnemental : les vibrations mécaniques enregistrées dans un laboratoire, dues particulièrement au passage de voitures et au fonctionnement d'autres appareils dans les alentours, diminue sensiblement au cours de la nuit.

un signal aléatoire, c'est-à-dire un signal qui ne peut pas être décrit parfaitement mais dont on a seulement une connaissance statistique. On peut donner sa valeur moyenne, son écart type, d'autres caractéristiques statistiques de son allure, mais on ne peut pas prévoir sa valeur exacte à un instant donné. C'est un type de signal important qui nous occupera à la fin du cours. Il est intéressant aussi de remarquer que dans beaucoup de cas le signal physique qui nous intéresse est lui-même un signal aléatoire : pensons par exemple à la mesure de la température moyenne annuelle sur Terre, ou bien au signal enregistré lors d'un électroencéphalogramme, ou bien à un signal radio. Il s'agit bien sûr de signaux qui contiennent une information bien précise et qui résultent d'un phénomène physique bien identifié, mais qui sont partiellement imprévisibles, ou tellement compliqués qu'on ne peut en avoir qu'une connaissance partielle.

Lors d'une mesure, le signal intéressant $x(t)$ est mélangé à du bruit, qu'on indiquera par $b(t)$. Dans beaucoup de cas, mais pas toujours, le bruit est *additif*, c'est-à-dire qu'il se somme simplement au signal d'intérêt. A l'issue de la mesure on obtient un signal

$$y(t) = x(t) + b(t). \quad (3.1)$$

La question se pose donc de comment "séparer" le signal intéressant du bruit. Selon le

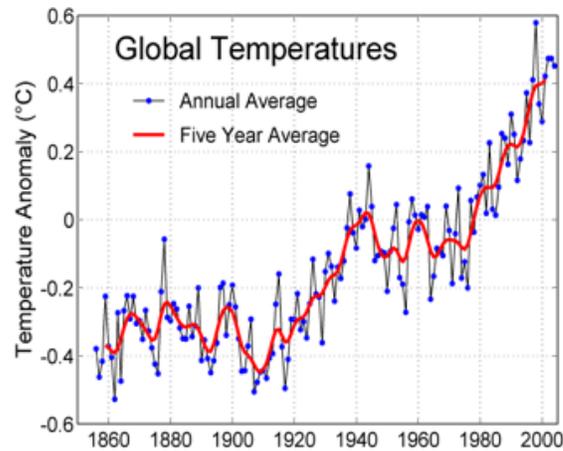


FIG. 3.6 – Exemple de signal aléatoire : une estimation des fluctuations de température sur la terre au cours des ans : moyennes annuelles (en bleu) et sur 5 ans (en rouge).

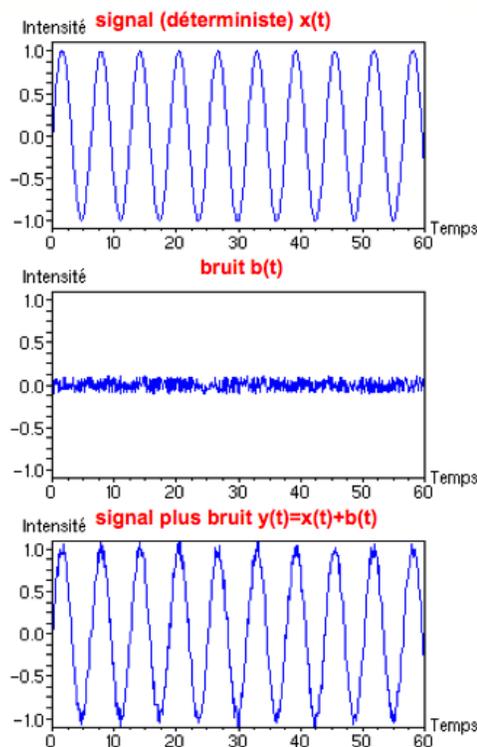


FIG. 3.7 – Un exemple de signal plus bruit.

type de bruit, des méthodes différentes peuvent être utilisées afin de réduire la part de bruit ou, en d'autres mots, d'améliorer le **rapport signal sur bruit**. Typiquement, ce qu'on cherche à faire est une opération de **filtrage**.

3.4 Filtre + Amplificateur

Dans le cas d'un signal électrique bruité $y(t)$, un filtre est en général un circuit électrique qui reçoit le signal $y(t)$ en entrée et donne en sortie un signal modifié $s(t)$, pour lequel on espère avoir un meilleur rapport signal sur bruit. Pour cela, on cherche à amplifier la partie intéressante du signal, que nous avons appelé $x(t)$, et à atténuer le bruit $b(t)$. Nous allons étudier dans le détail quelques filtres électriques simples, ce qui nous permettra de mieux comprendre leur fonctionnement. Il n'existe pas que des filtres électriques : on peut filtrer un signal lumineux pour en isoler une composante (une longueur d'onde) par une gélatine colorée ou, pour une meilleure résolution, utiliser un filtre interférentiel.

Remarquons que les filtres et les capteurs sont eux aussi des systèmes physiques, qui répondent à un signal d'entrée en générant un signal de sortie ! Si le filtre ou le capteur sont *linéaires*, alors leur effet sur le signal en entrée peut être décrit par une EDL exactement comme pour le cas d'un système physique. Leur comportement peut être déterminé par les mêmes méthodes. Un filtre ou un capteur linéaires sont donc aussi décrit par une fonction de transfert $T(\omega)$, ce qui veut dire, comme nous l'avons vu, que leur réponse dépendra non seulement de l'intensité du signal en entrée, mais aussi de sa fréquence, s'il s'agit d'un signal oscillant. On peut donc construire des filtres électriques qui "laissent passer" les oscillations de faible fréquence et pas celles à haute fréquence, ou le contraire, ou bien qui sont "transparents" pour des fréquences intermédiaires mais coupent les basses et les hautes fréquences. On parle ainsi de filtres **passé-bas**, **passé-haut**, **passé-bande** (ou encore **coupe bande** s'ils atténuent le signal dans une fenêtre de fréquences). On peut ainsi imaginer une méthode de filtrage efficace pour les cas où le signal qui nous intéresse oscille sur des fréquences bien différentes des fréquences caractéristiques du bruit additif. Il suffit de faire passer le signal par un filtre qui coupe les fréquences caractéristiques du bruit et laisse passer (ou, encore mieux, amplifie) les autres pour récupérer le signal intéressant presque sans bruit ! Dans l'exemple de la figure 3.7, par exemple, on voit que le bruit varie de manière beaucoup plus rapide, et donc sur des fréquences plus élevées que le signal $x(t)$: un filtre passé-bas fera l'affaire.

Malheureusement, les choses ne sont pas souvent si simples. Le bruit thermique, par exemple, qui est un bruit fondamental et donc impossible à éliminer au niveau du capteur, est un bruit dit "large-bande". Ses fluctuations font intervenir un grand nombre de fréquences différentes en même temps, des plus faibles aux plus élevées. L'opération de filtrage devient donc beaucoup plus complexe. Mais pas impossible : il faut dans ce cas utiliser toutes les informations "théoriques" qu'on a sur le signal cherché pour l'extraire du signal bruité. Ces techniques de filtrage font l'objet de la théorie du traitement du signal et nous ne les aborderons pas dans ce cours.

3.5 Conversion analogique-numérique

Imaginons que nous avons conçu un filtre permettant l'extraction du signal physique d'intérêt. C'est un signal analogique, c'est-à-dire qu'il varie dans le temps de manière continue dans un intervalle de valeurs. Pour pouvoir le traiter avec un ordinateur, il

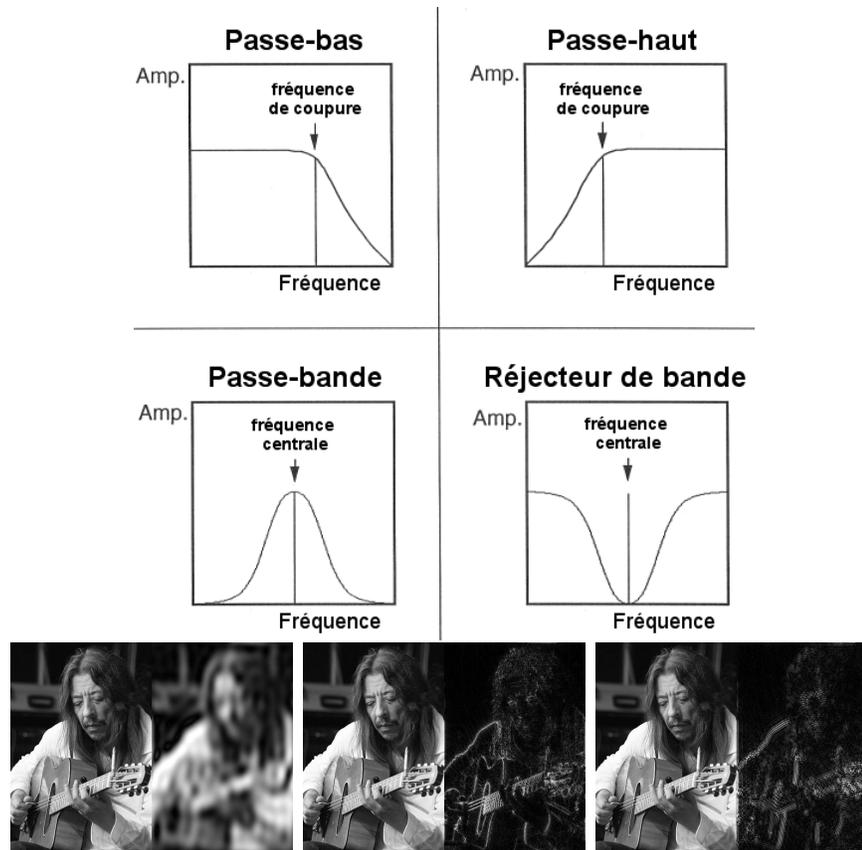


FIG. 3.8 – Transmittance des principales filtres. Application de filtres passe bas, passe haut et passe bande (dans l'ordre) à une image.

faut cependant le rendre numérique (digital) : générer à partir de sa valeur analogique, une valeur numérique (codée sur plusieurs bits), proportionnelle à la valeur analogique entrée. En effet, l'ordinateur travaille seulement sur des nombres binaires, et peut donc représenter seulement un nombre fini de valeurs discrètes (avec N bits on peut représenter 2^N valeurs entre une valeur minimum et une maximum). La conversion analogique-numérique consiste à la fois à **discrétiser le signal**, c'est à dire recueillir la valeur du signal à des temps donnés, espacés d'un intervalle de temps fini, et à le **quantiser**, c'est-à-dire approcher son amplitude, point par point, en la représentant sur un ensemble fini de valeurs possibles. Le signal est alors numérisé¹ ("digitalisé").

Evidemment, cette conversion peut faire perdre de l'information sur le signal, et entraîner donc des conséquences négatives sur le processus de mesure. Cependant, cette perte d'information peut être évitée si on effectue la conversion analogique-numérique

¹Un signal échantillonné et numérisé est une suite de valeurs discrètes, comme dans la figure 3.9. Cependant, on peut parfois avoir affaire à un signal digitalisé mais continu dans le temps. C'est par exemple ce qu'on obtient en faisant suivre à l'échantillonnage d'un signal l'action d'un **bloqueur**. En effet, une fois le signal filtré et échantillonné, pour pouvoir réaliser la quantification, on doit maintenir constant la valeur à quantifier afin de permettre au convertisseur analogique-numérique de traiter l'échantillon et de le numériser. On appelle cette opération le blocage. Si le temps de blocage est égal au pas d'échantillonnage, on a donc un signal généralement non nul pour tout instant t .

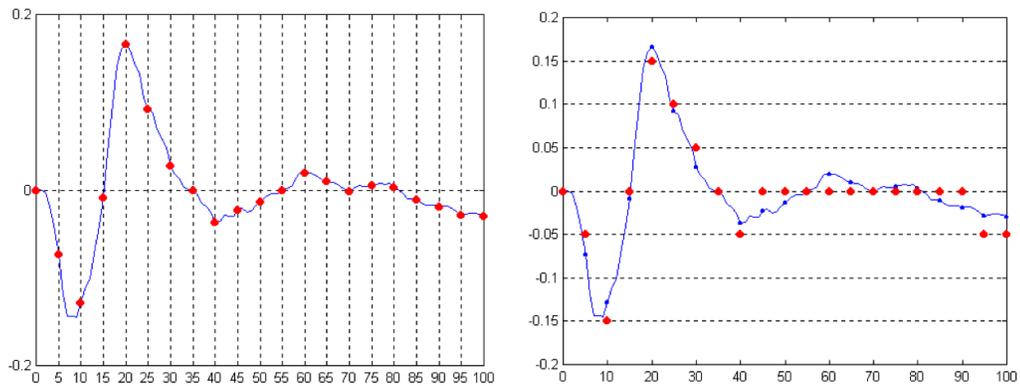


FIG. 3.9 – Discretisation puis quantisation d'un signal analogique.

en suivant quelques règles fondamentales. Nous allons étudier par quelles méthodes on peut reconnaître les éventuels problèmes qui en suivent et les éviter (ou limiter) dans le chapitre sur l'échantillonnage des signaux.

Quels sont les avantages de la numérisation du signal ? D'une part, nous l'avons dit, cela permet de le traiter par ordinateur. D'autre part, le signal numérique présente aussi une stabilité beaucoup plus importante quand il est transmis ou enregistré. Une fois le signal traduit en bits, l'effet d'un éventuel bruit qui s'y rajouterait devient négligeable.

3.6 Analyse et traitement du signal

Finalement, comment interpréter un signal ? Pour l'instant, nous nous sommes limités à des cas très simples de phénomènes physiques. Pour un système linéaire la réponse à un signal sinusoïdal en entrée est un signal sinusoïdal de même fréquence en sortie. Nous nous sommes contentés de mesurer son amplitude et sa phase. Mais les signaux physiques ne sont pas toujours si simples ! La figure 3.10 par exemple montre les signaux issus de la prononciation des trois voyelles A, I et O, chantées sur une même note, une fois traduits en signal électrique. On note que ce sont des signaux périodiques plus complexes qu'une simple sinusoïde. Comment est-il possible d'étudier ces signaux, de

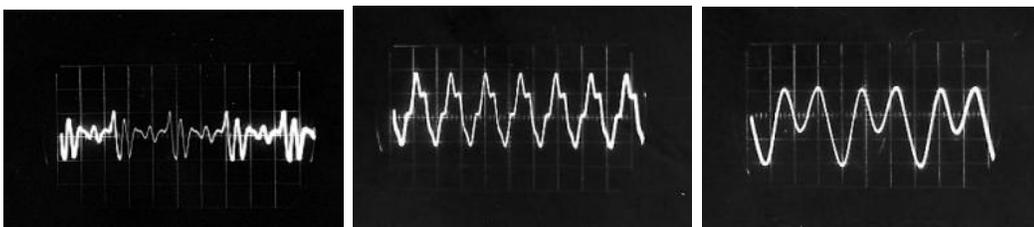


FIG. 3.10 – Signaux issus des voyelles A, I, O.

les comparer entre eux de manière pertinente ? Des méthodes d'analyse sont nécessaires pour les distinguer et reconnaître laquelle des trois voyelles est chantée, ou de montrer que les trois sont sur une même note. Ce problème fera l'objet du chapitre 5, et nous

permettra d'introduire un concept clé de notre parcours : la *décomposition de Fourier*. Plus tard, nous généraliserons ce concept aux signaux non périodiques et nous serons alors en mesure d'étudier des signaux plus complexes.

Chapitre 4

Analogie mécanique-électrique : les circuits électriques

Nous avons vu qu'une mesure consiste à capter un signal physique, le traduire en signal électrique, puis lui faire subir un certain nombre de transformations. Nous avons vu aussi que les capteurs et les filtres sont des systèmes physiques se comportant comme des "boîtes" qui reçoivent un signal en entrée et délivrent un signal en sortie :



Les filtres que nous considérerons sont des circuits électriques. Il existe des liens et des analogies fortes entre le comportement de ces circuits électriques et d'autres systèmes physiques. Comme d'ailleurs nous l'avons déjà remarqué, plusieurs systèmes appartenant à des différentes branches de la physique peuvent avoir un comportement similaire. Les circuits électriques que nous allons étudier jouent un rôle actif dans la chaîne de mesure, mais représentent aussi des systèmes physiques modèles, faciles à mettre en place et à étudier, dont le comportement est similaire à celui de systèmes physiques plus difficiles à manipuler. C'est aussi pour cela que nous allons nous intéresser aux circuits électriques. Après quelques rappels d'électricité, nous discuterons en détail l'analogie entre l'oscillateur mécanique et le circuit RLC.

4.1 Les circuits électriques : rappels

L'étude théorique d'un circuit est basée sur les lois de l'électromagnétisme. Les grandeurs physiques recherchées sont habituellement le courant¹ i qui circule dans un élément et la tension (ou différence de potentiel) e aux bornes de cet élément. Un élément

¹Nous utilisons dans ce chapitre la même notation, i , pour le courant électrique et pour le complexe unitaire. Le contexte devrait cependant permettre de les distinguer facilement !

de circuit linéaire satisfait la relation :

$$e(i_1 + i_2) = e(i_1) + e(i_2) \quad (4.1)$$

Nous utiliserons la convention suivante : soit A et B deux points qui bornent un élément du circuit. Soit i le courant qui circule dans l'élément de A vers B et soit v_n le potentiel au point n . La différence de potentiel e aux bornes de l'élément est alors

$$e \equiv v_B - v_A \quad (4.2)$$

tandis que la chute de tension v aux bornes de cet élément s'écrit

$$v \equiv v_A - v_B. \quad (4.3)$$

Tout élément d'un circuit linéaire peut s'écrire comme une combinaison de trois éléments de base : résistance R, capacitance C et inductance L. Le tableau donne les définitions de ces quantités et leurs relations avec le courant et la tension.

Quantité	Symbole	Unité	Symbole	Correspondance
Charge	q	coulomb	C	
Courant	i	ampère	A	Cs^{-1}
Tension	v (ou e)	volt	V	JC^{-1}
Résistance	R	ohm	Ω	$VA^{-1} = JsC^{-2}$
Capacitance	C	farad	F	$CV^{-1} = C^2J^{-1}$
Inductance	L	henry	H	$VsA^{-1} = Js^2C^{-2}$
Puissance	P	watt	W	$VA = Js^{-1}$

Un courant sera normalement activé dans un circuit lorsqu'une tension e y est appliquée. Si e varie avec le temps, de même i dépendra du temps. On note souvent les grandeurs qui varient dans le temps par des lettres minuscules (v , i , e), les grandeurs constantes par des lettres majuscules (V , I , E).

4.1.1 Lois de Kirchhoff

La première loi de Kirchhoff, ou **loi des nœuds**, établit l'interdépendance des courants en un nœud, ou point de jonction, d'un circuit : en tout temps, la somme algébrique des courants arrivant à un nœud est nulle,

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0 \quad (4.4)$$

C'est une application de la loi de la conservation de la charge : puisque la charge ne peut être créée ni détruite, le flux total de charge (le courant) vers le nœud est nul.

La deuxième loi de Kirchhoff ou **loi des mailles** est une application de la loi de conservation de l'énergie. Si l'on déplace une charge le long d'une maille d'un circuit et qu'on la ramène à son point de départ, la somme des changements de potentiel ressentis

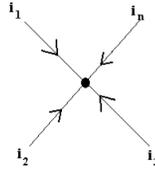


FIG. 4.1 – Loi des nœuds.

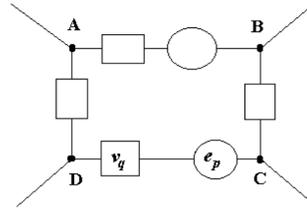


FIG. 4.2 – Loi des mailles.

par cette charge doit être nulle. La figure représente une telle maille entrant dans la constitution du circuit où A, B, C et D représentent des nœuds. Les petits rectangles sont les éléments du circuit. On a également fait figurer une source de tension externe e sur la branche DC. Supposons qu'il y a n éléments dans la maille. Un nombre l de ceux-ci sont associés à une différence de tension e_p et un nombre m à une chute de tension v_q , avec $l + m = n$. La seconde loi de Kirchhoff s'écrit :

$$\sum_{p=1}^l e_p + \sum_{p=1}^m v_p = 0 \quad \text{(Loi des mailles)} \quad (4.5)$$

c'est-à-dire que la somme des différences de potentiel est égale à la somme des chutes de tension pour tout trajet fermé.

4.1.2 Éléments de circuit

Comme on l'a dit plus haut, tout circuit linéaire peut être représenté comme une combinaison de résistances, capacitances et inductances pures. La loi d'Ohm s'applique aux résistances mais pas aux deux autres sortes d'éléments, qu'on appelle éléments réactifs. Voyons comment écrire les relations entre courant et tension pour ces éléments.

Résistance. La loi d'Ohm établit la relation entre le courant i circulant dans une résistance pure R à l'instant t et la tension v_R aux bornes de cette résistance au même instant, qui s'écrit

$$v_R = v_A - v_B = Ri \quad \text{(Loi d'Ohm)} \quad (4.6)$$

Condensateur. Un condensateur est un élément constitué de deux armatures conductrices (appelées électrodes) en influence totale et séparées par un isolant polarisable (diélectrique). Sa propriété principale est de pouvoir stocker des charges électriques opposées sur ses armatures. Le condensateur est globalement neutre ; si on applique une tension v_c entre les deux plaques, les charges électriques négatives (électrons) en provenance de la borne négative de la source tendent à se déplacer sur la plaque correspondante

tandis que les charges positives (manque d'électrons) se rassemblent sur l'autre. La capacité du condensateur donne la mesure de cet effet. Pour un condensateur de capacité C , les charges q et $-q$ sur chaque plaque sont

$$q = Cv_c. \quad (4.7)$$

Si la tension varie au cours du temps, la variation de charge qui s'en suit correspond à une circulation de courant dans la branche du circuit où se trouve le condensateur. On peut donc écrire

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv_c(t)}{dt}. \quad (4.8)$$

Ceci implique donc que

$$v_c(t) = v_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt. \quad (4.9)$$

Dans le cas d'une alimentation continue constante, $dv_c/dt = 0$ et le condensateur correspond à un circuit ouvert : il n'y a pas de passage de courant, $i(t) = 0$.

Inductance. On appelle inductance un bobinage d'un fil conducteur éventuellement enroulé autour d'un noyau en matériau ferromagnétique. Si la bobine est traversée par un flux d'induction magnétique Φ variable, une tension v est induite à ses bornes. La loi de Faraday donne :

$$v(t) = \frac{d\Phi}{dt} \quad (4.10)$$

S'il n'y a pas d'induction dans un élément du circuit provenant d'un autre élément de ce circuit, on peut caractériser chaque élément inductif du circuit par son inductance L telle que

$$\Phi = Li. \quad (4.11)$$

On a donc aux bornes d'un tel élément

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (4.12)$$

Dans le cas d'un courant continu constant $i(t) = I = \text{cte}$, soit $di/dt = 0$: une inductance pure parcourue par un courant continu est un court-circuit, $v_L(t) = 0$.

4.1.3 Combinaison des éléments d'un circuit

Résistances. Soit deux résistances en série. La première loi de Kirchoff implique qu'un même courant y circule. La deuxième loi de Kirchoff et la loi d'Ohm donnent quant à elles

$$v_A - v_C = v_A - v_B + v_B - v_C = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2) i. \quad (4.13)$$

Deux résistances en série sont donc équivalentes à une seule résistance totale R_s

$$R_s = R_1 + R_2 \quad (4.14)$$

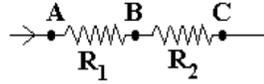


FIG. 4.3 – Deux résistances en série.

Soit maintenant deux résistances en parallèle. On doit avoir : $i = i_1 + i_2$ et $v_A - v_B = R_1 i_1 = R_2 i_2 = R_t i$. On en tire que :

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{ou} \quad R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (4.15)$$

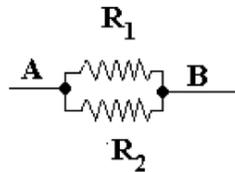


FIG. 4.4 – Deux résistances en parallèle.

Condensateurs. Soit deux condensateurs en série. On a alors $q_1 = q_2 = q$ car le point B est neutre, $v_1 = v_B - v_A = q/C_1$ pour le condensateur 1, et $v_2 = v_C - v_B = q/C_2$ pour le condensateur 2, d'où $v_1 + v_2 = v_C - v_A = q(1/C_1 + 1/C_2)$. Pour la capacité totale C_s on a donc

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{ou} \quad C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (4.16)$$

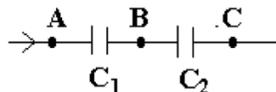


FIG. 4.5 – Deux capacités en série.

Par contre, si les deux condensateurs sont en parallèle, on doit avoir $q = q_1 + q_2$, mais aussi $v_B - v_A = q/C_1 = q/C_2$, d'où on obtient :

$$C_p = C_1 + C_2. \quad (4.17)$$

Inductances. Pour deux inductances en série ou en parallèle, le développement est similaire et on obtient

$$L_s = L_1 + L_2. \quad (4.18)$$

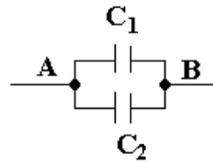


FIG. 4.6 – Deux capacités en parallèle.

et

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \text{ou} \quad L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}. \quad (4.19)$$

• *Exercice*

Montrer les relations précédentes.

• *Exercice*

Montrer que la chute de tension v_{R_2} aux bornes de la résistance R_2 pour le circuit en figure 4.7 (diviseur de potentiel) est donnée par $v_{R_2} = R_2 e / (R_1 + R_2)$.

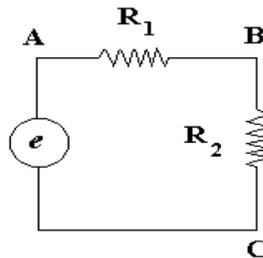


FIG. 4.7 – Circuit diviseur de potentiel.

4.1.4 Mise en équations : un exemple

Les relations entre courant et tension pour les éléments réactifs L et C font intervenir des dérivées ou des intégrales par rapport au temps. De ce fait, les équations d'un circuit comprenant de tels éléments seront intégro-différentielles. Une équation intégro-différentielle est une équation, dont l'inconnue est une fonction, et qui contient *dérivées et primitives* de cette fonction. Il est parfois utile de récrire l'équation comme une équation différentielle en choisissant comme fonction inconnue la primitive d'ordre plus élevée. Les méthodes que nous allons développer dans ce cours s'appliquent cependant aussi bien aux équations différentielles que intégro-différentielles, même si nous nous concentrerons sur le premier cas.

Exemple. Comme application des lois fondamentales, nous allons calculer l'état du circuit schématisé ci-dessus soumis à une excitation extérieure. Un générateur externe, que nous supposerons de résistance négligeable (si ce n'était pas le cas, il faudrait

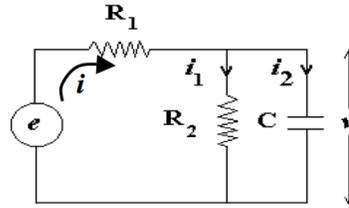


FIG. 4.8 – Exemple de circuit.

effectuer la transformation $R_1 \rightarrow R'_1 = R_1 + R_g$, où R_g est la résistance interne du générateur), exerce une excitation.

La première loi de Kirchhoff s'écrit $i = i_1 + i_2$. Aux bornes de la capacité C , on a $v = q/C$ et $i_2 = Cdv/dt$. La loi d'Ohm pour la résistance R_2 s'écrit $v = R_2i_2$ et la deuxième loi de Kirchhoff donne $e = R_1i + v$. En combinant ces équations on trouve facilement

$$e(t) = R_1C \frac{dv(t)}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)v(t). \quad (4.20)$$

On a donc une équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène, où la tension appliquée e joue le rôle de l'excitation externe et $v(t)$ est la fonction inconnue à déterminer.

4.2 Analogie mécanique électrique

Dans le premier cours, nous avons pris comme modèle de système oscillant l'oscillateur mécanique forcé amorti, dont on rappelle l'EDL :

$$kx(t) + \gamma\dot{x}(t) + m\ddot{x}(t) = F(t).$$

Nous allons voir que ce système a son analogue dans un circuit très étudié : le circuit RLC. Pour le voir, essayons de construire *formellement* un analogue électrique de l'oscillateur forcé. Notre analogue devra suivre la même équation différentielle.

Pour commencer, il nous faut un signal d'entrée, une sollicitation extérieure qui puisse mettre "en mouvement" le circuit. On devine que ce rôle sera joué par une tension appliquée en entrée du circuit, imposée de l'extérieur. Appelons $v_e(t)$ cette tension et supposons qu'elle joue le rôle de la force $F(t)$ dans le cas mécanique :

$$F(t) \leftrightarrow v_e(t).$$

Comment procéder maintenant ? Cette tension est égale à la somme des chutes de tension sur les éléments du circuit (les impédances). Regardons alors l'équation différentielle : on voit que le terme extérieur doit être égal à la somme de trois termes : il pourrait donc s'agir des trois impédances en série, car dans ce cas les chutes de potentiel se somment. Quelles impédances ? Chaque terme de l'EDL contient une dérivée différente de la fonction inconnue $x(t)$. Nous venons de voir que pour les trois éléments passifs on

a

$$\begin{aligned}
 C \rightarrow \quad v_C &= \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} q \\
 R \rightarrow \quad v_R &= Ri = R \dot{q} \\
 L \rightarrow \quad v_L &= L \frac{di}{dt} = L \ddot{q}.
 \end{aligned}$$

Il semblerait donc que la variable analogue à la position x de l'oscillateur puisse être la charge q . En effet, c'est la charge électrique qui peut se déplacer et osciller dans un circuit électrique, suite à la sollicitation d'une tension appliquée. C'est donc une hypothèse raisonnable de prendre :

$$x(t) \leftrightarrow q(t).$$

Peut-on mesurer cette charge ? Oui, s'il y a un condensateur dans le circuit, il suffit de mesurer la tension aux bornes du condensateur, car $v_C = q/C$. Si on prend comme tension de sortie $v_s(t) = v_C(t)$, on aura donc accès directement à la bonne grandeur, la fonction qu'on cherche à déterminer et qui est l'analogue de $x(t)$. Tentons le coup alors : qu'obtient-on en prenant le circuit RLC en figure 4.9 ?

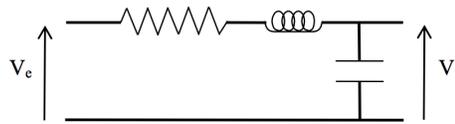


FIG. 4.9 – Le circuit RLC.

La loi des mailles donne $v_e = v_R + v_L + v_C$, d'où

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{C} q + R \dot{q} + L \ddot{q} &= v_e(t) & (4.21) \\
 \updownarrow & \\
 kx(t) + \gamma \dot{x}(t) + m \ddot{x}(t) &= F(t) :
 \end{aligned}$$

On obtient bien la même EDL, et par conséquent, le même comportement pour le système ! Si v_e est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω , la charge q sur le condensateur oscille de manière sinusoïdale avec la même pulsation. Si on modifie $F(t)$ et $v_e(t)$, en prenant par exemple une fonction non périodique, la réponse changera, mais de la même manière pour les deux systèmes.

Regardons un peu plus en détail cette analogie. Quel est le rôle de chaque composant du circuit ? Par comparaison, on a

$$\begin{aligned}
 m &\leftrightarrow L \\
 \gamma &\leftrightarrow R \\
 k &\leftrightarrow \frac{1}{C}.
 \end{aligned}$$

- L'inductance L joue le rôle de la masse, c'est l'inertie du système. Plus L est grande, plus il est difficile de mettre en mouvement les charges (ou de les arrêter). C'est le phénomène d'induction qui fait qu'une variation de courant (= une accélération de la charge q) est freinée par effet de l'inductance.
- La résistance électrique R est l'élément dissipatif du circuit. C'est là que l'énergie est dissipée en chaleur par effet Joule². De manière semblable à la dissipation mécanique dans un gaz, ce sont les collisions des charges sur les atomes du conducteur qui conduisent à cette dissipation.
- L'inverse de la capacité $1/C$ joue le rôle de la force de rappel. En effet, plus la capacité est élevée, plus on peut accumuler de charges sur les faces du condensateur à "effort" v_e égal, plus on peut s'éloigner de la position d'équilibre $q = 0$. La "force de rappel" du condensateur est donc petite dans ce cas, correspondant à une faible valeur de k pour le ressort.

Les choses commencent à être assez claires. On comprend pourquoi ces deux systèmes à première vue si différents se comportent de la même manière. Tous deux comportent un élément qui retient la variable en la limitant, de l'inertie et un élément dissipatif.

Une dernière précision doit être faite cependant pour uniformiser les notations. Comme nous l'avons vu, pour mesurer la charge q il faut passer par la mesure de la tension aux bornes de la capacité v_C . Il est donc pratique de récrire l'EDL (4.21) en termes de la tension mesurée en sortie $v_s = v_C = q/C$, ce qui donne

$$v_s(t) + RC \dot{v}_s(t) + LC \ddot{v}_s(t) = v_e(t). \quad (4.22)$$

4.3 Notation complexe en électronique

4.3.1 Réponse du circuit RLC en régime harmonique

On appelle **régime harmonique** l'état d'un système soumis à une excitation sinusoïdale. D'après ce que nous venons de voir, la réponse du circuit RLC à une sollicitation sinusoïdale (en d'autres termes, son comportement en régime harmonique) est identique à ce que nous avons obtenu pour l'oscillateur mécanique. Par analogie, on obtient la *fonction de transfert* du circuit RLC : si $\tilde{v}_s(\omega)$ et $\tilde{v}_e(\omega)$ sont les amplitudes complexes en entrée et en sortie, définies comme au premier cours, nous obtenons

$$\frac{\tilde{v}_s(\omega)}{\tilde{v}_e(\omega)} = T(\omega) = \frac{1/LC}{1/LC - \omega^2 + i\omega R/L} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega R/L} \quad (4.23)$$

avec $\omega_0^2 = 1/LC$ la pulsation propre du circuit.

△ Une représentation interactive de la réponse d'un filtre RLC à une tension sinusoïdale et de la fonction de transfert correspondante peut être trouvée sur le site web "Figures animées pour la physique",

<http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/index.html> .

Après avoir construit le circuit, on peut faire varier les valeurs des trois composants et visualiser soit les tensions en entrée et sortie, soit les module et phase de la fonction de transfert.

²La puissance dissipée dans une résistance est, en tension continue, $W = VI = RI^2 = V^2/R$.

4.3.2 Impédance complexe

Il sera utile, en conclusion de ce chapitre, de revenir sur la notation complexe et de préciser la manière dont elle est utilisée couramment en électronique pour l'étude des circuits en régime alternatif, c'est-à-dire soumis à une tension sinusoïdale. Nous avons déjà vu que toute fonction sinusoïdale peut être mathématiquement représentée par une exponentielle complexe, avec la convention que le signal mesurable correspond à la partie réelle de l'expression complexe : $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(\tilde{x}(t))$ avec $\tilde{x}(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)}$. Nous savons aussi qu'un opérateur linéaire (addition, multiplication par une quantité indépendante du temps, différentiation ou intégration par rapport au temps, etc.) peut être appliqué à la représentation complexe d'un signal alternatif sans perdre la correspondance avec le signal mesurable.

Soit alors³ $i(t) = I \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(\tilde{i})$ le courant circulant dans un élément de circuit de bornes A et B et $v = v_A - v_B$ la chute de tension aux bornes de l'élément. Dans le cas des trois éléments de circuits que nous avons considérés, la résistance, le condensateur ou l'inductance, i et v sont reliés par une relation linéaire.

Ainsi, dans le cas d'une **résistance**, on a

$$\operatorname{Re}(\tilde{v}) = v = Ri = RI \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(R\tilde{i}) \quad (4.24)$$

et donc :

$$\tilde{v} = R\tilde{i}. \quad (4.25)$$

Si l'élément du circuit est un **condensateur**, on a

$$\operatorname{Re}(\tilde{i}) = i = C \frac{dv}{dt} = \operatorname{Re}\left(C \frac{d\tilde{v}}{dt}\right) = \operatorname{Re}(C i\omega \tilde{v}) \quad (4.26)$$

d'où

$$\tilde{v} = \frac{1}{i\omega C} \tilde{i}. \quad (4.27)$$

Finalement, dans le cas d'une **inductance**,

$$\operatorname{Re}(\tilde{v}) = v = L \frac{di}{dt} = \operatorname{Re}\left(L \frac{d\tilde{i}}{dt}\right) = \operatorname{Re}(L i\omega \tilde{i}) \quad (4.28)$$

ce qui implique que

$$\tilde{v} = i\omega L \tilde{i}. \quad (4.29)$$

Remarquons que, comme la partie oscillante des fonctions complexes considérées ici est toujours égale à $\exp(i\omega t)$, les relations précédentes sont aussi valables pour les amplitudes complexes de courant et tensions :

$$\hat{v} = R\hat{i}, \quad (4.30)$$

$$\hat{v} = \frac{1}{i\omega C} \hat{i}, \quad (4.31)$$

$$\hat{v} = i\omega L \hat{i}. \quad (4.32)$$

³Rappelons que nous avons choisi d'indiquer, pour toute fonction sinusoïdale $x(t)$, avec \tilde{x} la fonction complexe oscillante dont $x(t)$ est la partie réelle, et avec \hat{x} son amplitude : $\tilde{x} = \hat{x} \exp(i\omega t)$.

On est ainsi amené à introduire la notion d'impédance complexe Z , définie par la relation :

$$\tilde{v} = Z(\omega) \tilde{i} \quad (4.33)$$

ou, de manière équivalente,

$$\hat{v} = Z(\omega) \hat{i}. \quad (4.34)$$

Nous avons déjà assez d'expérience dans l'étude des systèmes linéaires pour interpréter l'impédance complexe dans les termes que nous avons utilisé dans les paragraphes précédentes : on peut dire que l'impédance complexe est la fonction de transfert associée à chaque élément de circuit, permettant de déterminer l'amplitude (complexe) de la réponse de cet élément (la tension v) pour une sollicitation (le courant i) sinusoïdal de pulsation ω .

Les expressions de Z pour les différents éléments de circuit sont donc

Résistance	$Z_R(\omega) = R$
Condensateur	$Z_C(\omega) = 1/i\omega C$
Inductance	$Z_L(\omega) = i\omega L$

L'introduction des impédances complexes des trois éléments de base (résistance, capacitance et inductance) permet de simplifier la résolution de l'état d'un circuit en régime alternatif. En effet, les impédances complexes des divers éléments d'un circuit se combinent de la même façon que si ces éléments étaient des résistances pures. Pour deux éléments quelconques en série,

$$Z_s = Z_1 + Z_2, \quad (4.35)$$

tandis que pour deux éléments en parallèle,

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}. \quad (4.36)$$

Attention cependant à ne pas oublier que les relations simples (4.24), (4.26) et (4.28) ne sont valables que pour une excitation sinusoïdale ! Cependant, les résultats valables pour des signaux sinusoïdaux permettent en réalité d'aborder le cas de signaux périodiques plus complexes, grâce à une décomposition astucieuse, comme nous le verrons au chapitre 5.

Partie II - Analyser

Chapitre 5

La Série de Fourier (SF)

5.1 Introduction : réponse d'un système linéaire à une somme d'excitations sinusoïdales

Dans les premiers chapitres de ce cours nous avons discuté l'importance des systèmes linéaires et le fait qu'un système physique linéaire est toujours associé à une équation différentielle linéaire. Nous avons vu que pour une sollicitation sinusoïdale (=harmonique) $e(t) = a \cos(\omega t + \Delta)$ la réponse du système est déterminée par sa fonction de transfert $T(\omega)$, et qu'elle est encore sinusoïdale, d'amplitude $a|T(\omega)|$ et déphasée de $\theta_T(\omega)$ par rapport à l'entrée :

$$\begin{array}{ccccc} e(t) = a \cos(\omega t + \Delta) & \rightarrow & \boxed{\text{EDL}} & \rightarrow & s(t) = a|T(\omega)| \cos(\omega t + \Delta + \theta_T(\omega)) \\ \text{entrée} & & = & & \text{sortie} \\ & & T(\omega) & & \end{array}$$

La question que nous allons nous poser maintenant est : quelle sera la réponse du système pour une sollicitation $e(t)$ *non harmonique* ?

C'est une question très importante car elle se pose très souvent en pratique, par exemple :

- Que se passe-t-il si on allume en $t = 0$ un générateur qui alimente un circuit avec une tension continue ?
- si on donne périodiquement des courtes impulsions à un oscillateur mécanique ?
- si on tape avec un diapason sur une table ?
- si on envoie un signal sur une antenne radio ?
- si on excite un atome avec une lumière non monochromatique ?

On veut calculer la réponse dans tous ces cas. La clé qui va nous permettre de le faire c'est, encore une fois, la linéarité (voir 1.1) :

- Pour un système linéaire, si l'entrée est une combinaison linéaire de deux fonctions,

$$e(t) = \alpha e_1(t) + \beta e_2(t),$$

alors la sortie est la combinaison linéaire des deux réponses :

$$s(t) = \alpha s_1(t) + \beta s_2(t). \quad (5.1)$$

Cette propriété nous permet donc de commencer à considérer des fonctions un peu plus complexes. Faisons un exemple.

Exemple. Considérons le circuit RC (figure 5.1). L'EDL du circuit s'obtient très

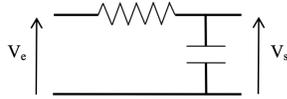


FIG. 5.1 – Le circuit RC.

facilement par la loi des mailles et est, évidemment, égale à celle du circuit RLC (4.22) où on a choisi $L = 0$:

$$v_s(t) + RC \dot{v}_s(t) = v_e(t). \quad (5.2)$$

A partir de l'EDL on peut calculer la fonction de transfert pour le circuit RC en suivant la même méthode que nous avons utilisée en 2.2 pour l'oscillateur forcé amorti (et qui s'applique au circuit RLC). On obtient

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC} \quad \text{circuit RC} \quad (5.3)$$

(encore une fois, il suffit de prendre $L = 0$ dans la fonction de transfert du circuit RLC, équation (4.23)).

Choisissons $RC = 1$ pour simplifier. On a alors, en séparant module et phase, $T(\omega) = (1 + \omega^2)^{-1/2} \exp(-i \arctan \omega)$. Prenons maintenant une fonction en entrée composée de la somme de deux oscillations :

$$e(t) = \cos(t) + \sin(6t) = \cos(t) + \cos(6t - \pi/2). \quad (5.4)$$

La première contribution a une pulsation $\omega = 1$, la deuxième $\omega = 6$. Que vaut $s(t)$? La propriété de linéarité nous permet de la calculer :

$$\begin{aligned} s(t) &= |T(1)| \cos(t + \theta_T(1)) + |T(6)| \cos(6t - \pi/2 + \theta_T(6)) \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \cos(t + \arctan(1)) + |T(6)| \cos(6t - \pi/2 + \arctan(6)) \\ &\simeq \sqrt{\frac{1}{2}} \cos(t + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{\frac{1}{37}} \cos(6t - \pi/2 + 0,44\pi). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Les deux fonctions et la fonction de transfert sont représentées dans la figure 5.2. On voit en particulier que la composante à plus haute fréquence est plus atténuée que celle qui oscille plus lentement : le module la fonction de transfert $T(\omega)$ est en effet plus faible en correspondance de $\omega = 6$ que de $\omega = 1$ (pulsations indiquées par les deux points sur la courbe).

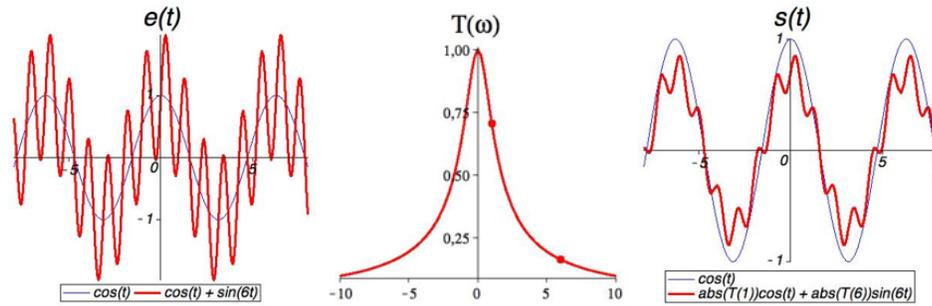


FIG. 5.2 – La fonction composée $e(t)$ (equation (5.4)), le module de la fonction de transfert du circuit RC (equation (5.3)) et la réponse $e(t)$ (equation (5.5)).

On pourrait bien sûr maintenant rajouter une troisième fonction sinusoïdale et procéder de la même manière : on peut donc trouver la réponse à un signal composé d'un nombre quelconque d'harmoniques. Mais la question peut aussi bien être inversée : serions-nous capables d'écrire *une fonction quelconque* comme la somme d'un certain nombre (éventuellement très grand...) de fonctions harmoniques? Pour le cas des **fonctions périodiques** la réponse est oui, et elle est donnée par la **série de Fourier**¹.

5.2 Signaux périodiques : premier exemple et motivations

La question maintenant est de déterminer la réponse d'un système linéaire à une sollicitation qui est *périodique*, mais non *harmonique* (qui n'est pas sinusoïdale).

Par exemple, on peut considérer un signal en créneau $x(t)$, périodique de période T de figure 5.3.

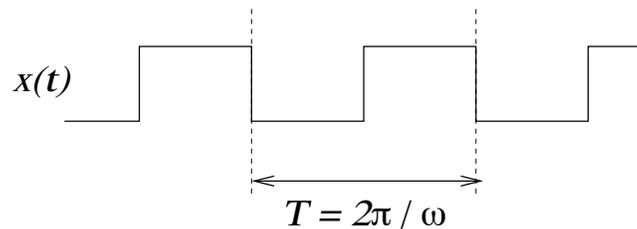


FIG. 5.3 – Signal périodique $x(t)$ de période T .

Le résultat que nous allons obtenir est le suivant : on peut montrer qu'une fonction $x(t)$ périodique quelconque peut être approchée par une somme de fonctions sinusoïdales de période T , $T/2$, $T/3$ etc, et que cette approximation peut être rendue de plus en plus précise en sommant de plus en plus de termes. On peut décrire cette technique en utilisant l'exemple de la figure 5.3. D'abord, on essaye d'approcher la fonction $x(t)$ par

¹De plus, nous verrons dans le prochain cours que cette opération est possible aussi pour des fonctions non périodiques, même si elle devient un peu plus compliquée.

une fonction constante, $x(t) \simeq a_0$ qui rend compte de sa valeur moyenne, comme en figure 5.4.

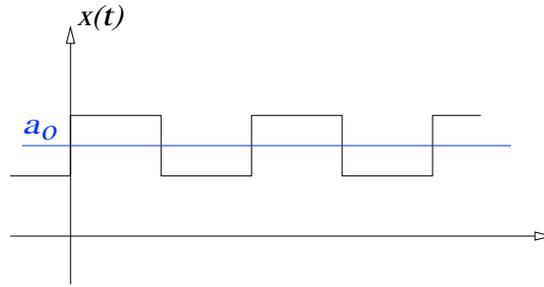


FIG. 5.4 – Première contribution a_0 : fonction constante égale à la valeur moyenne de $x(t)$.

Ensuite, pour reproduire son allure oscillante, on ajoutera à a_0 une fonction oscillante $b_1 \sin(\omega t)$, de même période T , avec le résultat montré en figure 5.5.

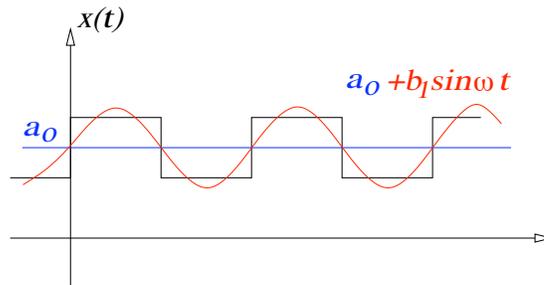


FIG. 5.5 – La première et la deuxième contributions à la "réconstruction" de la fonction $x(t)$.

Puis, pour s'approcher de la forme "moins arrondie" de la fonction, on ajoute des fonctions sinusoïdales de pulsation plus élevée (période plus courte) et proportionnelles à rapport entier à la pulsation fondamentale. Par exemple, pour le cas de la fonction considérée dans la figure, la contribution suivante s'écrit $b_3 \sin(3\omega t)$, et le résultat est représenté en figure 5.6.

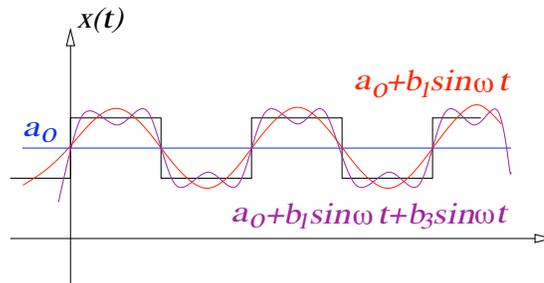


FIG. 5.6 – Les premiers trois termes de la série de Fourier.

Nous avons donc que, pour des valeurs appropriées de a_0 , b_1 et b_3 ,

$$x(t) \simeq a_0 + b_1 \sin(\omega t) + b_3 \sin(3\omega t). \quad (5.6)$$

Comme nous verrons dans la deuxième partie, cette séquence de termes peut être poursuivie à volonté pour obtenir des approximations de plus en plus précises de la fonction initiale. On peut montrer qu'à la limite d'une somme infinie de termes (série) on arrive à reproduire parfaitement l'allure de la fonction périodique $x(t)$, *pourvu qu'on sache déterminer les coefficients a_0, b_1, b_3 etc.*

Avant de poursuivre, précisons encore une fois notre motivation : nous savons que pour un système linéaire (dont le comportement est décrit par des équations différentielles linéaires), si nous sommes capables d'écrire une sollicitation comme la somme de contributions sinusoïdales, la réponse sera donnée simplement par la somme des réponses à chaque contribution. Et nous savons calculer ces réponses individuelles grâce à la fonction de transfert.

5.3 Série de Fourier sur la base des fonctions trigonométriques

L'opération de décomposition en fonctions sinusoïdales est très générale et peut s'appliquer à toute fonction périodique. Pour comprendre l'expression générale de cette décomposition, il est utile de remarquer que, dans l'exemple que nous avons pris, la fonction était impaire, et son développement ne comprenait que des fonctions sinus, elles aussi impaires. Si, au contraire, on avait pris une fonction paire, le développement aurait comporté des fonctions cosinus uniquement. Dans le cas général d'une fonction ni paire ni impaire, les deux sont présents.

Écrivons (sans démonstration) l'expression du **développement en série de Fourier sur la base des fonctions sinusoïdales** (on parle aussi de **série de Fourier réelle** pour ce développement) :

soit $x(t)$ une fonction périodique de période $T = 2\pi/\omega$. $x(t)$ est alors identique à son développement en série de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t). \quad (5.7)$$

Cette écriture est intéressante mais incomplète. Evidemment, elle ne serait pas très utile si on n'avait pas un moyen de déterminer les coefficients a_0, a_n et b_n . Sur la base de considérations très générales et faciles à prouver, nous pouvons déjà dénombrer certaines propriétés de ces coefficients :

- Si $x(t)$ est une *fonction réelle*, alors les coefficients a_0, a_n et b_n sont réels.
- Si $x(t)$ est une *fonction paire*, alors les coefficients des sinus sont tous nuls : $b_n = 0 \quad \forall n > 0$.
- Si $x(t)$ est une *fonction impaire*, alors les coefficients des cosinus sont tous nuls : $a_n = 0 \quad \forall n > 0$.

Ces propriétés peuvent parfois simplifier remarquablement les calculs.

En outre, nous savons déjà que le coefficient a_0 doit correspondre à la valeur moyenne de la fonction $x(t)$. Le calcul de l'expression générale des autres coefficients demande un petit peu de mathématique, que nous ne ferons pas ici. Le résultat final est que l'on

peut calculer les **coefficients du développement en série de Fourier** sur la base des fonctions sinusoïdales² comme suit :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (5.8)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt \quad (5.9)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt. \quad (5.10)$$

On écrit souvent aussi, en notation plus compacte,

$$\omega_n = n\omega \quad (5.11)$$

pour indiquer les multiples de la pulsation fondamentale ω .

Nous allons seulement mentionner ici que ces formules peuvent être interprétées comme des produits scalaires entre la fonction $x(t)$ et les fonctions $\cos(n\omega t)$ et $\sin(n\omega t)$. Nous n'utiliserons pas cette convention, mais il est utile de remarquer que l'opération qui permet de calculer les coefficients de Fourier fait correspondre à deux fonctions l'intégrale de leur produit³ : $f(t), g(t) \rightarrow 2\frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot g(t) dt$. Le même type d'opération sera fait dans la partie suivante pour des fonctions à valeurs complexes, et nous verrons comment il faut l'écrire dans ce cas⁴.

Une dernière remarque doit être faite en relation aux bornes d'intégration : nous avons limité l'intégrale entre 0 et T , mais les fonctions $f(t)$ intégrées étant toutes périodiques de période T , on a $\int_0^T f(t) dt \equiv \int_{t_x}^{t_x+T} f(t) dt$, pour n'importe quelle valeur de t_x : on peut choisir librement les bornes d'intégration, pourvu que l'intervalle d'intégration soit de longueur T .

5.4 Série de Fourier sur la base des exponentielles complexes

Nous nous sommes intéressés à la décomposition en série de fonctions sinusoïdales parce que nous savions déterminer la réponse d'un système linéaire à de telles fonctions. Cependant, dans l'étude des équations différentielles linéaires, nous nous sommes vite aperçus que ces fonctions ne sont pas très pratiques à manipuler, et qu'il était plus efficace de les récrire comme la partie réelle d'exponentielles complexes, beaucoup plus simples à utiliser. Il est donc naturel de se poser la même question ici : est-il possible de ré-exprimer le développement en série de Fourier en notation complexe ?

²On peut vérifier que ces formules sont correctes en faisant explicitement le calcul des coefficients après avoir remplacé la fonction $x(t)$ par son développement en SF.

³Le facteur 2 dans la définition du produit scalaire vient du fait que $\int_0^T \cos^2 x dx = 1/2$, et que les fonctions de base doivent être orthonormales.

⁴La même opération sera d'ailleurs encore nécessaire pour définir les transformées de Fourier et de Laplace.

Il est facile de deviner que la réponse est affirmative. Il suffit de récrire les fonctions sinus et cosinus comme

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \quad (5.12)$$

et de réarranger les termes dans l'expression (5.7) pour obtenir le **développement en série de Fourier sur la base des exponentielles complexes (théorème de Fourier)** :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n f_n(t). \quad (5.13)$$

où on a noté $f_n(t) = e^{in\omega t}$, avec ω toujours égale à $2\pi/T$. Remarquons que la série comporte maintenant des termes allant de $-\infty$ à $+\infty$, à la différence du développement en sinus et cosinus.

Les **coefficients de la série**, c_n , peuvent être déterminés directement par le réarrangement des termes de la série à partir des a_n et b_n . On obtient les relations suivantes, toutes valables pour n positif :

$$c_0 = a_0 \quad (5.14)$$

$$c_n = (a_n - ib_n)/2 \quad \text{pour } n = 1 \cdots +\infty \quad (5.15)$$

$$c_{-n} = (a_n + ib_n)/2 = c_n^* \quad \text{pour } n = 1 \cdots +\infty \quad (5.16)$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = 2 \operatorname{Re}(c_n) \quad \text{pour } n = 1 \cdots +\infty \quad (5.17)$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = 2 \operatorname{Im}(c_n) \quad \text{pour } n = 1 \cdots +\infty \quad (5.18)$$

Puisque l'on décompose maintenant $x(t)$ sur des fonctions complexes, il est normal que les coefficients c_n soient complexes. On peut déduire les propriétés générales des coefficients c_n à partir des propriétés des a_n et b_n , comme nous le verrons en 5.6.

Les coefficients de la série peuvent être aussi déterminés indépendamment du développement sur les fonctions sinus et cosinus, comme "projection" de la fonction $x(t)$ sur la base des fonctions exponentielles complexes

$$f_n(t) = e^{-in\omega t} = e^{-i\omega_n t}. \quad (5.19)$$

on prouve en effet que les coefficients c_n s'écrivent de manière équivalente comme suit :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-in\omega t} dt. \quad (5.20)$$

Cette dernière est la décomposition en série la plus utilisée : encore une fois son intérêt particulier vient des propriétés des exponentielles complexes, que nous avons déjà utilisées.

L'opération donnant c_n à partir des fonctions $x(t)$ et $f_n(t)$ est l'intégrale du produit de la première pour le complexe conjugué de la deuxième, c'est-à-dire l'opération $f(t), g(t) \rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \bar{g}(t) dt$. Cette opération représente encore une fois un produit

scalaire, et c'est la version plus générale de celle déjà utilisée pour le cas des fonctions trigonométriques, valable aussi pour des fonction complexes. De plus, la décomposition 5.20 est unique, comme d'ailleurs la 5.7. Son unicité vient du fait que chaque fonction $f_n(t)$ représente un "mode de vibration" du système indépendant de tous les autres, qui ne peut pas être représenté comme une composition des autres modes : si la pulsation $m\omega$ est présente dans le signal $x(t)$, alors le coefficient correspondant c_n doit être différent de zéro, car il est le seul à "porter" cette pulsation. Pour mieux visualiser cette idée, il suffit de penser à la lumière : chaque longueur d'onde différente qui est présente dans une lumière composée doit être prise en compte et ne peut pas être obtenue en combinant les autres contributions, qui sont toutes indépendantes.

Il est parfois utile de savoir écrire cette propriété d'indépendance des fonctions $f_n(t)$ en termes mathématiques. Il est en fait possible de montrer que les $f_n(t)$ sont *orthonormales*, c'est-à-dire orthogonales et normalisées, par rapport au produit scalaire que nous avons introduit :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f_n(t) \bar{f}_m(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (5.21)$$

• **Exercice**

Montrer la relation précédente.

5.5 Spectres

La relation 5.13 signifie qu'on peut écrire $x(t)$ comme une somme de fonctions harmoniques, chacune oscillante à une pulsation $n\omega$ différente. Comme pour une onde lumineuse, on "mélange" différentes fréquences, pour obtenir un signal composé par toutes ses "couleurs". Et toujours comme en optique, on appelle **spectre** de la fonction $x(t)$ l'ensemble des amplitudes correspondantes à chaque contribution, c'est-à-dire les coefficients c_n .

$$\text{Spectre de } x(t) = \{c_n\}. \quad (5.22)$$

La différence avec la lumière blanche (et aussi avec ce que nous verrons plus tard avec les fonctions non périodiques!) est que ici le résultat de la somme des différentes contributions est une fonction *périodique* de période T donnée. La décomposition ne peut donc contenir que les pulsations multiples de la pulsation fondamentale ω , car toute fonction périodique de période $T/n = 2\pi/n\omega$ est aussi périodique de période $T = 2\pi/\omega$. Pour $x(t)$ périodique, le spectre est donc

- **discret** : $\omega_n = n\omega = n\frac{2\pi}{T}$, avec $n \in \mathbb{Z}$,
- **complexe** : $c_n \in \mathbb{C}$.

Les coefficients c_n étant complexes, on a l'habitude d'en représenter séparément la le module $|c_n|$ et la phase $\arg(c_n)$, sous la forme de fonctions (discrètes) de n ou de ω (avec des valeurs définies seulement pour les pulsations $\omega_n = n\omega$). On peut aussi, bien sûr, en représenter partie réelle et partie imaginaire, sans perte d'information. Des exemples des deux représentations sont donnés en section 5.6.

Il est important de comprendre que la connaissance du spectre d'une fonction périodique permet de la reconstruire complètement, à travers son développement en série de Fourier : le spectre contient donc *toute* l'information sur la fonction.

5.6 Exemples et propriétés

Nous donnons ici quelques exemples qui permettent d'examiner les propriétés des spectres de certaines catégories de fonctions.

Dans le premier exemple (Fig. 5.7), $x(t)$ est une fonction complexe périodique de période T (et qui vaut $x(t) = 1 + i$ entre 0 et $T/2$, zéro entre $T/2$ et T), les coefficients c_n possèdent une partie réelle et une partie imaginaire (sur la gauche), et on peut les représenter par leur module et phase (à droite).

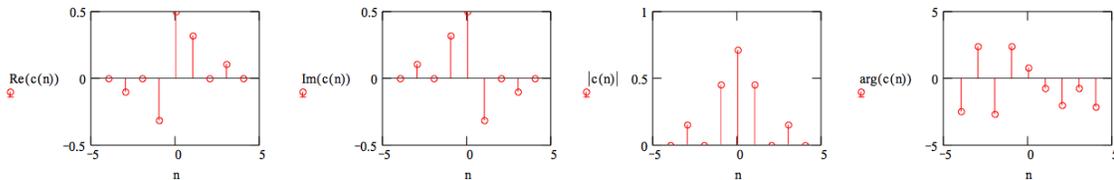


FIG. 5.7 – Module et phase des coefficients de la SF c_n de la fonction complexe $x(t) = 1 + i$ entre 0 et $T/2$, nulle entre $T/2$ et T , et périodique de période T .

Si maintenant

1. $x(t)$ est **réelle** (exemple : $x(t) = t^2$ entre 0 et T , périodique de période T , Fig. 5.8), alors les a_n et b_n sont réels, et donc $c_n = \bar{c}_{-n}$: les coefficients des n positifs et négatifs ont le même module et phase opposée. C'est la propriété la

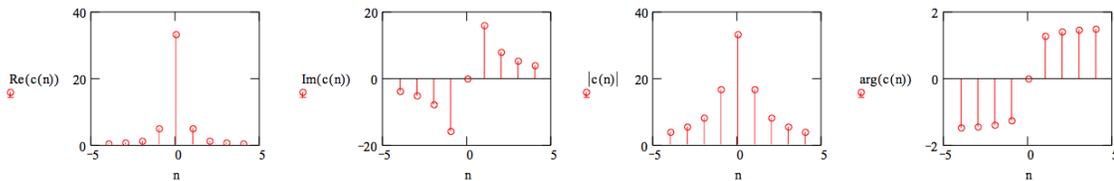


FIG. 5.8 – Module et phase des coefficients de la SF c_n de la fonction réelle $x(t) = t^2$ entre 0 et T , périodique de période T .

plus importante pour nous car on s'intéressera toujours à des signaux $x(t)$ réels, et il suffira donc de déterminer les c_n pour n positif pour les avoir tous.

2. $x(t)$ est **paire**, alors les b_n sont nuls, et donc $c_n = c_{-n}$: les coefficients des n positifs et négatifs sont égaux.
3. $x(t)$ est **réelle et paire** (exemple : $x(t) = |t|$ entre $-T/2$ et $T/2$, de période T , Fig. 5.9), alors les a_n sont réels et les b_n sont nuls, on a donc $c_n = c_{-n}$ et réels : les coefficients des n positifs et négatifs ont le même module et sont tous réels, ils ont donc tous une phase égale à zéro.

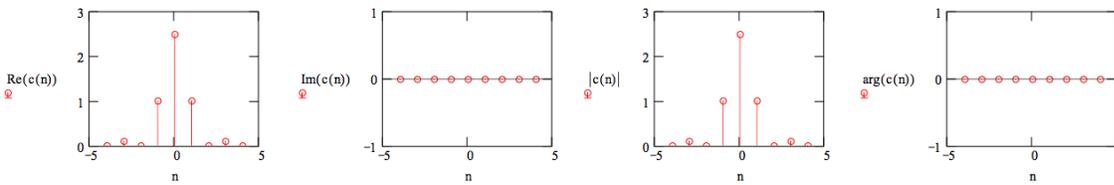


FIG. 5.9 – Module et phase des coefficients de la SF c_n de la fonction réelle et paire $x(t) = |t|$ entre $-T/2$ et $T/2$, périodique de période T .

4. $x(t)$ est **impair**, alors les a_n sont nuls, et donc $c_n = -c_{-n}$: les coefficients des n positifs et négatifs sont opposés.
5. $x(t)$ est **réelle et impair** (exemple : $x(t) = t$ entre $-T/2$ et $T/2$, de période T , Fig. 5.10), alors les b_n sont réels et les a_n sont nuls, on a donc $c_n = -c_{-n}$ et imaginaires : les coefficients des n positifs et négatifs ont le même module et sont tous imaginaires, ils ont donc deux à deux phase opposée et égale à $\pm\pi$.

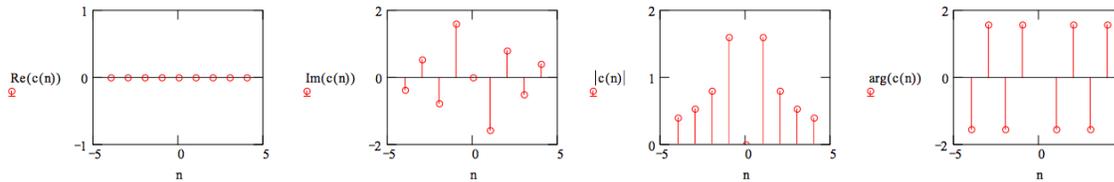


FIG. 5.10 – Module et phase des coefficients de la SF c_n de la fonction réelle et impaire $x(t) = t$ entre $-T/2$ et $T/2$, de période T .

Ces propriétés de symétrie sont importantes car elles peuvent aider quand on cherche à déterminer la décomposition en SF d'une fonction. Les symétries de la fonction se traduisent en d'autres propriétés de symétrie pour les coefficients, ce qui permet souvent de réduire le nombre de coefficients qu'il faut effectivement calculer.

En résumé, étant donnée une fonction $x(t)$ périodique, nous sommes capables de la décomposer "sur la base" des fonctions oscillantes complexes $f_n = e^{in\omega t}$ et inversement, la connaissance des coefficients $\{c_n\}$ de cette décomposition, ou spectre de $x(t)$, permet de retrouver la fonction par la relation d'inversion :

$$\{c_n\} \Leftrightarrow x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}.$$

5.6.1 Un exemple interactif sur le web

△ Pour comprendre encore mieux, nous pouvons utiliser ensemble une autre animation interactive, nommée "fourier1.html", du site web "Figures animées pour la physique",

<http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/index.html> .

Faisons cela étape par étape.

- 1 Commençons avec la fonction simple **cosinus** (en mode "sin/cos"). C'est l'exemple le plus facile : la décomposition sur la base des fonctions harmonique contient simplement une contribution égale à $\cos(\omega t)$! On a donc $a_1 = 1$ et tout le reste zéro :

$$x(t) = 1 \cdot \cos(\omega t).$$

C'est ce qui est représenté par les leviers sur l'animation. Si maintenant on veut la décomposition sur les fonction $f_n = e^{in\omega t}$ (mode "spectre"), on peut écrire

$$x(t) = \cos(\omega t) = \frac{1}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}$$

d'où $c_1 = c_{-1} = 1/2$ et tous les autres c_n zéro. On a bien $c_n = \bar{c}_{-n}$ comme prévu pour une fonction réelle et paire. Sur l'animation en mode "spectre", ce qui est représenté par les leviers, ce sont les coefficients $2c_n$, avec n positif. L'autre moitié des composantes, $2c_{-n}$, n'est pas représentée, car la fonction est réelle et donc la connaissance des c_n avec n positif suffit. Le vecteur en rouge qui tourne est le vecteur $2c_n e^{i\omega t} = e^{i\omega t}$. Un vecteur unitaire qui tourne à une vitesse ω constante dans le plan complexe : sa partie réelle est sur l'axe vertical, sa partie imaginaire sur l'axe horizontal.

On remarque alors que la fonction $x(t)$ est la projection sur l'axe vertical (donc la partie réelle) de ce vecteur complexe qui tourne. Est-ce correct ? D'après notre définition générale de SF, on a

$$x(t) = c_0 + \sum_0^{\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t})$$

comme $x(t)$ est réelle, on a $c_n = \bar{c}_{-n}$ et donc aussi

$$x(t) = c_0 + \sum_0^{\infty} c_n e^{in\omega t} + \bar{c}_n \overline{e^{in\omega t}} = c_0 + \sum_0^{\infty} 2\text{Re}(c_n e^{in\omega t}). \quad (5.23)$$

On comprend pourquoi on a choisi d'indiquer les coefficients $2c_n$ et de représenter les vecteurs $2c_n e^{in\omega t}$: c'est parce que, pour les fonctions réelles, la fonction est exactement égale à la partie réelle de $c_0 + \sum_0^{\infty} 2\text{Re}(c_n e^{in\omega t})$. Ici on a un cas simple avec une seule composante, mais la même chose sera valable pour les autres fonctions.

- 2 Voyons rapidement ce qu'on a pour la fonction **sinus** : c'est la même chose sauf que la fonction est impaire, on a donc $b_1 = 1$ et les autres zéro, et $\sin(\omega t) = (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/2i$ d'où

$$c_1 = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2} = \frac{e^{-\pi/2}}{2} = -c_{-1}.$$

- 2' Si maintenant on ajoute à la fonction précédente une **composante continue** a_0 en agissant sur le levier correspondant, alors on voit que notre résultat devient la partie réelle de la somme de deux vecteurs complexes : un fixe ($a_0 e^{i0}$), l'autre qui tourne à vitesse ω comme avant. C'est le résultat prévu par notre calcul 5.23.

3 Que se passe-t-il alors si on rajoute au signal sinus une **autre composante harmonique** de pulsation $n\omega$ différente ? Par exemple, essayons de mettre $c_3 \neq 0$: on rajoute donc un terme de pulsation 3ω .

Ceci correspond à sommer un troisième vecteur aux deux autres, qui cette fois tourne à une vitesse 3ω , donc trois fois plus vite que le premier ; le signal est encore périodique de période $T = 2\pi/3$, mais on a rajouté une harmonique supérieure : sa forme change, une oscillation plus rapide vient se rajouter à l'oscillation fondamentale de pulsation ω .

3' Quelle est maintenant **l'influence de la phase** ? Changeons la phase de c_3 (en mettant par exemple une phase autour de -1.5) : la forme du signal change, car la composante rapide est décalée par rapport à la fondamentale, les deux se somment d'une manière différente.

4 Pour compléter le cadre, voyons un exemple de "vrai" signal avec sa décomposition en SF : prenons le **signal en créneau**, que nous avons vu en introduction. Plus de termes apparaissent, mais attention, nous n'avons ici que les premiers termes du développement en SF, le signal est donc reproduit de manière approchée.

Les vecteurs complexes montrent bien ce qui se passe : on somme des composantes oscillantes de pulsation de plus en plus élevée, et toutes multiples de la fondamentale ($2\omega, 3\omega, 4\omega\dots$) et de module (pour ce cas) de plus en plus faible. Leur somme approche le signal, et on peut voir que au fur et à mesure qu'on enlève des composantes, le signal est de moins en moins bien approché, et de plus en plus arrondi : ce sont les pulsations les plus élevées qui permettent de bien représenter les "coins" du carré, là où la variation est la plus rapide. C'est une propriété très générale sur laquelle nous allons revenir.

La figure 5.11 est une autre représentation du développement en SF du signal en créneau et des premiers coefficients de Fourier c_n .

4' Pour finir, essayons encore une fois de changer les phases, cette fois pour le signal en créneau : et bien ça ne rassemble pas du tout au signal en créneau ! La phase est donc importante, elle contient une partie essentielle de l'information sur le signal, car si on ne somme pas les différentes contributions avec la bonne correspondance temporelle, on ne peut pas reproduire correctement le signal.

5.7 Energie et puissance

Nous avons discuté dans les exemples précédents le rôle de la phase. Cependant, la phase n'est pas toujours importante. En particulier, nous avons vu en 3.2 que les capteurs lumineux ne sont sensibles qu'à l'énergie de l'onde électromagnétique, qui est homogène au module au carré du champ électrique. La phase est ainsi complètement ignorée. La même chose vaut pour notre œil. Plus en général, si on ne s'intéresse que à l'énergie transportée par un signal, on aura toujours cette indépendance vis-à-vis de la phase. Nous l'avons vu aussi dans le cas de l'oscillateur mécanique, pour lequel on avait trouvé en 1.4.1 que l'énergie était proportionnelle au module carré du déplacement ρ :

$$E = \frac{1}{2} K \rho^2 \quad \text{énergie oscillateur mécanique.}$$

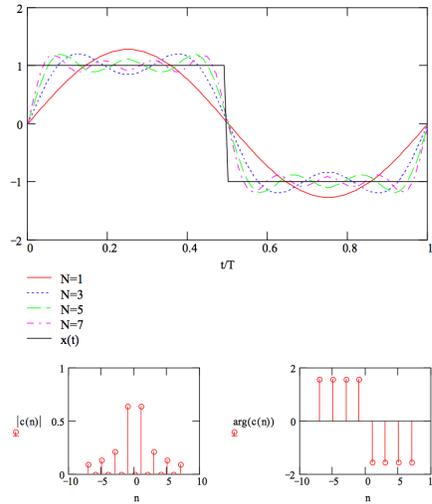


FIG. 5.11 – La fonction en créneau $x(t)$ avec les premières sommes d'harmoniques et les premiers coefficients de Fourier (partie centrale du spectre).

Or, pour un système linéaire, ce qui est vrai pour un signal oscillant est vrai pour une somme de signaux oscillants à des pulsations différentes, et donc pour une série de Fourier : pour un signal périodique quelconque, l'énergie est la somme des énergies de ses composantes de Fourier et ne dépend donc que des amplitudes correspondantes. Mais ces amplitudes ne sont rien d'autres que les coefficients du développement en SF ! On est donc en train de dire que pour n'importe quel signal périodique, la connaissance du spectre $\{c_n\}$ est suffisante pour déterminer son énergie. D'ailleurs nous avons remarqué que le spectre de $x(t)$ doit contenir toute l'information sur $x(t)$. Il n'est donc pas étonnant que l'énergie puisse être exprimée aussi sur la base des coefficients c_n . Ce qu'on a en plus est qu'elle ne dépendra que des modules carrés de ces coefficients, et non pas de leur phase.

Essayons d'écrire cela d'une manière un peu plus formelle. Pour commencer, comme on parle d'un signal quelconque, il faut préciser que signifie son énergie. Par analogie avec les circuits électriques, on définit l'**énergie instantanée** du signal x comme⁵

$$e(x, t) = |x(t)|^2 \quad \text{énergie instantanée.} \quad (5.24)$$

L'énergie instantanée est une grandeur difficile à mesurer. Ce qu'on peut mesurer plus aisément est l'**énergie moyenne** sur un intervalle de temps Δt :

$$E(x) = \int_0^{\Delta t} |x(t)|^2 dt \quad \text{énergie moyenne sur l'intervalle } \Delta t \quad (5.25)$$

Pour un système oscillant, on prend souvent la moyenne sur une période, $\Delta t = T$,

$$E(x) = \int_0^T |x(t)|^2 dt \quad \text{énergie moyenne sur la période } T \quad (5.26)$$

⁵Rappelons que si $x(t)$ est une fonction complexe, $|x(t)|^2 = x(t)\bar{x}(t)$.

et on aura l'**énergie totale** transportée par le signal en intégrant entre $-\infty$ et $+\infty$. Puisque l'énergie moyenne croît avec le temps d'intégration, il est parfois utile de considérer la **puissance moyenne**⁶, définie comme

$$P(x) = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} |x(t)|^2 dt \quad \text{puissance moyenne} \quad (5.27)$$

et qui est donc indépendante du temps d'intégration Δt .

Il suffit maintenant de développer $x(t)$ en série de Fourier et de substituer dans la définition (14.35) pour obtenir le **théorème de Parseval** :

$$P(x) = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2. \quad (5.28)$$

• Exercice

Retrouver le théorème de Parseval en substituant le développement en SF dans la définition de puissance moyenne (14.35).

Résumons : la puissance (c'est-à-dire l'énergie transportée par unité de temps) du signal $x(t)$, qui s'écrit par définition comme l'intégrale de $x(t)^2$ sur une période divisée par la période, peut s'écrire aussi comme la somme des énergies transportées par chacune de ses composantes ; chacune de ces énergies est simplement donnée par l'amplitude $|c_n|$ de l'oscillation, au carré.

L'ensemble des amplitudes carrées des composantes du spectre forme donc le **spectre d'énergie** du signal,

$$\{|c_n|^2\} = \text{Spectre d'énergie de } x(t), \quad (5.29)$$

qu'on pourra cette fois représenter sur un seul graphe puisqu'on n'a plus de phase. Nous verrons que ce théorème se généralise aux spectres des fonctions non périodiques (pour la *transformée* de Fourier) et aux signaux aléatoires (théorème de Wiener-Khintchine) .

Remarquons pour finir qu'une certaine ambiguïté peut subsister dans la définition de spectre d'un signal, car le même terme est utilisé pour le spectre du signal $\{c_n\}$ (5.22), le spectre d'amplitude $\{|c_n|\}$ et le spectre d'énergie $\{|c_n|^2\}$ (5.29). Il est utile donc de bien préciser à quelle des deux définitions on fait référence.

5.7.1 Conclusion

Premièrement, avons-nous répondu à la question posée au début de ce cours ? Il s'agissait de déterminer la réponse du système pour une sollicitation $e(t)$ *non harmonique*. Nous avons donc bien notre réponse :

⁶En électronique, si $v(t)$ représente la tension aux bornes d'une résistance et $i(t)$ le courant qui la traverse, alors la puissance instantanée consommée par la résistance est $p(t) = v(t)i(t) = v^2(t)/R$, et la puissance moyenne est donnée par l'intégrale de cette grandeur sur une période, divisée par la période. En effet, les mêmes définitions peuvent être appliquées au cas d'un oscillateur mécanique amorti : voir *Le cours de physique de Feynman, mécanique I*, chapitre 24.

si

$$e(t) = a \cos(\omega t + \Delta) \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{EDL}} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} s(t) &= aT(\omega) e(t) \\ &= a|T(\omega)| \cos(\omega t + \Delta + \theta_T(\omega)) \end{aligned}$$

et donc en notation complexe

$$e(t) = ae^{in\omega t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{EDL}} \quad \rightarrow \quad s(t) = aT(\omega) e^{in\omega t}$$

alors pour $e(t)$ périodique on aura

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{EDL}} \quad \rightarrow \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n T(n\omega) e^{in\omega t}$$

Nous sommes donc capables de trouver la réponse d'un système linéaire à une sollicitation périodique, comme la somme des réponses à toutes ses composantes harmoniques. Il est particulièrement intéressant de faire une analyse de ce type en électronique, où les signaux sont typiquement périodiques. Les circuits considérés en électronique se comportent souvent comme des *filtres*, c'est-à-dire ils transmettent certaines fréquences sans atténuation, alors que d'autres sont fortement atténuées. En termes de développement en série de Fourier, donc, on dira que seulement certaines composantes (termes de la série) sont transmises. Dans le cas d'un filtre passe-bas, par exemple, on peut voir l'effet sur les différents termes de la série de Fourier : en partant de la série complète, qui représente le signal d'entrée, le filtre coupe les fréquences plus élevées, les variations plus rapides sont supprimées et on observe en sortie un signal de plus en plus arrondi si la *fréquence de coupure* devient de plus en plus petite (comme nous l'avons vu sur l'exemple du signal en créneau). Un filtre passe-haut, au contraire, sera capable de supprimer la composante continue $c_0 = a_0$ et certaines des oscillations à fréquences plus faibles, un filtre passe-bande sera éventuellement capable de ne laisser passer qu'une seule composante de la série, etc.

Chapitre 6

Transformée de Fourier (TF)

6.1 Décomposition d'une fonction apériodique : la transformée de Fourier

Nous avons vu comment la série de Fourier nous permet d'analyser un signal périodique non sinusoïdal en termes de ses composantes harmoniques. On parle d'*analyse* du signal dans le sens que cette décomposition en composantes simples permet de mieux le comprendre, de savoir comment il est construit : par exemple on pourra différencier le son émis par un instrument ou d'un autre par les harmoniques qu'il contient. D'autre part, la SF nous permet, nous l'avons vu, de déterminer la réponse d'un système linéaire, comme la somme des réponses aux composantes individuelles.

Mais en pratique ce résultat ne nous satisfait pas complètement : les signaux périodiques sont un ensemble encore trop limité. En particulier, que faire pour analyser une lumière non monochromatique ? Elle ne contient pas que les harmoniques d'une fréquence fondamentale, mais une série de fréquences qui ne sont pas liées par une relation particulière.

Plus simplement encore, même quand on s'intéresse à des signaux périodiques, il y a une raison encore plus fondamentale pour se poser le problème des signaux non périodiques, et c'est que toute mesure est faite sur un temps de durée limitée. Par conséquent, même si le signal est périodique, ce qu'on enregistre ne l'est plus : Quelle



FIG. 6.1 – Un signal périodique enregistré pendant une durée limitée Δt .

sera alors la réponse du système ? Dans la même direction on peut s'intéresser aussi à la réponse à une courte impulsion, comme un choc, à un changement de régime à $t = 0$, ou bien à n'importe quel signal en entrée. Dans certains cas bien particuliers la solution de l'EDL est possible par les méthodes usuelles, mais pour la plus part des signaux ce n'est pas le cas.

D'où la question qu'on va adresser dans ce chapitre : est-il possible de généraliser la méthode de décomposition introduite par la SF à des fonctions non périodiques ? La réponse est donnée par la **transformée de Fourier (TF)**.

6.1.1 Passage de la SF à la TF

La généralisation de la décomposition de Fourier peut être introduite de manière assez simple dans le cas des **signaux de durée finie** (figure 6.2).

Soit $x(t)$ un signal de durée finie Δt .

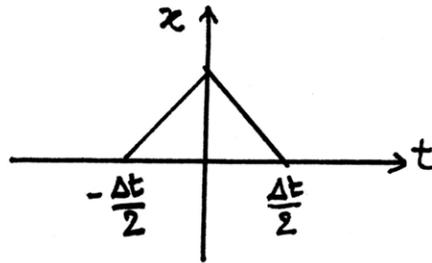


FIG. 6.2 – Un exemple de signal de durée finie Δt .

On peut alors construire, à partir de $x(t)$, un signal périodique $y(t)$ en répétant $x(t)$ avec une périodicité $T > \Delta t$ (figure 6.3) :

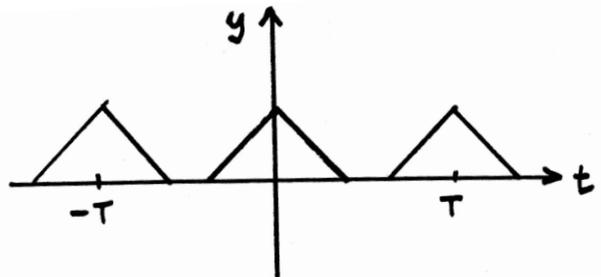


FIG. 6.3 – Le signal périodique $y(t)$ obtenu en répétant $x(t)$ avec une période T .

Dans ce cas, le signal de durée limitée $x(t)$ peut être vu comme la limite de $y(t)$ pour $T \rightarrow \infty$: plus la période augmente, plus les contributions non nulles s'éloignent les unes des autres, et, pour T qui tend à l'infini, il ne reste plus que la contribution centrale. On écrit donc

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} y(t). \quad (6.1)$$

Comme $y(t)$ est périodique, sa SF existe : écrivons-la

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad (6.2)$$

avec $\omega = 2\pi/T$ et $\omega_n = n\omega$. On peut alors se poser la question suivante : que devient la SF de $y(t)$ lorsque $y(t) \rightarrow x(t)$, c'est-à-dire à la limite $T \rightarrow \infty$?

Essayons de deviner la réponse sans faire le calcul complet, grâce à quelques observations.

Pulsation continue

Si $T \rightarrow \infty$, alors $\omega_{n+1} - \omega_n = (n+1-n)\omega = \omega \rightarrow 0$: les pulsations des harmoniques ω_n se rapprochent de plus en plus les unes aux autres. A la limite, on passe d'une série discrète de pulsations à une **pulsation ω continue**, qui prend toutes les valeurs réelles.

C'est raisonnable : comme à la limite il n'y a plus de période T , l'échelle de temps caractéristique du signal disparaît, toutes les échelles de temps sont en principe présentes, et la notion de pulsation fondamentale n'a plus de sens.

Passage des c_n à la transformée de Fourier

Que deviennent les coefficients c_n dans cette limite ? A partir de la définition, on obtient¹

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-i\omega_n t} dt = 0. \quad (6.3)$$

La limite directe des coefficients c_n ne nous permet pas de définir un équivalent "continu" des coefficients de la série ; mais la difficulté vient du facteur $1/T$ qui va à zéro. On peut donc s'en passer si on considère la limite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T c_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-i\omega_n t} dt : \quad (6.4)$$

pour cette grandeur, la limite est définie. De manière un peu intuitive nous pouvons la déterminer en considérant que $T \rightarrow \infty$, $y(t) \rightarrow x(t)$ et que nous savons que les pulsations ω_n doivent être remplacées à la limite par une pulsation ω continue : en effet, on peut montrer que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T c_n = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (6.5)$$

On va donc prendre cette dernière quantité comme la généralisation à une fonction non périodique de durée limitée des coefficients de la série de Fourier. On se rappellera qu'on a du multiplier par T dans le passage au limite : il sera donc normal de trouver un facteur T qui intervient quand on voudra comparer SF et TF.

6.1.2 Définition de TF et TF inverse

Définissons donc la **Transformée de Fourier (TF) de $x(t)$** :

$$X(\omega) = TF[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{TF de } x(t). \quad (6.6)$$

¹Nous profitons ici du fait que l'intégrale d'une fonction périodique sur une période T est toujours la même pour n'importe quel intervalle de durée T , pour intégrer entre $-T/2$ et $T/2$ plutôt que entre 0 et T comme dans le chapitre 5.

Remarquons que l'opération que l'on fait pour obtenir la TF est toujours la même : il s'agit de "projeter" la fonction $x(t)$ sur une base de fonctions exponentielles. La différence, et il faut bien comprendre ce point, est que ici il n'y a pas un ensemble discret de fonctions $f_n = e^{i\omega_n t}$ sur lesquelles projeter, mais une infinité de fonctions $e^{i\omega t}$, chacune associée à une pulsation $\omega \in \mathbb{R}$: on passe donc d'une série de coefficients c_n à une **fonction continue** $X(\omega)$ **de la pulsation** ω .

Comme pour la SF, la connaissance de sa transformée $X(\omega)$ doit nous permettre de retrouver $x(t)$. Il est possible d'obtenir ce résultat à partir du même passage au limite que nous avons utilisé plus haut, mais contentons nous de donner le résultat final : on montre que la fonction $x(t)$ peut s'écrire en termes de sa TF comme

$$x(t) = TF^{-1}[X(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad \text{TF inverse } (\omega) \quad (6.7)$$

$$= TF^{-1}[X(f)] \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df \quad \text{TF inverse } (f). \quad (6.8)$$

Dans la deuxième écriture, on a juste introduit la fréquence $f = \omega/2\pi$ et fait le changement de variable correspondant : $X(f) = X(\omega)$ où ω a été exprimé comme $2\pi f$. C'est utile d'introduire cette notation ici car la variable d'intégration "naturelle" pour la transformée de Fourier inverse est f , comme on le voit dans les intégrales précédentes (où on a df ou $d\omega/2\pi$ qui est encore égale à df). Dans la pratique, les deux variables sont équivalentes et interchangeables et on utilise l'une au l'autre selon la convenance ou l'habitude².

Que signifie tout ça ? Nous voyons ici que une fonction quelconque (de durée limitée pour le moment) $x(t)$ peut être exprimée comme une intégrale (qui remplace la somme de la SF) de fonctions exponentielles complexes $e^{i\omega t}$ (pour toute $\omega \in \mathbb{R}$), chacune multipliée par une amplitude donnée par la valeur $X(\omega)$ (calculée donc en ω).

En d'autres mots, la $TF[x(t)]$ représente le **spectre** du signal $x(t)$, et donne, pour chaque pulsation ω , l'amplitude $X(\omega)$ correspondante à la contribution $e^{i\omega t}$.

6.2 Conditions d'existence

Dans notre introduction de la TF nous avons considéré une fonction $x(t)$ de durée limitée. Cette condition est bien souvent vérifiée car, comme nous l'avons dit, elle est une condition nécessaire de toute mesure physique ! Cependant, pour des raisons diverses, et particulièrement pour de raisons de simplicité de calcul et d'écriture, il est utile, d'un point de vue théorique, d'élargir un peu l'ensemble des signaux pour lesquels on peut calculer un spectre, pour pouvoir considérer des fonctions de référence simples comme $x(t) = \text{constante}$, ou $\cos(\omega t)$, ou la fonction échelon $\Gamma(t) = 1$ pour $t > 0$ et $= 0$ pour $t \leq 0$. Ceci n'est pas toujours possible dans le cadre de la TF, et nous allons devoir introduire une autre opération, la *transformée de Laplace*, et des "fonctions" spéciales, les *distributions*, pour pouvoir traiter un certain nombre de ces fonctions.

²Il est possible d'utiliser aussi une convention différente pour les signes des exposants, selon les ouvrages.

Il est donc utile, ici, de préciser un peu les conditions d'existence de TF et TF^{-1} , de manière à savoir pour quels cas nous pouvons les utiliser sans problèmes. C'est un peu compliqué car la TF peut exister sans que sa transformations inverse existe, selon les propriétés du signal $x(t)$; mais dans ce cours on va pouvoir se limiter aux cas le plus simples et juste introduire une classe de fonctions pour laquelle tout est bien défini.

Considérons donc l'ensemble des **fonctions à carré sommable**, noté $L^2(\mathbb{R})$ et défini par :

$$x(t) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{si} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt. \quad (6.9)$$

On a donc la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } x(t) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{alors} \quad X(\omega) = TF[x(t)] \quad \text{existe et} \quad \in L^2(\mathbb{R}); \\ \text{par conséquent } TF^{-1}[X(\omega)] = x(t) \quad \text{existe aussi.} \end{aligned}$$

On remarque que en 5.7 nous avons défini l'énergie (totale) d'un signal justement comme $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$: l'ensemble $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions à carré sommable est donc aussi, par définition, l'ensemble des signaux **d'énergie finie**. Nous pouvons donc nous contenter de ce résultat pour l'instant : on peut utiliser la décomposition en TF pour tous les signaux d'énergie finie et donc tous les signaux physiques ! Ce qui comprend en particulier les fonctions de durée finie (non divergentes) dont nous avons parlé, mais aussi toutes ces fonctions qui décroissent à zéro de manière suffisamment rapide pour $t \rightarrow \pm\infty$, comme par exemple $\exp(-t^2)$.

6.3 Spectre d'énergie

Comme nous l'avons dit, le spectre d'un signal apériodique (et à carré sommable) est donné par sa TF :

$$X(\omega) = TF[x(t)] \quad \text{spectre de } x(t). \quad (6.10)$$

Le spectre d'un tel signal est donc continu ; il est en général complexe ($X(\omega)$ est une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$). Pour le représenter, il faudra donc tracer module et phase de la fonction $X(\omega)$. Un exemple de tracé de TF est donné dans la figure 6.4.

Comme pour le cas des signaux périodiques, on peut montrer que l'énergie du signal, qui s'écrit par définition comme l'intégrale l'énergie transportée à chaque instant t , peut aussi être exprimée comme l'intégrale des contributions d'énergie transportées par chaque pulsation ou fréquence : cela nous donne la version continue du **théorème de Parseval** :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (6.11)$$

où le module carré de la TF remplace le module carré des c_n et la somme sur n devient une intégrale en df , comme on pouvait le deviner. On appellera donc $|X(\omega)|^2$ le **spectre d'énergie** du signal :

$$|X(\omega)|^2 = |X(f)|^2 \quad \text{spectre d'énergie de } x(t).$$

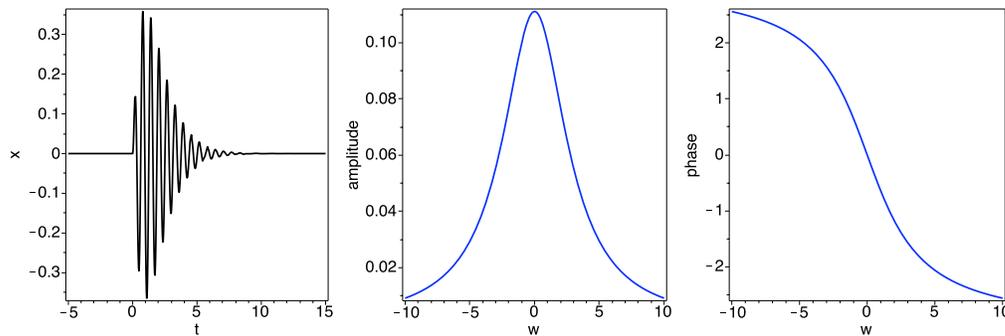


FIG. 6.4 – La fonction $x(t)$ égale à $\sin(10t)t \exp(-t)$ pour $t \geq 0$, avec le module et la phase de sa TF $X(f)$.

6.4 Exemple et remarques

Nous allons maintenant approfondir un peu notre connaissance de la TF par un exemple, qui nous permettra aussi de faire quelques remarques intéressantes.

Example. Considérons pour commencer un signal qui n'est pas à carré sommable mais dont on connaît la SF. Le plus simple est le signal constant :

FIG

$$x(t) = x_0 = \text{cte} \quad (6.12)$$

dont la SF est donné par les coefficients $c_0 = x_0$, $c_n = 0 \forall n \neq 0$. La TF du signal n'est donc pas définie. Mais imaginons de mesurer ce signal pendant un intervalle de temps de *durée finie* :

$$\begin{aligned} x_1(t) = x_0 &= \text{cte pour } -T \leq t \leq T, \quad 0 \text{ ailleurs} \\ &= x_0 \text{Rect}(t/T); \end{aligned} \quad (6.13)$$

la fonction $x_1(t)$ est alors une fonction constante sur un intervalle de durée $2T$, ce qu'on

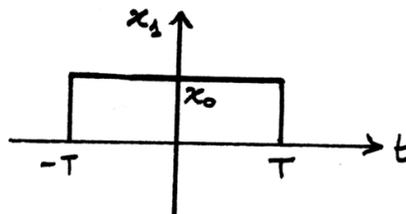


FIG. 6.5 – La fonction $x_1(t) = x_0 \text{Rect}(t/T)$.

appelle une fonction rectangle, notée $\text{Rect}(t/T)$. Elle n'est pas périodique, donc sa SF

n'est pas définie, mais elle est d'énergie finie, et on peut donc en calculer la TF :

$$\begin{aligned}
 X_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)e^{-i\omega t} dt = \\
 &= \int_{-T}^{+T} x_0 e^{-i\omega t} dt = \\
 &= -x_0 \frac{1}{i\omega} [e^{-i\omega t}]_{-T}^{+T} = \\
 &= -x_0 \frac{e^{-i\omega T} - e^{+i\omega T}}{i\omega} = \\
 &= x_0 2T \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} = x_0 2T \operatorname{sinc}(\omega T) \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

où on a introduit la fonction *sinus cardinal* $\operatorname{sinc}(y) = \sin(y)/y$. Traçons $X_1(\omega)$ (la fonction est réelle pour ce cas particulier, on peut donc la dessiner sans prendre le module) :

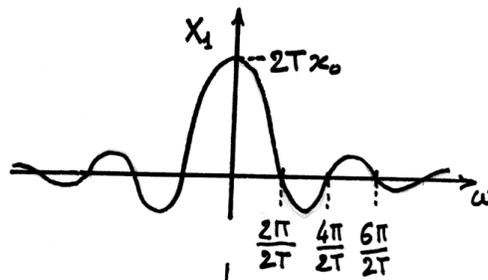


FIG. 6.6 – TF du signal rectangle $x_1(t)$.

6.4.1 Dualité temps-fréquence, influence de la durée du signal sur son spectre

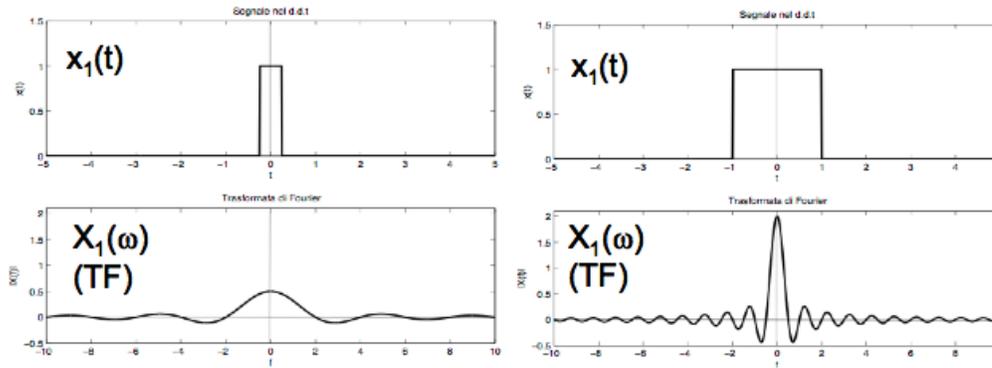
En comparant maintenant avec la SF de $x(t) = x_0 = \text{cte}$, on remarque que la raie spectrale à $\omega = 0$ qu'on avait trouvé pour la SF semble remplacé par un pic plus complexe et élargi autour de la même pulsation. Que devient ce pic si on change la durée T du signal ? La TF du signal de durée limité tend-il à se rapprocher de la SF de celui de durée infinie ? On peut évaluer la forme du pic central de $X_1(\omega)$ en calculant

- la hauteur du pic : $x_0 2T = x_0 \Delta t$ avec Δt la durée du signal ;
- la largeur du pic $\Delta\omega$: on a $\Delta\omega = 4\pi/2T = 4\pi/\Delta t$ entre deux zéros.

La largeur du pic $\Delta\omega$ est inversement proportionnelle à la durée Δt :

$$\Delta\omega \Delta t = \text{cte}. \quad (6.15)$$

C'est une relation importante entre la largeur du spectre d'un signal et sa durée, qui est toujours vérifiée : plus le signal est court, plus sa TF et donc son spectre sont élargis

FIG. 6.7 – Influence de la durée Δt d'un signal sur son spectre.

sur un grand intervalle de fréquences. On parle ainsi de **dualité temps-fréquence**. La figure 6.7 montre la TF de deux fonctions rectangle de durée différente.

Donc, plus la durée Δt du signal est grande, plus le pic de sa TF est haut et étroit : en même temps que le signal $x_1(t)$ s'approche du signal de durée infinie $x(t)$ (sa durée devient de plus en plus grande), le spectre $X_1(\omega)$ s'approche de plus en plus d'une raie très étroite centrée sur la pulsation $\omega = 0$...

6.5 TF au sens des distributions : la distribution delta de Dirac $\delta(y)$

Que se passe-t-il à la limite $T \rightarrow \infty$? Le signal $x_1(t)$ tend vers le signal constant $x(t) = x_0$: que devient sa TF? Retrouvera-t-on la SF du signal constant?

Presque, mais pas exactement. Voyons. En principe, nous savons que nous ne sommes pas autorisés à calculer la TF de la fonction limite $\lim_{T \rightarrow \infty} x_1(t) = x(t)$, car cette fonction n'est pas à carré sommable. Mais nous pouvons essayer de calculer la limite³ de la TF de la fonction $x_1(t)$:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} X_1(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} x_0 2T \operatorname{sinc}(\omega T) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } t = 0 \\ 0 & \text{pour } t \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Le résultat n'est donc pas une fonction ! Ce n'est pas étonnant qu'on ne puisse pas le calculer directement par TF. Cependant, c'est un résultat intéressant et raisonnable : nous avons trouvé, comme prévu, un spectre qui consiste en une seule raie spectrale à la pulsation $\omega = 0$, nul ailleurs, comme nous nous attendions par comparaison avec la SF. Seulement, l'amplitude en $\omega = 0$ est infini. Nous voudrions pouvoir "garder" ce résultat : pour cela il faut admettre cette limite de fonction dans notre univers mathématique.

On définit alors la **distribution delta de Dirac** $\delta(y)$. Une distribution (également appelée fonction généralisée) est un objet qui généralise la notion de fonction. Dans

³Essayez de calculer cette limite comme exercice. On rappelle que $\operatorname{sinc}(0) = 1$.

notre cas, la distribution $\delta(y)$ dépendante de la variable y est la fonction nulle partout sauf en zéro où elle est divergente. Ces conditions ne sont pas suffisantes pour la définir de manière univoque car il manque une condition de normalisation. Si on rajoute une telle condition, on parvient à définir le delta de Dirac par les propriétés suivantes :

$$\delta(y) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } y = 0 \\ 0 & \text{pour } y \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) dy = 1 \quad (6.17)$$

De manière alternative mais équivalente, le delta de Dirac peut être défini comme la limite de plusieurs fonctions *normalisées* : la fonction sinus cardinal, comme dans notre introduction, mais aussi une fonction rectangle de plus en plus étroite, une fonction triangle, une gaussienne, et encore d'autres fonctions. Des exemples sont donnée dans la figure 6.8.

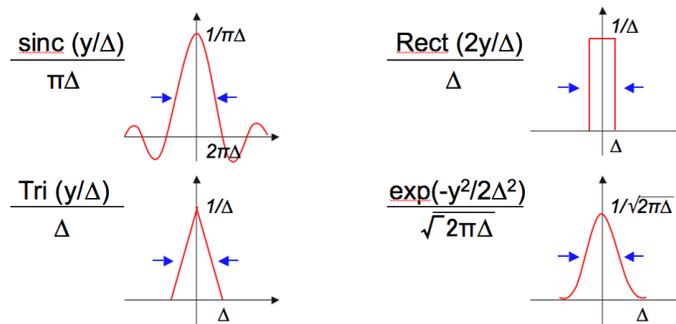


FIG. 6.8 – Quatre fonction dont la limite pour $\Delta \rightarrow 0$ est une distribution delta de Dirac $\delta(y)$.

On introduit aussi une représentation graphique pour le delta de Dirac : une flèche vers le haut positionnée en $y = 0$, de longueur égale à 1 (figure 6.9). Comme ça, on indique à la fois le point où la distribution diverge, et sa normalisation.

On peut maintenant facilement définir un delta de Dirac positionné non pas en $y = 0$ mais en $y = y_0 \neq 0$: il suffit de faire une translation, et on obtient donc

$$\delta(y - y_0)$$

qui sera représenté par une flèche de longueur 1 en y_0 (figure 6.9). Encore, la normalisation de la distribution permet de donner un sens au fait de la multiplier par une constante a : on obtient toujours une fonction nulle partout et infinie en un point, mais dont l'intégrale vaut a . On la représentera alors par une flèche de longueur a . Dans la figure 6.9, on a représenté par exemple $2\delta(y - y_1)$ comme une flèche de longueur 2 positionné en $y = y_1$. Attention donc : multiplier delta par une constante a signifie modifier non pas son amplitude (qui reste égale à zéro ou infini) mais son intégrale : $\int a\delta(y)dy = a$.

6.5.1 Propriétés de la distribution de Dirac

Au delà de cette définition comme limite de fonctions, le delta de Dirac a des propriétés importantes et utiles, qui sont liées à l'opération d'intégration. Ecrivons-les, avec

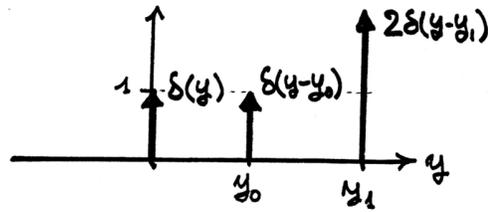


FIG. 6.9 – Représentation graphique des distributions delta de Dirac.

celles que nous avons déjà énoncées :

$$1. \delta(y) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } y = 0 \\ 0 & \text{pour } y \neq 0 \end{cases} \quad (\text{et donc } \delta(y - y_0) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } y = y_0 \\ 0 & \text{pour } y \neq y_0 \end{cases});$$

2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) dy = 1 \text{ condition de normalisation};$$

3.

$$\delta(ay) = \frac{1}{|a|} \delta(y); \quad (6.18)$$

Démonstration : pour $a > 0$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\pm ay) dy = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z) \frac{dz}{\pm a} = 1/a$.

4. Pour finir, une propriété très importante, qui est en fait une autre manière de définir le delta de Dirac :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - y_0) f(y) dy = f(y_0). \quad (6.19)$$

Montrons cette relation. Multiplier $\delta(y - y_0)$ par une fonction régulière $f(y)$ donne évidemment zéro partout et infini en y_0 , donc la seule contribution à l'intégrale vient du point $y = y_0$. En ce point, la fonction $f(y)$ vaut $f(y_0)$, et on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - y_0) f(y) dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - y_0) f(y_0) dy = \\ &= f(y_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - y_0) dy = f(y_0). \end{aligned}$$

L'introduction de la fonction généralisée delta de Dirac parmi nos fonctions permet donc de définir une TF pour la fonction constante $x(t) = x_0$: selon notre passage à la limite, on a

$$TF[x_0] = \lim_{T \rightarrow +\infty} TF[x_0 \text{Rect}(t/T)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} x_0 2T \text{sinc}(\omega T) = x_0 2\pi \delta(\omega) \quad (6.20)$$

La TF de la fonction constante n'existe pas en tant que fonction régulière, mais peut être identifiée à une distribution : on dit qu'elle n'existe pas **au sens des fonctions (asdf)** mais qu'elle existe **au sens des distributions (asdd)**.

• **Exercice**

Montrer le résultat précédent (6.20), en utilisant la relation

$$\delta(\omega) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (1/\pi\Delta) \operatorname{sinc}(y/\Delta).$$

Nous avons donc réussi, par un passage à la limite, à trouver une généralisation de la TF pour un cas de fonction d'énergie non finie, la fonction constante. Même si le résultat n'est pas une véritable fonction mais une distribution. On peut donc espérer de trouver une méthode plus directe pour généraliser le calcul de la TF à de fonction qui ne sont pas à carré sommable ? Pour pouvoir définir une décomposition en composantes harmoniques pour une classe de fonctions plus large, nous aurons besoin d'introduire une opération encore un peu différente : la transformée de Laplace. Nous allons le faire en 9.

6.6 Nos premières TF

Résumons donc nos premiers résultats concernant les TF : nous avons

$$TF[\operatorname{Rect}(t/T)] = 2T \operatorname{sinc}(\omega T) \quad (6.21)$$

$$TF[1] = 2\pi\delta(\omega) = \delta(f) \quad \text{asdd} \quad (6.22)$$

$$TF[\delta(t)] = 1 \quad \text{asdd} \quad (6.23)$$

où la deuxième relation correspond au cas qu'on vient d'étudier avant pour $x_0 = 1$, et nous avons introduit le résultat complémentaire pour la TF d'un delta de Dirac sans démonstration. Notons aussi que l'équivalence $2\pi\delta(\omega) = \delta(f)$ descend de la propriété 6.18.

Ces trois relations sont très importantes et doivent être connues par coeur. Nous les réutiliserons très souvent.

6.6.1 Les TF des fonctions de base : le dictionnaire

Il est important, pour en saisir le sens, de bien comprendre comment se calcule une TF, et quelques exercices où le calcul est fait explicitement vous seront proposés en TD. Cependant, le but de ce cours n'est pas tant d'apprendre à calculer des TF quant de savoir s'en servir pour étudier des signaux ou déterminer la réponse d'un système à ces signaux : il est donc aussi important d'apprendre à retrouver rapidement les transformées de fonctions d'intérêt et à les utiliser correctement.

Pour cela, vous avez à disposition une série de résultats notables rassemblés dans une *dictionnaire* que vous pourrez toujours consulter (Annexe A).

Ce dictionnaire contient une liste de fonctions $x(t)$ et leur TF exprimée soit en fonction de la pulsation, $X(\omega)$, soit de la fréquence, $X(f)$. Il reporte aussi les transformée de Laplace, que nous introduirons au chapitre 9, avec l'intervalle de validité correspondant. Pour chaque fonction on a aussi un commentaire où on dit en particulier si la TF fait intervenir des distributions (essentiellement $\delta(\omega)$) ou pas. Dans le cas affirmatif, la transformée est dite *au sens des distributions*; elle est dite *au sens des fonctions* dans le cas contraire.

Profitons tout de suite du dictionnaire pour vérifier nos calculs : pour la fonction rectangle⁴ on a bien la même transformée de Fourier en sinus cardinal que nous avons calculé. Les TF de la distribution delta de Dirac et de l'unité y sont aussi. On remarquera que le dictionnaire contient un bon nombre de fonctions qui ne sont pas à carré sommable : les TF de ces fonctions sont alors définies *au sens des distributions*, et peuvent être déterminées par des passages au limite, comme nous venons de le faire pour la fonction constante (on en verra un autre exemple important dans le chapitre 7). Cependant, il existe une méthode qui permet d'obtenir les propriétés spectrales de ces fonctions beaucoup plus directement : c'est la transformée de Laplace, qui généralise la TF à grand nombre de fonctions d'énergie infinie et que nous allons introduire au chapitre 9. Grâce à sa plus grande versatilité, c'est la transformée de Laplace que nous allons aussi utiliser dans la résolution des EDL (chapitre 11).

6.7 Pour aller plus loin : les propriétés des TF

Evidemment, nous aurons besoin aussi de fonctions qui ne sont pas dans le dictionnaires. Souvent, cependant, ces fonctions peuvent être déterminées à partir de celles du dictionnaire, par translation par exemple, où en le multipliant par une fonction simple, ou encore en sommant deux fonctions : dans la plupart de ces cas on peut retrouver les transformées de la nouvelle fonction à partir de celles de la fonction connue, en utilisant quelques propriétés des TF qui sont rassemblées dans le tableau de l'Annexe B.

Regardons les principales propriétés en détail.

1. Commençons par le **théorème de Parseval**, que nous avons déjà discuté : le module carré de la TF représente le spectre en énergie du signal.
2. **Dualité** : si la TF de $x(t)$ est $X(\omega)$, alors la TF de la fonction $X(t)$ est $x(-\omega)$: l'opération de transformée est en quelques sorte symétrique. Exemples (à retrouver sur le dictionnaire) : la TF de l'unité est un delta de Dirac, et la TF du delta de Dirac (qui est une distribution) est égale à 1 ; la TF de la fonction sinus cardinal est la fonction rectangle, et inversement comme nous l'avons vu (figure 6.10).
3. **Linéarité** : la TF est linéaire : si on considère une combinaison linéaire de deux fonctions, la transformée est tout simplement la combinaison linéaire des transformées.
4. **Translation** : une translation temporelle de t_0 de la fonction $x(t)$ a par conséquence l'apparition d'une phase $-\omega t_0$ dans la TF. Exemple : la TF d'une fonction rectangle décalée dans le temps a la même amplitude que celle de la fonction rectangle, mais la phase aura changé. C'est une propriété importante pour ce qui concerne l'énergie : une translation temporelle affecte la phase du spectre, mais ne change pas son amplitude, et donc le spectre d'énergie est inchangé.

⁴Il est conseillé de faire toujours attention à la définition exacte d'une fonction rectangle : il peut s'agir d'un rectangle de largeur T , ou $2T$, centré en zéro, ou bien démarrant en zéro... Dans ce cours, nous avons pris la même définition que sur ce dictionnaire, $\text{Rect}(t/T) = 1$ pour $t \in [-T, T]$, 0 ailleurs. Mais des définitions différentes pourraient être données dans les exercices ou dans d'autres ouvrages.

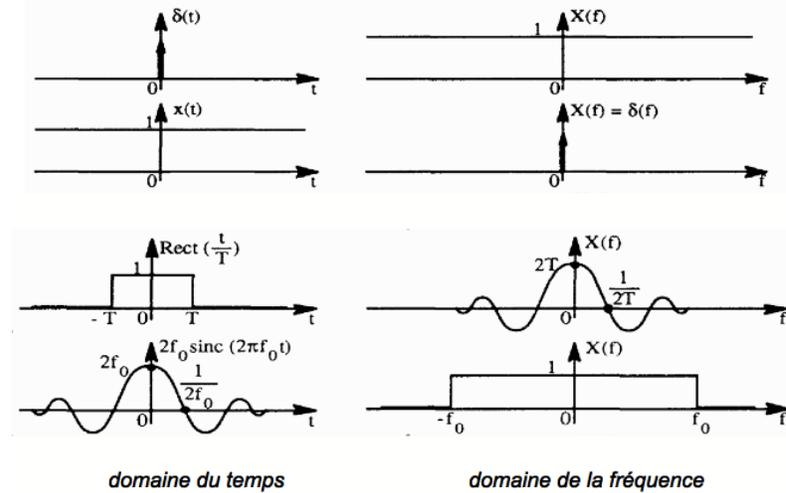


FIG. 6.10 – Exemples de la dualité de la TF : fonction unité et delta de Dirac, fonction sinus cardinal et fonction rectangle.

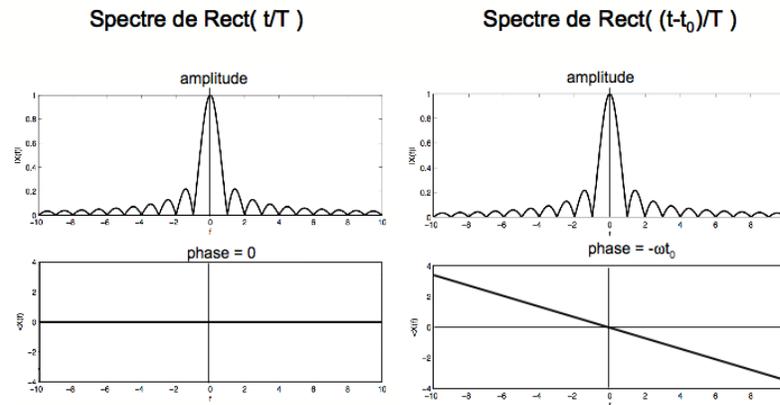


FIG. 6.11 – TF d'une fonction rectangle et de la même fonction décalée dans le temps.

5. **Modulation** : c'est un peu la propriété réciproque de la translation : si on multiplie un signal $x(t)$ par un terme de phase $\exp(i\omega_0 t)$, alors sa TF sera décalée de ω_0 dans l'espace des pulsations.

La encore c'est une propriété très utile car nous savons que $\exp(i\omega_0 t)$ représente une fonction oscillante (sa partie réelle est un cosinus) : la multiplication d'une simple fonction constante par $\exp(i\omega_0 t)$ va nous permettre alors de déterminer la TF de la fonction $\cos(\omega_0 t)$ à partir de celle de la fonction $x(t) = 1$. Nous allons voir cela en 7.2.

6. **Changement d'échelle** : Si l'on dilate la fonction dans l'espace temps, en multipliant le temps par un coefficient a (avec $|a| < 1$), alors les TF correspondantes seront contractées dans l'espace des fréquences, et leur amplitude est multipliée

par un facteur $1/|a| > 1$. Le contraire advient si $|a| < 1$. C'est une conséquence du principe de dualité temps-fréquence dont nous avons parlé. Remarquons aussi que a peut être négatif, ce qui implique que la fonction est aussi inversée par rapport à $t = 0$, et sa TF l'est donc aussi.

Pour finir, des propriétés qui ne sont pas mentionnées dans le tableau, mais que nous avons déjà vu pour les SF, et qui ont leur analogue pour la TF : les propriétés de **parité**. La TF d'une fonction paire (symétrique pour les temps positifs et négatifs) est purement réelle, alors que celle d'une fonction impaire est purement imaginaire. De même la transformée de Fourier d'une fonction réelle sera paire.

Arrêtons-nous là pour le moment. Dans le chapitre 7 nous allons nous familiariser avec ces concepts en traitant quelques exemples grâce à ces propriétés. On fera ensuite un incursion dans un sujet important en pratique, qui est la définition et l'utilisation de la TF pour des fonctions discrètes, ce qui signifie en pratique savoir traiter toutes les fonctions et les signaux numériques (chapitre 8). Une fois discuté ces points et fait un peu de pratique avec la TF, nous allons finalement pouvoir introduire la TL et aborder la question de la réponse d'un système linéaire à un signal quelconque, ce qui fera l'objet des chapitres 9, 10 et 11.

Chapitre 7

Fonctions périodiques et fonctions limitées dans le temps

7.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons introduit la série de Fourier, puis la transformée de Fourier comme outils pour décrire un signal temporel en termes de ses composantes harmoniques. Nous avons vu que cette décomposition en composantes se traduit par la représentation du signal dans le domaine de la fréquence, plutôt que du temps : cette représentation en fonction de la fréquence (ou de la pulsation) est appelée le spectre du signal, et contient toute l'information sur le signal lui-même : on détermine le spectre à partir du signal (en calculant la SF ou la TF), et le signal à partir du spectre (avec les transformations inverses).

Comme nous l'avons vu aussi, le spectre d'un signal périodique peut être obtenu par la SF et est toujours discret, constitué par un ensemble discret d'amplitudes complexes $\{c_n\}$; pour une fonction apériodique, le spectre est donné par la TF et devient une fonction continue de la pulsation, $X(\omega)$. En d'autres mots, le spectre du signal apériodique contient toutes les pulsations (fréquences), alors que seulement les composantes harmoniques de période T , $2T$, $3T$,... sont autorisées pour un signal périodique de période T .

Dans ce chapitre, nous allons partir de ces remarques pour aborder deux questions importantes :

- Peut-on calculer la TF d'une fonction périodique (vue comme cas particulier d'une fonction quelconque) ? Ce spectre sera-t-il discret ? Et quelle est alors sa relation avec la SF de la même fonction ?
- Une fois obtenue la TF d'une fonction périodique, quel sera l'effet sur son spectre si cette fonction est limitée à une durée finie T_e , par exemple parce qu'elle est issue d'une mesure effectuée pendant un temps donné ? En d'autres termes, quel est l'effet d'une *limitation supérieure* du temps d'observation ?

Avant de commencer, remarquons encore que la dernière question suggère en quelques sortes une question complémentaire : quels effets engendra une *limitation inférieure* du

temps d'observation, c'est-à-dire la nécessité d'enregistrer le signal et donc de l'échantillonner avec un pas de temps Δt ? Cette question sera abordée dans le chapitre 8.

7.2 TF et SF d'une fonction périodique

La première question que nous allons aborder est donc si et comment on peut déterminer la TF d'une fonction périodique, vue comme un cas particulier d'une fonction quelconque. Il est vrai que un signal périodique n'est pas d'énergie finie : en principe cela pose un problème pour la détermination de la TF, mais nous avons déjà vu un exemple dans lequel cette difficulté peut être surmontée au prix d'introduire la distribution delta de Dirac. C'est le cas de la

Fonction $x(t) = x_0 = \text{constante}$, pour laquelle nous avons¹

$$X(\omega) = TF[x(t)] = x_0 2\pi\delta(\omega). \quad (7.1)$$

A partir de ce cas et en utilisant les propriétés des TF introduites à la fin du chapitre 6, nous allons pouvoir déterminer une série de résultats intéressants. Commençons par un résultat que nous avons déjà obtenu.

Le signal $x(t)$ est en effet un cas particulier de fonction périodique (de période infinie), et nous avons comparé sa TF à la SF, qui donne $c_0 = x_0$, $c_n = 0$ pour tout $n \neq 0$: dans les deux cas, la seule pulsation $\omega = 0$ est présente dans le spectre, donnant un coefficient fini x_0 dans le cas de la SF, un pic infini $x_0 2\pi\delta(\omega)$, portionnel
à x_0 , dans le cas de la TF. »

Passons maintenant au cas qui nous intéressent, en procédant par étapes.

Fonction $x_1(t) = x_0 e^{i\omega_0 t}$:

Grâce à la propriété de **modulation**, nous avons

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= TF[x_1(t)] = TF[e^{i\omega_0 t} x_0] = TF[e^{i\omega_0 t} x(t)] = \\ &= X(\omega - \omega_0) = x_0 2\pi\delta(\omega - \omega_0) : \end{aligned} \quad (7.2)$$

On a le même delta de Dirac que pour la fonction constante, mais translaté en $\omega = \omega_0$.

Fonction $x_2(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$:

Nous savons récrire $\cos(\omega_0 t)$ comme $\frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$. En utilisant à la fois les propriétés de linéarité et modulation, nous avons alors

$$\begin{aligned} X_2(\omega) &= TF[x_2(t)] = TF\left[\frac{1}{2} x_0 (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})\right] = TF\left[\frac{1}{2} e^{i\omega_0 t} x(t) + \frac{1}{2} e^{-i\omega_0 t} x(t)\right] = \\ &= \frac{1}{2} (X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)) \\ &= x_0 (\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)). \end{aligned} \quad (7.3)$$

¹Si on part de la TF de la fonction unité, $TF[1] = 2\pi\delta(\omega) = \delta(f)$, ce résultat peut être vu comme une application de la propriété de linéarité : $TF[x(t)] = TF[x_0 1] = x_0 TF[1]$.

Nous avons donc pour $x_0 = 1$ le résultat général suivant : la TF de la fonction périodique $\cos(\omega_0 t)$ est donnée par deux delta de Dirac d'amplitude π , une en $\omega = \omega_0$, l'autre en $\omega = -\omega_0$. C'est un résultat très important que nous allons réutiliser bien souvent : il est bon de le mémoriser !!

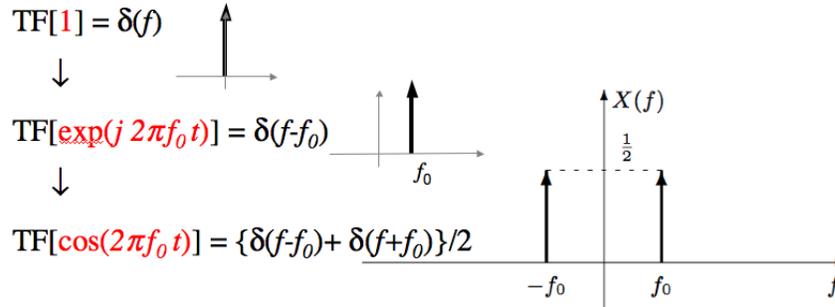


FIG. 7.1 – TF des fonctions $x(t) = 1$, $x_1(t) = e^{i\omega_0 t}$ et $x_2(t) = \cos(\omega_0 t)$ en fonction de la fréquence f .

Comparons maintenant ce résultat avec la SF du même signal,

$$SF[x_0 \cos(\omega_0 t)] = \begin{cases} c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2} x_0 \\ c_n = 0 \text{ pour } |n| \neq 1 \end{cases} \quad (7.4)$$

où les deux coefficients non nuls c_1 et c_{-1} correspondent aux deux pulsations ω_0 et $-\omega_0$ (ou f_0 et $-f_0$). On voit donc que, encore ici, les pulsations pour lesquelles le spectre est non nul sont les mêmes pour la SF et la TF : chaque composante non nulle en SF se traduit, quand on calcule la TF du même signal, en une raie infiniment fine, décrite par une distribution delta de Dirac $2\pi\delta(\omega) = \delta(f)$, placé à la même pulsation (ici $\pm\omega_0$) et multiplié par la même constante (ici $x_0/2$).

La notion de spectre est donc préservée au passage entre SF et TF : les mêmes contributions en fréquence sont mises en évidence par les deux méthodes, qui sont donc équivalentes pour une fonction périodique. La figure 7.1 résume ces résultats.

Poussons donc notre raisonnement un peu plus loin : que peut-on dire d'une fonction périodique mais non sinusoïdale ?

Fonction $y(t)$ périodique quelconque :

Nous savons traiter le cas d'une fonction périodique quelconque par la SF, qui a été introduite justement à ce but : cela nous permet d'écrire notre fonction $y(t)$ comme combinaison linéaire des fonctions oscillantes complexes $f_n = \exp(i\omega_n t)$ avec $\omega_n = n\omega_0$. On a ainsi

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t}. \quad (7.5)$$

On peut donc calculer la TF de $y(t)$ à partir de cette écriture, en utilisant encore une

fois les propriétés de linéarité et modulation :

$$\begin{aligned}
 Y(\omega) = TF[y(t)] &= TF\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n TF[e^{i\omega_n t}] \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n 2\pi \delta(\omega - \omega_n). \quad (7.6)
 \end{aligned}$$

Comme on aurait pu le prévoir, la TF de la fonction périodique contient une fois encore seulement les pulsations admises par la contrainte de périodicité : chaque composante harmonique ω_n correspond à une raie en delta de Dirac $2\pi\delta(\omega) = \delta(f)$ d'amplitude c_n (figure 7.2).

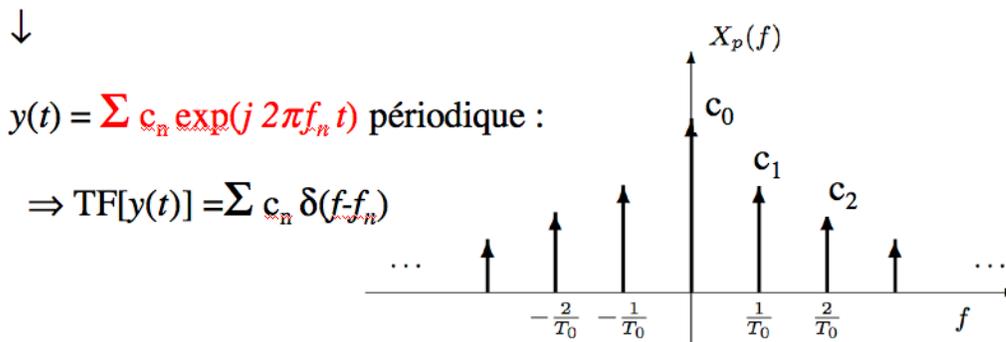


FIG. 7.2 – TF et SF d'une fonction périodique quelconque.

La correspondance entre TF et SF est donc assurée : les deux méthodes donnent la même information, en sachant que, dans le cas de la TF, des distributions de Dirac doivent apparaître toutes les fois que une périodicité impose une sélection des fréquences. Grâce à l'introduction des distributions, la TF peut donc être calculée aussi bien pour des fonctions périodique ou apériodique : étant plus générale, elle est plus pratique à utiliser dans tous les cas.

7.3 Influence de la durée limitée de l'acquisition

7.3.1 TF d'un signal sinusoïdal de durée limitée

Venons donc à notre deuxième question : quel est l'effet d'une limitation de la durée du signal à une durée T_e ? Et particulièrement pour le cas d'une fonction périodique ? La encore, nous avons déjà obtenu une première réponse dans le cas particulier de la fonction constante (cas $\omega_0 = 0$) dans le chapitre 4, où nous avons introduit, pour pouvoir « découper » une partie du signal, la fonction rectangle, égale à 1 sur une durée $2T$. Nous avons déjà déterminé au chapitre 4 la TF de cette fonction. Nous savons qu'une translation dans le temps de cette fonction ne change rien au module de sa TF, et ne modifie que sa

phase. On peut donc définir une fonction rectangle décalée $x_R(t)$, ou fonction **porte rectangulaire**, pour laquelle nous pouvons déterminer la TF : si

$$x_R(t) = x_0 \text{ entre } 0 \text{ et } T_e \text{ (ou n'importe quel autre intervalle de durée } T_e), \quad (7.7)$$

alors

$$|X_R(\omega)| = |TF[x_R(t)]| = x_0 T_e \operatorname{sinc}\left(\omega \frac{T_e}{2}\right). \quad (7.8)$$

Plus la durée T_e est grande, plus le sinus cardinal est étroit et son amplitude en zéro importante. Plus la durée T_e est petite, plus le sinus cardinal est large et son amplitude en zéro faible.

Utilisons maintenant les propriétés des TF pour essayer de déterminer le spectre d'un signal sinusoïdale coupé à partir de (7.8). C'est une question particulièrement intéressante, parce que, comme nous l'avons vu, un système physique linéaire excité par une fonction harmonique (par exemple par une onde électromagnétique monochromatique) ou bien libre d'osciller après avoir été mis hors d'équilibre émet un signal sinusoïdal à fréquence donnée : le spectre de ce signal sera donc composé d'une seule raie spectrale. Mais si on enregistre ce signal pendant un temps T_e et on calcule la TF du signal ainsi obtenu, la durée de l'enregistrement va modifier le spectre, et il faut savoir *comment* pour pouvoir interpréter le résultat.

Fonction cosinus limitée à une durée T_e , $x_{R2}(t) = \cos(\omega_0 t) x_R(t)$:

Encore une fois on multiplie une fonction dont on connaît la TF par cosinus : en utilisant les formules d'Euler pour le cosinus et la propriété de modulation, on a

$$\begin{aligned} |X_{R2}(\omega)| = |TF[x_{R2}(t)]| &= |TF[\cos(\omega_0 t) x_R(t)]| = \\ &= \frac{x_0}{2} (X_R(\omega - \omega_0) + X_R(\omega + \omega_0)) = \\ &= \frac{x_0}{2} \left[T_e \operatorname{sinc}\left((\omega - \omega_0) \frac{T_e}{2}\right) + T_e \operatorname{sinc}\left((\omega + \omega_0) \frac{T_e}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Le résultat est représenté en figure 7.3 : comme pour le pic de la fonction constante, chaque pic du spectre est remplacé par une raie », donné par une fonction sinus cardinal, d'autant plus large que la durée T_e est faible. Nous avons déjà vu que la largeur de cette raie est $\Delta\omega = 2\pi/T_e$ (en fréquence, $\Delta f = 1/T_e$), et son amplitude $x_0 T_e$. Pour une durée infinie, c'est à dire à la limite $T_e \rightarrow \infty$, la largeur tombe à zéro on retrouve les delta de Dirac en $\pm\omega_0$.

7.3.2 Influence de la forme de la porte

La raie spectrale d'un signal harmonique coupé a donc une forme caractéristique de la manière dont on l'a coupé : si on coupe par une porte rectangulaire, la raie sera un sinus cardinal, sans lien avec le signal de départ. On peut donc changer la forme de la raie

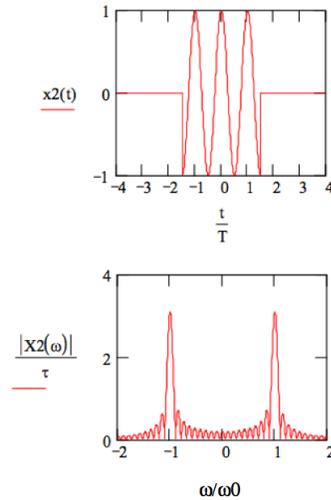


FIG. 7.3 – La fonction $x_{R2}(t) = \cos(\omega_0 t) x_R(t)$ et le module de sa TF.

en changeant la forme de la porte? Oui. En traitement du signal on parle de fenêtrage (windowing en anglais) quand on choisit d'appliquer une fonction porte au signal d'entrée pour obtenir une forme particulière du spectre. Si on remplace la porte rectangulaire par une porte gaussienne de même largeur (voir figure 7.4), par exemple, et on considère le signal

$$x_{R3}(t) = \cos(\omega_0 t) \exp(-\pi t^2 / T_e^2),$$

alors on obtient comme spectre deux raies de forme gaussienne, car

$$TF[\exp(-\pi t^2 / T_e^2)] = \tau \exp(\omega^2 T_e^2 / 4\pi).$$

Ces raies n'ont plus les rebonds du sinus cardinal, ce qui peut représenter un avantage dans certains cas, mais cela implique un travail en plus au niveau du signal d'entrée.

7.3.3 Spectre d'une fonction périodique de durée limitée T_e

Qu'est-ce qui se passe pour une fonction périodique $y(t)$ quelconque coupée sur une durée T_e ? On devine que les résultats trouvés sont valables très en général : quand on limite la durée d'une fonction périodique à une durée T_e finie, en la multipliant par une fonction rectangle, chaque raie de son spectre est remplacé par la TF de la fonction rectangle elle-même, c'est à dire par un sinus cardinal dont la largeur $\Delta\omega = 2\pi/T_e$ et l'amplitude T_e sont déterminées par la durée. Par exemple, le spectre de la fonction périodique "dents de scie" de la figure 7.5 dont la durée a été limitée à l'intervalle montré sur la figure est constitué d'une série (c'est-à-dire une somme) de sinus cardinaux, chacun correspondant à un pic du spectre de la fonction de durée infinie.

Il est important de se rendre compte aussi que cet élargissement des raies a des **conséquences importantes sur le plan expérimental** : si on veut pouvoir distinguer deux raies spectrales voisines ω_1 et ω_2 dans un spectre discret, il faut que leur largeur ne soit pas trop importante par rapport à la distance entre elles. Il faut, pour pouvoir

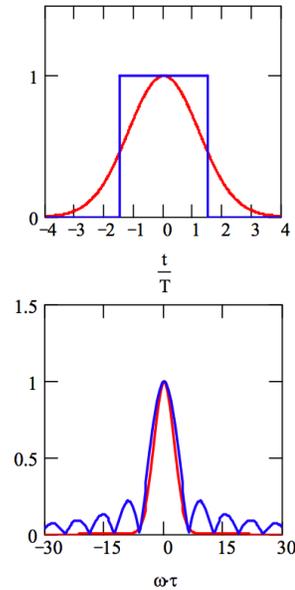


FIG. 7.4 – Influence de la forme de la porte : fonctions rectangle $x_R(t)$ (en bleu) et gaussienne $x_{R3}(t)$ (en rouge) et les modules de leur TF (divisées par la durée T_e). (A REFAIRE)

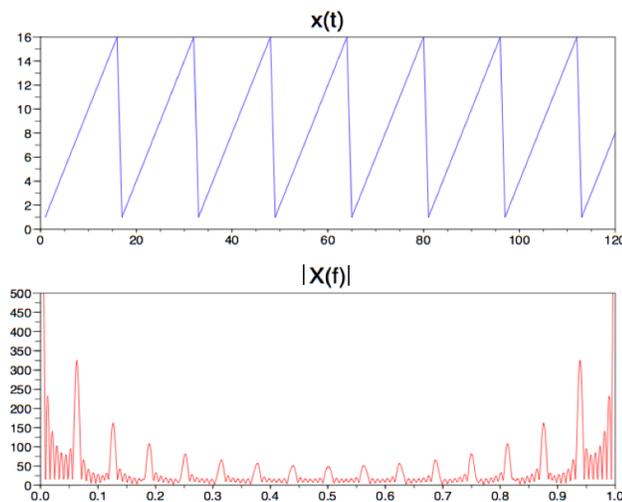


FIG. 7.5 – La TF d'une fonction $x(t)$ périodique de durée limitée.

les mesurer s'assurer que $\Delta\omega < \omega_1 - \omega_2$ (ou $\Delta f < f_1 - f_2$). Pour que cette condition soit réalisée il faudra alors mesurer le signal correspondant sur une durée assez longue :

$$T_e = \frac{1}{\Delta f} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} > \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{f_1 - f_2}.$$

Rappelons encore que la forme en sinus cardinal des bandes élargies qui remplacent les pics dépend de la fonction rectangle qu'on a utilisé pour les couper (voir 7.3.2).

• *Exercice*

Calculer la TF de la fonction $\cos(\omega_0 t) e^{-t^2/a}$; représenter la fonction et sa TF.

Chapitre 8

Echantillonnage et Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Dans le chapitre 7 nous avons vu que la limitation d'une fonction à une durée T_e finie change son spectre. Inversement, quels sera l'effet d'une *limitation inférieure* du temps d'observation ? Que se passe-t-il si on doit enregistrer le signal de manière discrète, avec un pas de temps Δt ? Cette question est très importante comme nous l'avons anticipé car la discretisation ou *échantillonnage* du signal est une des étapes fondamentales du processus de mesure, nécessaire pour pouvoir enregistrer le signal sous forme numérique.

De plus, un signal réel n'a pas toujours une forme analytique dont on peut calculer la TF. Dans ce cas, il est possible de la calculer numériquement. Pour le faire, il faut d'abord enregistrer le signal sur l'ordinateur à l'aide d'une carte d'acquisition, et donc de le numériser : nous devons choisir le pas d'échantillonnage Δt et la durée de l'acquisition T_e . Comment faire ce choix ? Pour la durée d'acquisition T_e , nous avons déjà compris que plus elle sera longue, plus les pics du spectre seront étroits. Nous allons voir maintenant comment le temps entre deux points de mesure Δt va influencer le résultat. On va ensuite introduire la *TF discrète*, qui permet pratiquement de calculer la TF pour un signal discretisé, et qu'on utilise de manière systématique en laboratoire (et en TP) pour toute analyse numérique de signaux. Conformément à ce qui est fait le plus couramment et pour plus de simplicité nous allons parler dans cette partie plutôt en termes de fréquence que de pulsation.

8.1 Echantillonnage d'une fonction

Remarquons tout de suite que le processus de mesure introduit nécessairement deux temps limites : la durée totale T_e de l'enregistrement, qui est le temps plus élevé observé, et le pas d'échantillonnage Δt , au dessous duquel il est impossible de mesurer les variations du signal. La dualité temps-fréquence nous amènera alors à introduire deux fréquences limites aussi, et comme la fréquence est inversement proportionnelle au temps, le temps Δt sera lié à la plus haute fréquence, la durée T_e à la fréquence observable la plus petite.

Considérons le signal $x(t)$ (en bleu) de la figure 8.1. Une fois échantillonné, le signal

n'est plus continu mais discret (points rouges) : on passe d'une fonction continue à une série de N valeurs, séparées d'un intervalle de temps Δt :

$$x_k = x(k \Delta t) \quad k=0\dots N-1 \quad (8.1)$$

avec Δt le pas d'échantillonnage. La durée totale du signal est donc

$$N \Delta t = T_e. \quad (8.2)$$

Comme nous venons de le voir (chapitre 7), il y a une limite inférieure à la précision avec

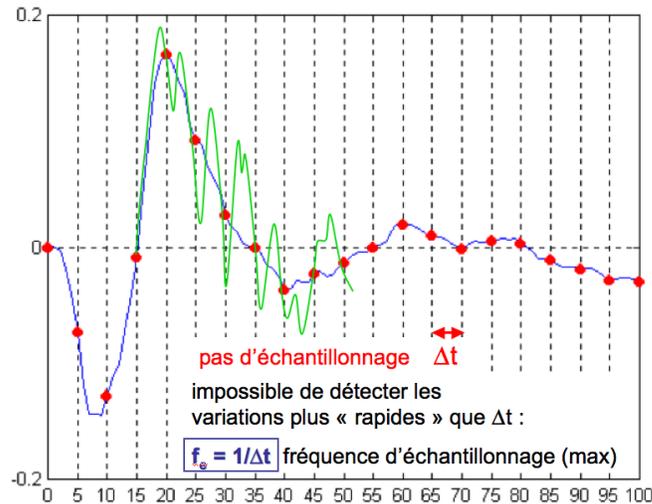


FIG. 8.1 – Echantillonnage.

laquelle on peut mesurer une fréquence, qui est donnée par la durée totale du signal : on appelle **résolution en fréquence**

$$\Delta f = \frac{1}{T_e} \quad \text{résolution en fréquence} \quad (8.3)$$

De manière symétrique, nous pouvons voir sur la figure 8.1 que le temps le plus court accessible, Δt , détermine la fréquence la plus élevée qu'on peut mesurer : si des variations qui se font sur des temps plus rapides que Δt existent (vert), nous ne pourrons pas les enregistrer avec ce pas d'échantillonnage. On ne pourra donc mesurer que des contributions oscillatoires plus lentes que Δt , c'est-à-dire des composantes fréquentielles de fréquence plus faibles que la **fréquence d'échantillonnage** f_e donnée par

$$f_e = \frac{1}{\Delta t} \quad \text{fréquence d'échantillonnage.} \quad (8.4)$$

C'est encore la dualité temps fréquence qui joue ici.

Si on veut que le signal échantillonné représente fidèlement tous les niveaux d'oscillation du signal continu, et que donc son spectre couvre bien toutes les fréquences présentes, il faut donc choisir un pas d'échantillonnage Δt suffisamment petit ; ou, de manière équivalente, une fréquence d'échantillonnage f_e suffisamment élevée. En même temps, il faut bien mettre une limite à ce choix, pour ne pas enregistrer trop de points inutilement. La question qui se pose est donc celle du choix optimal de f_e : et le problème s'avère ne pas être si simple.

8.2 Théorème de Shannon et repliement de spectre

8.2.1 TF (continue) d'une fonction échantillonnée

Essayons de déterminer le spectre du signal échantillonné. Considérons le signal échantillonné comme un signal du temps $\hat{x}(t)$ qui est défini seulement pour des temps discrets :

$$\hat{x}(t) = x(k\Delta t) = x_k. \quad (8.5)$$

Que vaut sa TF $\hat{X}(f)$? Partons de la TF $X(f)$ de $x(t)$ et gardons-en que les éléments discrets qui sont définis. On obtient, en écrivant $t = k\Delta t$,

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \longrightarrow \hat{X}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi f k \Delta t} \Delta t, \quad (8.6)$$

ce qui définit théoriquement la **transformée de Fourier d'une fonction discrète**.

Attention, la TF donnée par cette formule est une fonction continue de la fréquence. En pratique, quand on calcule la TF par ordinateur, on a aussi une fonction discrète : on donnera une définition opérationnelle de cette transformée discrète un peu plus avant.

8.2.2 Périodisation du spectre

En remplaçant maintenant $\Delta t = 1/f_e$ à l'exposant, on peut introduire une deuxième écriture pour la TF de la fonction $\hat{x}(t)$,

$$\hat{X}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi \frac{f}{f_e} k} \Delta t. \quad (8.7)$$

Pour bien comprendre le rôle de la fréquence d'échantillonnage f_e , il est intéressant maintenant de déterminer la valeur de $\hat{X}(f)$ à la fréquence $f + f_e$. On obtient

$$\begin{aligned} \hat{X}(f + f_e) &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi \frac{f+f_e}{f_e} k} \Delta t \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi \frac{f}{f_e} k} e^{-i2\pi k} \Delta t \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi \frac{f}{f_e} k} 1 \Delta t = \hat{X}(f) \end{aligned}$$

car $\exp(-i2\pi k) = 1$ pour k entier. On a donc $\hat{X}(f + f_e) = \hat{X}(f)$! Et on aurait évidemment trouvé la même chose pour $f + 2f_e, f + 3f_e, \dots, f + mf_e$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, car $\exp(-i2\pi mk) = 1$.

Qu'est-ce que cela veut dire ? Par définition, ce résultat montre que la TF de la fonction échantillonnée est **périodique de période f_e** : **le spectre de $x(t)$ est périodisé** par l'échantillonnage, comme le montre la figure 8.2.

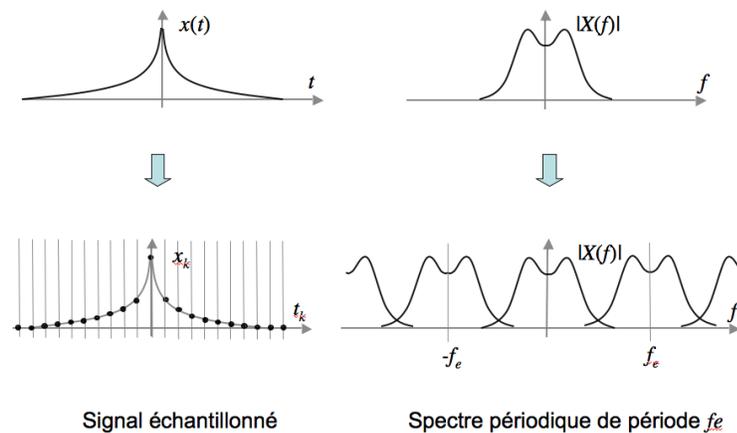


FIG. 8.2 – Périodisation du spectre après échantillonnage.

8.2.3 Théorème de Shannon

Il est donc clair pourquoi, au niveau du spectre, on a une limite supérieure aux fréquences qu'on peut observer : pour que les spectres de $x(t)$ répétés ne se recouvrent pas, il faut que leur **largeur** ne soit pas trop importante par rapport à la période de répétition f_e . Inversement, donc, il faudra choisir une fréquence d'échantillonnage f_e suffisamment grande par rapport à la largeur du spectre qu'on veut mesurer : cela donne une limite inférieure

«naturelle»

pour le choix de f_e (et donc une limite supérieure sur Δt). Ce résultat est formalisé par le théorème de Shannon, qu'on donne ici en forme incomplète :

Théorème de Shannon

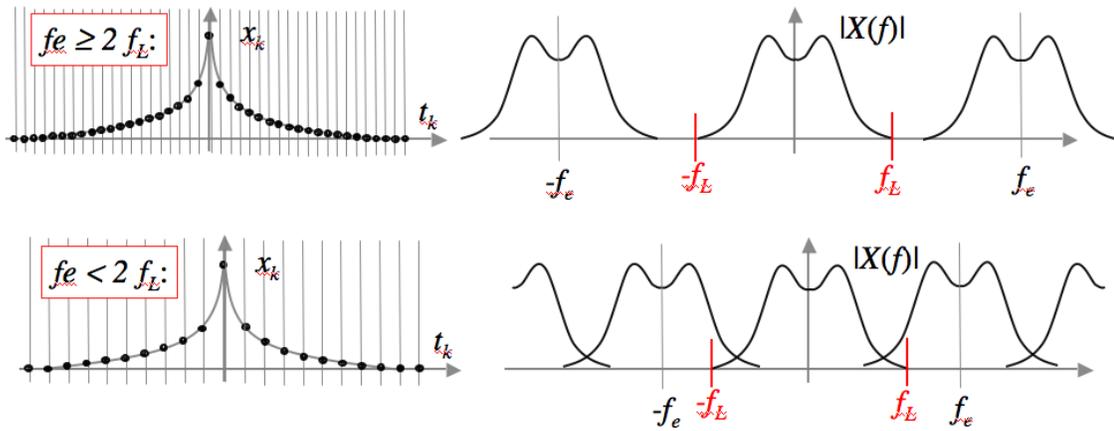
Soit $x(t)$ un signal à **bande limitée**, c'est-à-dire tel que son spectre est limité à des fréquences inférieures à une fréquence f_L :

$$X(f) = 0 \text{ pour } |f| > f_L.$$

Pour bien représenter le signal $x(t)$ et son spectre après échantillonnage, il faut alors choisir une fréquence d'échantillonnage f_e supérieure à la **largeur du spectre** $2f_L$:

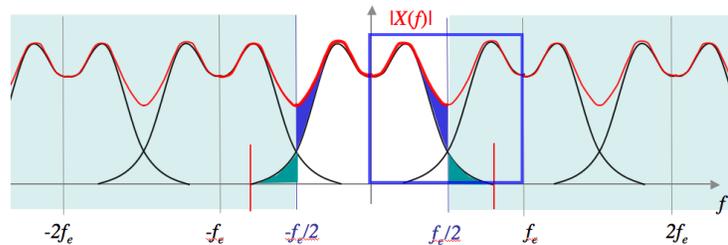
$$f_e > 2f_L. \quad (8.8)$$

Le théorème de Shannon complet donne ensuite la méthode pour reconstruire la fonction $x(t)$ exactement à partir du spectre du signal échantillonné, ce qui est possible seulement si le signal est à bande limitée et si f_e réalise la condition donnée par le théorème. La figure 8.3 schématise la situation.

FIG. 8.3 – Théorème de Shannon : choix de f_e .

8.2.4 Repliement de spectre

On comprend intuitivement que si les spectres répétés se recouvrent, une partie de l'information sur le signal est perdue, et on ne pourra pas retrouver le signal d'origine par TF inverse. Plus précisément, si $f_e < 2f_L$, les spectres répétés se somment, comme indiqué sur la figure 8.4 : quand on regarde le spectre sur une période $[-f_e/2, f_e/2]$

FIG. 8.4 – Repliement de spectre. Si $f_e < 2f_L$, les spectres du signal se somment (courbe rouge).

autour de $f = 0$ (ou bien sur une intervalle $[0, f_e]$, ce qui est le plus fréquemment obtenu numériquement), on a alors l'impression que les

» du spectre du signal non échantillonné $x(t)$ qui dépassent $f_e/2$ se replient vers l'intérieur de cette intervalle et viennent se sommer à la partie du spectre de fréquence inférieure $|f| < f_e/2$: on parle pour cette raison de **repliement de spectre** pour décrire ce phénomène. Un exemple concret de repliement de spectre est donné dans la figure 8.5, où l'on a échantillonné une même fonction avec deux pas d'échantillonnage différents.

Remarquons aussi que si le signal d'origine n'est pas à bande limité le théorème de Shannon nous dit qu'il est impossible de l'échantillonner de manière parfaite, en reproduisant toutes les échelles de variation jusqu'au plus rapides : il faudra donc renoncer à le décrire de manière parfaite et trouver un compromis. Typiquement, le spectre est quand même décroissant pour $f \rightarrow \infty$, et il est possible de choisir une fréquence d'échantillonnage telle que les

«queue

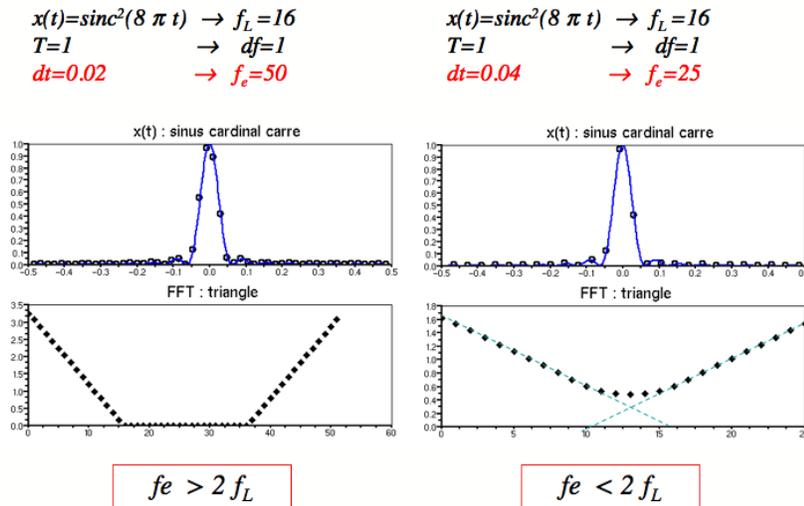


FIG. 8.5 – La fonction sinus cardinal carré a été échantillonnée, dans l'exemple de gauche, avec une fréquence d'échantillonnage de 50 Hz, et dans l'exemple de droite, avec une fréquence d'échantillonnage 2 fois plus petite. La TF de cette fonction est une fonction triangulaire de largeur 2×16 Hz : le deuxième échantillonnage n'est donc pas suffisant à bien représenter le spectre, dont les "queues" se superposent, comme on peut le voir, en modifiant la forme triangulaire du spectre.

» coupées sont d'intensité suffisamment faible pour ne pas trop modifier le spectre du signal.

Comme on le voit sur la figure 8.4, et comme nous l'avons dit en comparant $\hat{X}(f + f_e)$ et $\hat{X}(f)$, le problème lié à un choix inapproprié de f_e est que les fréquences proches de $f_e/2$ se confondent entre elles : pour un δf donné, les deux fréquences

$$f_- = \frac{f_e}{2} - \delta f$$

$$f_+ = \frac{f_e}{2} + \delta f$$

tombent au même endroit sur l'axe des fréquences à cause du repliement. Il est donc évident que, avec le pas d'échantillonnage choisi, on ne pourra pas distinguer deux signaux sinusoïdaux (ou bien deux contributions harmoniques à un même signal) qui oscillent sur ces deux fréquences !

La figure 8.6 illustre cet effet. Deux signaux de fréquences $f_- = f_e/2 - \delta f$ et $f_+ = f_e/2 + \delta f$ échantillonnés avec fréquence d'échantillonnage f_e (avec $f_e = 25$ Hz, $\delta f = 7,5$ Hz d'où $f_- = 5$ Hz et $f_+ = 20$ Hz). Les points représentent les échantillons que, comme on le voit, ne permettent pas de distinguer les deux sinusoides, car il tombent à la fois sur l'une et sur l'autre¹. Le nombre de points est visiblement insuffisant : on

¹On peut donner une démonstration par le calcul de cet effet en écrivant les deux signaux explicitement :

$$x^-(t) = \cos(2\pi f_- t)$$

$$x^+(t) = \cos(2\pi f_+ t)$$

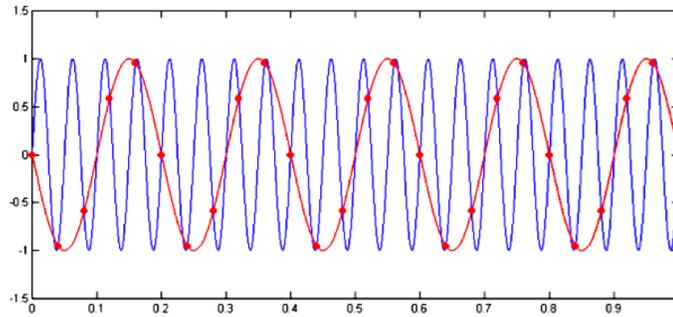


FIG. 8.6 – Illustration du repliement de spectre : les deux composantes harmoniques sont indiscernables avec le pas d'échantillonnage choisi.

voit bien que le signal à fréquence plus rapide est échantillonné à moins que 2 points par période, ce qui ne peut évidemment pas permettre de bien reproduire son oscillation. D'après le théorème de Shannon, il faut que $f_e/2$ soit supérieure à la fréquence la plus élevée, f_L : ici, c'est la fréquence $f_+ f_e/2 - \delta f$. En termes de temps, cela signifie que le pas d'échantillonnage $\Delta t = 1/f_e$ doit être au moins inférieur à moitié de la période :

$$\Delta t = \frac{1}{f_e} < \frac{1}{2f_L} = \frac{T_L}{2}. \quad (8.9)$$

Il faut donc au moins deux points par période.

8.3 TF discrète et FFT

Il nous reste à voir le plus important, c'est-à-dire comment, en pratique, on calcule numériquement la TF d'un signal échantillonné. C'est très important et ça représente la base de nos TP numérique TP 3, TP 4 et TP 5 .

Reprenons notre signal échantillonné, qui peut s'écrire

$$\hat{x} = x_k = x(k \Delta t) \quad \text{avec } k = 1 \dots N - 1 \quad (8.10)$$

puis en remplaçant f_- , f_+ et $t = k \Delta t = k/f_e$. On obtient alors les signaux échantillonnés

$$\begin{aligned} \hat{x}^-(t) &= \cos\left(2\pi\left(\frac{f_e}{2} - \delta f\right)\frac{k}{f_e}\right) = \\ &= \cos\left(k\pi - 2\pi\delta f\frac{k}{f_e}\right) = (-1)^k \cos\left(-2\pi\delta f\frac{k}{f_e}\right) \\ \hat{x}^+(t) &= \cos\left(2\pi\left(\frac{f_e}{2} + \delta f\right)\frac{k}{f_e}\right) = \\ &= \cos\left(k\pi + 2\pi\delta f\frac{k}{f_e}\right) = (-1)^k \cos\left(2\pi\delta f\frac{k}{f_e}\right) \end{aligned}$$

d'où $\hat{x}^-(t) = \hat{x}^+(t)$ car la fonction \cos est paire. Les deux signaux à deux fréquences différentes dont donc indiscernables une fois échantillonnés.

si Δt est le pas d'échantillonnage et $T_e = N \Delta t$ la durée totale. Théoriquement, nous avons déjà écrit sa TF comme

$$\hat{X}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi f t} \Delta t. \quad (8.11)$$

Ce résultat est correct. Cependant, $\hat{X}(f)$ est la TF standard du signal échantillonné, c'est-à-dire une fonction continue de f , que nous ne pouvons pas obtenir numériquement car, comme pour le signal lui-même, il faudrait une mémoire infinie pour la stocker. Concrètement on n'aura donc qu'un nombre fini de points de cette TF. De plus, nous avons vu que

1. on peut obtenir le spectre du signal seulement jusqu'à une fréquence maximale déterminé par le pas d'échantillonnage : $f_e = 1/\Delta t$;
2. la résolution en fréquence est quant à elle limitée par la durée d'échantillonnage du signal T_e : le pas en fréquence est donc $\Delta f = 1/T_e$.

Par conséquent, on aura un spectre discret avec des points séparés par des intervalles Δf entre $f = 0$ et $f = f_e$, soit

$$f_n = n\Delta f \quad \text{avec } n = 0 \dots N - 1 \text{ et} \quad (8.12)$$

$$N = \frac{f_e}{\Delta f} = \frac{T_e}{\Delta t} \text{ points :} \quad (8.13)$$

le **même nombre de points** que pour le signal. Pour les fréquences $f = f_n$ on a alors

$$-i2\pi f t \rightarrow -i2\pi f_n t = -i2\pi n\Delta f k\Delta t = -i2\pi n k \frac{\Delta t}{T_e} = -i2\pi \frac{n}{N} k$$

et la TF $\hat{X}(f)$, évaluée sur cet ensemble discret de points, devient

$$\hat{X}(f_n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi \frac{n}{N} k} \Delta t. \quad (8.14)$$

On définit alors, par commodité informatique, la fonction $\hat{X}_D(f_n) = \hat{X}(f_n)/\Delta t$:

$$\hat{X}_D(f_n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi \frac{n}{N} k} \quad \text{TF discrète (TFD)}. \quad (8.15)$$

Cette expression définit la **transformée de Fourier discrète (TFD)**, qui n'est donc rien d'autre que la TF d'un signal échantillonné avec N points, évaluée elle aussi sur N points entre 0 et f_e , et divisée par le pas d'échantillonnage Δt . C'est la fonction qu'on calculera numériquement.

Attention donc, $\hat{X}_D(f_n)$ est homogène au signal mesuré x :

$$[\hat{X}_D] = [x].$$

Pour retrouver la TF du signal il faut donc *multiplier la TFD par Δt* :

$$\hat{X}(f_n) = X_D(f_n) \Delta t, \quad (8.16)$$

et on a donc bien

$$[\hat{X}] = [x][t].$$

comme il se doit pour une TF.

8.3.1 FFT

En pratique, les logiciels comme Scilab calculent la transformée de Fourier discrète (TFD) automatiquement, en utilisant un algorithme particulièrement astucieux et rapide qui s'appelle **TF rapide ou Fast Fourier Transform (FFT)**. C'est tout-à-fait équivalent, $FFT \equiv TFD$,

et très simple à utiliser : sous Scilab, si $x=(x_1, x_2, \dots, x_N)$ est le vecteur contenant les valeurs échantillonnées d'un signal, il suffit d'écrire

$$\text{fft}(x) \text{ ou } \text{fft}(x, 1)$$

pour avoir la TFD du signal, sous la forme d'un vecteur de N valeurs, correspondants aux fréquences $f_n = n\Delta f$ de zéro à f_e . Les valeurs trouvées étant en général complexes (car la TFD, comme la TF, est en général une fonction complexe), on prendra soin d'en prendre la valeur absolue (`abs`), par exemple pour en faire un plot.

L'avantage de l'algorithme FFT est sa rapidité : le calcul de la transformée de Fourier d'un vecteur de N valeurs par une autre méthode prendrait un temps proportionnel à N^2 , alors que avec la FFT ce temps est réduit à $N \log_{10} N$. Pour les cas que nous allons voir ceci n'est pas de grande importance, mais ca peut devenir crucial pour des calculs numériques plus complexes. La rapidité de la FFT n'est cependant assurée que si N est une puissance de 2 : on fait donc attention à choisir de vecteurs de longueur appropriée si on veut en profiter.

8.3.2 Transformée inverse

On peut aussi calculer numériquement la TFD inverse ; explicitement, elle est donnée par

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{X}_D n e^{i 2\pi \frac{k}{N} n} \quad (\text{TFD}^{-1}). \quad (8.17)$$

Sous Scilab, l'opération de FFT inverse se fait par la commande `fft(x, -1)`.

8.3.3 FFT et périodisation du signal

Si on dispose d'un signal échantillonné x_k , alors la FFT de ce signal est une fonction homogène à x définie sur l'ensemble discret de fréquences $f_n = n\Delta f$, et donc caractérisée par pas de fréquence (ou *résolution*), fréquence maximale (*fréquence d'échantillonnage*), respectivement

$$\Delta f = 1/T_e, \quad f_e = 1/\Delta t.$$

En multipliant la FFT par Δt on obtient le spectre du signal échantillonné x_k entre 0 et f_e . D'autre part, nous savons que ce spectre est périodisé avec période f_e : on a donc une période entière de ce spectre. Evidemment, la partie du spectre comprise entre $f_e/2$ et f_e est identique à celle entre $-f_e/2$ et 0 (voir Figure 8.7). On peut éventuellement déplacer cette partie pour avoir un spectre centré sur zéro. Scilab propose une fonction pour le faire, nommée `fftshift`. De toutes manières, rappelons que si x_k est une

fonction réelle, son spectre est pair : dans ce cas la moitié du spectre, par exemple la partie comprise entre 0 et f_e , suffit à donner toute l'information !

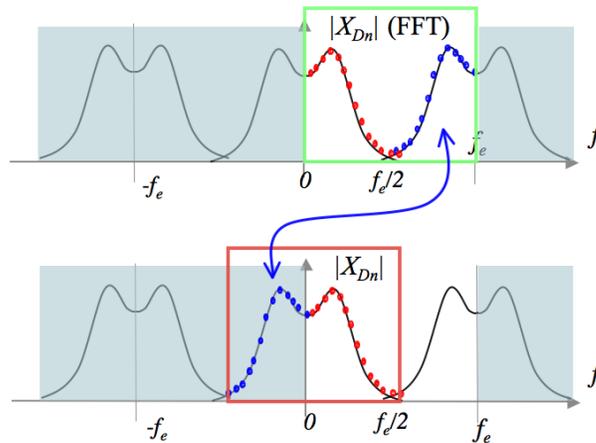


FIG. 8.7 – Périodicité de la FFT d'un signal. Dans le cadre vert, le résultat du calcul de la FFT. On peut obtenir un spectre symétrique (cadre rouge) en décalant la deuxième moitié du spectre pour décrire la partie des fréquences négatives.

Finissons cette partie avec une dernière remarque. Nous avons vu que l'échantillonnage d'un signal temporel amène à la périodisation de sa TF. De manière symétrique, la discrétisation de la TF qu'on obtient en la calculant numériquement entraîne une **périodisation du signal** : la transformée de Fourier discrète (TFD, ou FFT) d'un signal de durée finie T_e est identique à la TF d'un signal périodique de période T_e qui coïncide avec le signal de départ sur la période considérée. Nous n'en dirons pas plus ; la figure 8.8 illustre cet aspect.

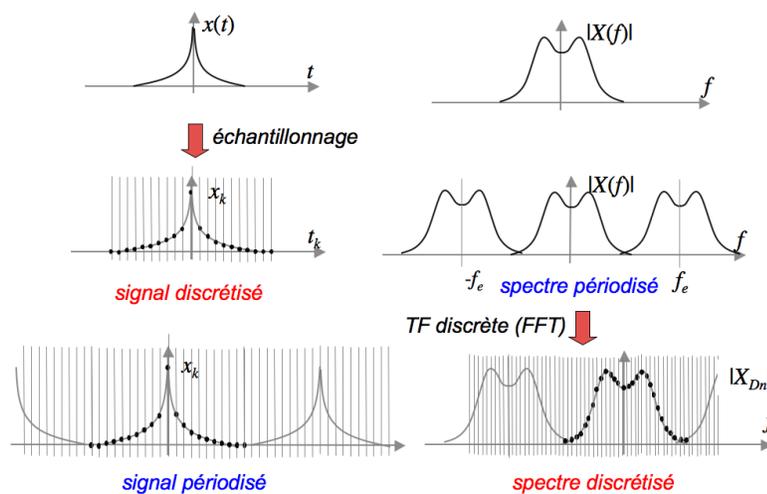


FIG. 8.8 – Périodisation du signal.

8.4 Ce qu'il faut retenir

Faisons un résumé succinct de ce que nous venons de voir à propos de la transformée de Fourier des signaux échantillonnés. Lors de l'acquisition numérique d'un signal, deux paramètres temporels sont à fixer : la durée de l'acquisition T_e et le pas d'échantillonnage Δt . Par conséquent, le nombre de points est aussi fixé à

$$N = \frac{T_e}{\Delta t} ; \quad (8.18)$$

les échantillons seront donc associés aux instants $t_k = k\Delta t$, pour $k = 0..N - 1$. Evidemment, on peut aussi bien fixer au départ le nombre de points et le pas d'échantillonnage et en déduire T_e , ou bien fixer N et T_e et déterminer Δt !

La fréquence d'échantillonnage n'est rien d'autre que la fréquence à laquelle on a mesuré le signal :

$$f_e = \frac{1}{\Delta t} . \quad (8.19)$$

Donner f_e ou donner Δt est complètement équivalent, et on choisira de partir de l'un ou de l'autre selon les cas.

Si maintenant on calcule le spectre du signal ainsi échantillonné par la FFT, on aura un même nombre N de points dans le domaine des fréquences :

$$f_n = n\Delta f, \quad n = 0..N - 1. \quad (8.20)$$

Comme la fréquence d'échantillonnage et le nombre de points sont donnés, le pas en fréquence, ou la résolution en fréquence Δf est fixée par

$$\Delta f = \frac{f_e}{N} \quad (8.21)$$

ou bien

$$\Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{1}{T_e} . \quad (8.22)$$

On voit encore comment toutes ces grandeurs sont liées entre elles. Le plus simple c'est de se rappeler que le temps le plus court est l'inverse de la fréquence la plus élevée et inversement : $f_e = 1/\Delta t$, $\Delta f = 1/T_e$.

Pour ce qui est des **amplitudes**, il faut retenir que la FFT est normalisée un peu différemment qu'une TF continue : dans le passage de l'intégrale à la somme on a laissé tomber un Δt , et il faut donc re-multiplier le résultat de la FFT par Δt pour retrouver la TF dans les bonnes unités :

$$X(f) = X_D(f) \Delta t \quad (8.23)$$

Notons une petite conséquence utile lorsqu'on veut calculer la **puissance du signal** : dans ce cas, on cherche (théorème de Parseval)

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df . \end{aligned}$$

Lorsque on passe au signal échantillonné et on remplace les intégrales par des sommes, on a donc à partir des relations précédentes :

$$E = \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2 \Delta t \quad (8.24)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} |X_D(f_n)|^2 \Delta t^2 \Delta f = \sum_{n=0}^{N-1} |X_D(f_n)|^2 \frac{\Delta t}{N} \quad (8.25)$$

Pour finir, il faut se rappeler que l'**intervalle de fréquences** donné par la FFT (Equation (8.20)) est compris entre zéro et f_e , mais le spectre est périodisé de période f_e : si on veut représenter le spectre dans l'intervalle $[-f_e/2, f_e/2]$ autour de zéro comme il est plus courant, on peut décaler de $-f_e$ la deuxième moitié, $[f_e/2, f_e]$ pour la replacer en $[-f_e/2, 0]$. De toutes manières, le spectre est toujours pair pour des signaux réels : seule la partie $[0, f_e/2]$ est réellement indépendante.

Partie III - Prévoir

Chapitre 9

Transformée de Laplace (TL)

9.1 Généralisation de la TF : la transformée de Laplace

Dans les derniers chapitres nous avons réussi à définir des transformées de Fourier pour des fonctions pour lesquelles en principe la TF n'est pas définie, avec des passages au limite et grâce à l'introduction de fonctions généralisées ou distributions, en particulier la distribution delta de Dirac. Cependant, il est très utile de pouvoir généraliser un peu l'opération de transformation de Fourier pour pouvoir définir de manière directe une transformée pour une classe plus grande de fonctions, qui ne sont pas à carré sommable. Les avantages de cette généralisation deviendront clairs dans les chapitres 10 et 11, où nous verrons comment elle permet d'abord de définir la transformée des dérivées d'une fonction de manière simple, puis, par conséquent, de définir une méthode très efficace pour résoudre une EDL pour n'importe quelle fonction d'entrée.

Considérons donc maintenant le cas de fonction qui ne sont pas à carré sommable, et essayons de trouver une généralisation de la transformée de Fourier. Si la fonction n'appartient pas à $L^2(\mathbb{R})$, le problème est que l'intégrale dans la définition de TF (6.6) diverge, et on ne peut donc pas la calculer. C'est que la fonction ne tombe pas à zéro assez rapidement pour $t \rightarrow \pm\infty$.

L'idée est alors de rendre la fonction à carré sommable en lui "coupant" la partie $t \rightarrow \pm\infty$ par une exponentielle décroissante. Plutôt que de limiter la durée du signal en la multipliant par une fonction rectangle, qui donne une coupe nette, on va donc l'envoyer à zéro plus doucement, mais de manière suffisamment rapide, en la multipliant par une exponentielle. Evidemment, il faut encore voir si ceci est suffisant pour la rendre à carré sommable : si la fonction croit trop rapidement ou bien si elle diverge à la fois pour $t \rightarrow -\infty$ et $t \rightarrow +\infty$, la méthode peut faillir.

Plus formellement, soit $x(t) \notin L^2(\mathbb{R})$ une fonction quelconque. Si il existe un $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-\alpha t}| dt < \infty \quad \text{pour tout } \alpha > \alpha_0,$$

alors $TF[x(t) e^{-\alpha t}]$ existe et, par définition, est donnée par

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt.$$

Ce résultat nous montre qu'on peut parfois obtenir la TF de la fonction "coupée" $x(t) e^{-\alpha t}$ là où celle de $x(t)$ n'existe pas. Cette opération n'est bien sûr pas la même que de faire une simple TF, mais permet tout de même de "projeter" la fonction sur la base (continue) des fonctions $e^{-i\omega t}$, et donc d'avoir une idée de sa décomposition spectrale. On choisit alors de définir une nouvelle opération de décomposition comme suit.

9.1.1 Définition de TL et TL inverse

Pour une fonction $x(t)$, on définit¹ sa **transformée de Laplace**,

$$X_L(p) = TL[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt \quad \text{TL de } x(t) \quad (9.1)$$

$$\text{où } p = \alpha + i\omega \in \mathbb{C}. \quad (9.2)$$

La TL est donc une fonction de la **variable complexe** $p = \alpha + i\omega$; elle existe si on peut trouver des α pour lesquels l'intégrale est convergente, c'est-à-dire que

la TL existe pour $\alpha \in \Sigma$, où Σ est appelé **intervalle d'existence** : d'après ce que nous avons vu Σ est l'ensemble des $\alpha > \alpha_0$. Si Σ est vide, on ne peut pas définir la TL du signal.

Comme pour la TF, l'application peut être inversée :

Pour $\alpha \in \Sigma$ la TL inverse existe et donne $x(t)$:

$$x(t) = TL^{-1}[X_L(p)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} X_L(p) e^{pt} dp \quad \text{TL inverse.} \quad (9.3)$$

Le calcul de la TL inverse s'avère donc difficile d'un point de vue mathématique : il faut intégrer dans le plan complexe, sur la variable p qui se déplace le long de la droite $\text{Re}(p) = \alpha$. De plus, il faut toujours faire attention au domaine de définition... C'est en effet très délicat ! De plus, d'après sa définition, la TL d'un signal est une fonction de la variable complexe p . Comment faut-il donc la représenter ? Comment lui associer la notion de spectre, concrètement ?

Heureusement, on dispose de quelques *outils pratiques* qui vont nous faciliter la tâche. Il s'agit de la relation entre TL et TF, du dictionnaire des TF et TL, et des propriétés de ces opérations. Nous allons maintenant les décrire.

¹Attention : une définition différente, appelée transformée de Laplace *monolatère* et définie par $\int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt$, est parfois utilisée. Comme on s'intéresse très souvent à des signaux nuls pour $t < 0$, les deux définitions peuvent être considérées comme équivalentes, mais il faut faire attention pour tous les signaux définis sur tout \mathbb{R} .

9.1.2 Relation entre TF et TL

On montre la propriété suivante :

Si $\alpha = 0 \in \Sigma$, alors la TL calculée pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire pour $p = i\omega$, coïncide avec la TF :

$$\begin{array}{ccc} X_L(p)|_{p=i\omega} & = & X(\omega) \\ \text{(TL)} & & \text{(TF)} \end{array} \quad (9.4)$$

La TL est donc plus générale que la TF mais elle coïncide avec la TF pour les fonctions ou la TF existe. Pour nous, c'est cela qui est important. Pour calculer un spectre, on aura toujours recours à la TF. D'autre part, la TL peut être calculée pour une classe beaucoup plus grande de fonctions, et en particulier pour les fonctions constantes, les fonctions harmoniques, et aussi pour un grand nombre des signaux dits **causals**, c'est-à-dire tels que

$$x(t) \neq 0 \quad \text{seulement pour } t > 0 \quad (\text{signal causal})$$

pour lesquels la TF n'est pas en principe définie ou est définie seulement par un passage au limite qui fait intervenir des distributions. Dans tous ces cas, on pourra se servir de la TL.

En pratique, on aura affaire à dans deux cas différents :

- Soit on s'intéresse au spectre d'un signal d'énergie finie : dans ce cas, la TF existe, et on pourra définir le spectre directement par la TF, ou bien passer par la TL pour en déduire la TF et donc le spectre.
- Soit on s'intéresse à la réponse d'un système physique à un signal en entrée : Dans ce cas, comme on le verra un peu plus loin, il n'est pas tant important d'analyser le spectre quant de disposer d'une méthode pour faire la décomposition en composantes harmoniques : le TL sera alors parfaitement adaptée à nos besoins et on va l'utiliser de manière préférentielle, sans se soucier de pouvoir en déduire la TF, vue sa généralité.

9.2 Calculer des TL

9.2.1 Deux exemples : TL de la fonction rectangle et de la fonction échelon

Comme premier exemple, essayons de calculer la TL d'une fonction à carré sommable, la fonction rectangle

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 \quad \text{pour } -T \leq t \leq T, \quad 0 \text{ ailleurs} \\ &= x_0 \text{Rect}(t/T); \end{aligned} \quad (9.5)$$

dont nous avons déjà calculé la TF. Selon la définition de TL, nous avons

$$\begin{aligned} TL[x_1(t)] = X_{L1}(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)e^{-pt} dt = \int_{-T}^{+T} x_0 e^{-pt} dt = \\ &= -x_0 \frac{1}{p} [e^{-pt}]_{-T}^{+T} = -x_0 \frac{e^{-pT} - e^{+pT}}{p} = \\ &= x_0 2i \frac{\sin(pT/i)}{p} = x_0 2iT \frac{\sin(pT/i)}{pT} = x_0 2T \operatorname{sinc}(pT/i). \end{aligned}$$

L'intervalle d'existence de cette TL est $\Sigma = \mathbb{R}$, car l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)e^{-pt} dt$ existe pour $p = \alpha + i\omega$ avec tout α réel. $\alpha = 0$ appartient donc à l'intervalle d'existence, et on a

$$TF[x_1(t)] = X_1(\omega) = TL[x_1(t)]|_{p=i\omega} = X_{L1}(i\omega) = x_0 2T \operatorname{sinc}(\omega T),$$

en accord avec ce que nous avons trouvé précédemment.

Calculons maintenant la TL d'une fonction pour laquelle la TF n'est pas définie au sens des fonctions, et en particulier une fonction qui va nous intéresser très souvent par la suite : la fonction **échelon** (ou **fonction de Heaviside**) :

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \quad \text{fonction échelon.} \quad (9.6)$$

On a

$$TL[\Gamma(t)] = X_L^\Gamma(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} 1 e^{-pt} dt$$

cette intégrale existe, si $p = \alpha + i\omega$, pour $\alpha > 0$: on a donc $\Sigma = \mathbb{R}^+$. Dans ces conditions, on obtient

$$TL[\Gamma(t)] = X_L^\Gamma(p) = -x_0 \frac{1}{p} [e^{-pt}]_0^{+\infty} = -\frac{0 - 1}{p} = \frac{1}{p}. \quad (9.7)$$

9.2.2 Dictionnaire et propriétés des TL

Le *dictionnaire* de l'annexe A contient aussi, pour chaque fonction $x(t)$, sa TL, notée $\mathcal{L}(x(t))$, et son intervalle de validité (notre Σ). Il y a une différence de notation à remarquer dans le dictionnaire, qui est que la variable complexe p est ici appelée s :

$$p = \alpha + i\omega \leftrightarrow s \text{ sur le dictionnaire.}$$

Nous y retrouvons notamment, pour la fonction échelon, le résultat (9.7)

$$TL[\Gamma(t)] = \frac{1}{p}. \quad (9.8)$$

La TF de la fonction échelon n'est pas définie au sens des fonctions. Mais, comme nous le dit le dictionnaire, elle est définie au sens des distributions et a une définition un peu plus complexe : elle est égale à la TL évaluée en $p = i\omega$, c'est-à-dire à $1/i\omega$, partout sauf en $\omega = 0$ (voir la définition de "VP", ou *valeur principale*, dans la partie commentaires) ; en $\omega = 0$, où la fonction $1/i\omega$ diverge, elle est remplacée par un delta de Dirac multiplié par π .

C'est un exemple de ce qu'on discutait avant : là où la transformée de Fourier ne peut pas être définie directement, la TL est généralement plus simple à calculer, à écrire, et donc plus pratique à utiliser.

L'annexe B aussi contient, lorsque qu'elle est possible, la généralisation des propriétés des TF aux TL. Les principales propriétés des TF restent valables, ce qui permet de calculer les TL de fonctions non standard comme nous l'avons vu pour la TF.

Chapitre 10

TF et TL des dérivées d'une fonction

10.1 Introduction

Nous avons maintenant à disposition tous les outils de décomposition en fonctions harmoniques : SF et TF, plus la TL qui est plus générale et permet de retrouver la TF dans une grande partie des cas, qu'elle soit définie au sens des fonctions (*asdf*) ou des distributions (*asdd*).

D'autre part, nous n'avons pas oublié que le but de cette décomposition n'était pas seulement l'analyse du signal et de son contenu fréquentiel : on cherchait aussi un outil pour pouvoir déterminer la *réponse d'un système linéaire* à une sollicitation extérieure.

La question est donc de déterminer $s(t)$ pour une entrée $e(t)$ quelconque. Reprenons à ce propos notre schéma, introduit dans le cours 5. Pour une fonction en entrée harmonique (ou exponentielle complexe), nous savons que la réponse du système est harmonique (ou exponentielle complexe) et caractérisée par la même pulsation ω :

signal en entrée harmonique :

$$e(t) = a \cos(\omega t + \Delta) \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{EDL}} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} s(t) &= aT(\omega) e(t) \\ &= a|T(\omega)| \cos(\omega t + \Delta + \theta_T(\omega)) \end{aligned}$$

ou exponentiel complexe :

$$e(t) = ae^{in\omega t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{EDL}} \quad \rightarrow \quad s(t) = aT(\omega) e^{in\omega t}$$

où la fonction de transfert $T(\omega)$ peut-être déterminée simplement à partir de l'EDL, en remplaçant les fonction $e(t)$ et $s(t)$. Par conséquent, nous avons déterminé la réponse du système è un signal périodique, après l'avoir développé en série de Fourier :

signal en entrée périodique :

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{EDL}} \quad \rightarrow \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n T(n\omega) e^{in\omega t}$$

Nous savons maintenant qu'un même développement est possible pour une fonction quelconque, par transformée de Laplace. La question est donc : pouvons nous utiliser le développement en TF/TL pour déterminer la réponse du système ? Schématiquement :

signal en entrée quelconque :

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega / 2\pi \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{EDL}} \quad \rightarrow \quad ?$$

$$= \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} X_L(p) e^{pt} dp$$

10.1.1 Exponentielles complexes, dérivées et transformées

On peut commencer à réfléchir à cette question en reprenant une idée que nous avons discuté lors de l'introduction de la notation complexe : nous avons vu, à ce moment là, pourquoi il était particulièrement pratique d'utiliser des exponentielles complexes, et c'est suite à cette observation que nous avons développé les décompositions en série et transformée de Fourier sur la base de ces fonctions. L'avantage de ce choix venait de la propriété des exponentielles sous dérivation :

$$\frac{d}{dt} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}.$$

En remplaçant une solution de ce type dans l'EDL alors on pouvait transformer toutes les dérivées en multiplications par des termes du type $(i\omega)^n$, et réduire l'EDL à une simple équation algébrique.

Exemple :

Reprenons l'EDL du circuit RC : $RC\dot{s}(t) + s(t) = e(t)$:
en prenant $e(t) = \text{Re}(\hat{E}_0 e^{i\omega t})$ et $s(t) = \text{Re}(\hat{S}_0 e^{i\omega t})$ en remplaçant les fonctions complexes, on obtient

$$i\omega RC \hat{S}_0 e^{i\omega t} + \hat{S}_0 e^{i\omega t} = \hat{E}_0 e^{i\omega t}$$

$$(i\omega RC + 1) \hat{S}_0 = \hat{E}_0$$

$$\hat{S}_0 = \hat{E}_0 / (i\omega RC + 1)$$

d'où on peut déduire la réponse $s(t)$ (et aussi déterminer la fonction de transfert $T(\omega) = \hat{S}_0 / \hat{E}_0 = 1 / (i\omega RC + 1)$).

Cette propriété des exponentielles sous dérivation est toujours valable : comment pourrait-on l'exploiter une fois écrit le développement en TF de la fonction d'entrée

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} ?$$

Que vaut la dérivée d'une telle fonction ? Comment déterminer ses composantes harmoniques ? En d'autres termes, quelles sont **la TF et la TL de la dérivée d'une fonction** ? Nous devons à présent répondre à cette question.

10.2 TF et TL des dérivées d'une fonction

10.2.1 Fonctions continues et dérivables

Soit $x(t)$ une fonction **continue et dérivable** avec dérivée $\dot{x}(t)$ continue par morceaux. Alors

$$TF[\dot{x}(t)] = i\omega TF[x(t)] \quad (10.1)$$

$$TL[\dot{x}(t)] = p TL[x(t)]. \quad (10.2)$$

On peut prouver ces relations de manière simple en intégrant par parties. On a, par exemple pour la TL :

$$\begin{aligned} TL[\dot{x}(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{dt} e^{-pt} dt \\ &= [x e^{-pt}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x (-p) e^{-pt} dt \\ &= p \int_{-\infty}^{+\infty} x (-p) e^{-pt} dt \\ &= p TL[x(t)] \end{aligned}$$

Pour les dérivées d'ordre supérieure on a donc par itération

$$TF[x^{(n)}(t)] = (i\omega)^n TF[x(t)] \quad (10.3)$$

$$TL[x^{(n)}(t)] = p^n TL[x(t)]. \quad (10.4)$$

Un résultat symétrique existe enfin pour les primitives :

$$TF\left[\int_{-\infty}^t x(t') dt'\right] = \frac{1}{i\omega} TF[x(t)] \quad (10.5)$$

$$TL\left[\int_{-\infty}^t x(t') dt'\right] = \frac{1}{p} TL[x(t)]. \quad (10.6)$$

Ces résultats sont suffisants pour la résolution d'EDL lorsque les fonctions d'entrée sont *continues et dérivables*, mais ce n'est pas toujours le cas. Au contraire, nous sommes le plus souvent amenés à trouver la réponse d'un système linéaire à une entrée qui devient non nulle seulement pour $t > 0$. En d'autres mots, nous devons nous confronter, à partir de notre schéma de départ,

$$e(t) \rightarrow \boxed{\text{EDL}} \rightarrow s(t),$$

à des problèmes où le signal en entrée $e(t)$ est discontinu. Or, d'une part, les dérivées du signal d'entrée peuvent apparaître dans l'équation différentielle, et d'autre part, nous ne pouvons pas être sûr que le signal de sortie soit continu et dérivable si l'entrée ne l'est pas, nous devons nous intéresser aux transformées des dérivées des fonctions discontinues.

10.2.2 Fonctions discontinues et nulles pour $t < 0$

Nous allons nous limiter au cas le plus fréquent, qui est le cas des fonctions $x(t)$ **discontinues en $t = 0$ et nulles pour $t < 0$** .

Soit donc $x(t)$ une fonction telle que

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \text{ pour } t < 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) &= x(0+), \text{ fini} \end{aligned} \quad (10.7)$$

Par définition, la TL de $\dot{x}(t)$ est

$$TL[\dot{x}(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \dot{x}(t) e^{-pt} dt ;$$

en intégrant par parties, nous avons

$$\begin{aligned} &= [x e^{-pt}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x(t) (-p e^{-pt}) dt = 0 - x(0+) + p \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt \\ &= -x(0+) + p TL[x(t)]. \end{aligned}$$

On obtient donc que

$$TL[\dot{x}(t)] = p TL[x(t)] - x(0+) : \quad (10.8)$$

la TL de la dérivée d'une fonction $x(t)$ nulle en $t < 0$ est donné par p fois la TF de la fonction $x(t)$, comme pour le cas des fonctions continues, plus un terme $-x(0+)$ qui prend en compte la discontinuité (le saut en $x = 0$) de la fonction.

Attention, dans le cas d'une fonction $x(t)$ qui ne converge pas à $+\infty$, le calcul que nous venons de faire fonctionne pour la TL, parce que $\exp(-pt) = \exp(-(\alpha = i\omega)t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$ (et donc $[x e^{-pt}]_0^{+\infty} = 0 - x(0+)$). Par contre, *on n'aurait pas pu obtenir un résultat si simple avec la TF*. C'est pour cela qu'on utilise la TL pour la résolution d'équations différentielles ! Cela permet de trouver une solution aussi pour des sollicitations qui ne sont pas à carré sommable.

A partir de la TL de la dérivée première, il est aussi possible d'obtenir la TL des dérivées suivantes, toujours dans le cas d'une fonction discontinue en zéro (10.7). Pour la **dérivée seconde** en appliquant deux fois le résultat (??) on obtient

$$\begin{aligned} TL[\ddot{x}(t)] &= p TL[\dot{x}(t)] - \dot{x}(0+) = p TL[p TL[x(t)] - x(0+)] - \dot{x}(0+) \\ &= p^2 TL[x(t)] - p x(0+) - \dot{x}(0+). \end{aligned}$$

Plus en général, on peut obtenir pour la **dérivée n-ieme** de la fonction la formule suivante :

$$TL[x^{(n)}(t)] = p^n TL[x(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} x^{(k)}(0+). \quad (10.9)$$

C'est une formule apparemment un peu compliquée mais très utile, qui permet d'obtenir la TL d'une EDL d'ordre quelconque très rapidement.

10.3 Utilisation des distributions pour le calcul des TL des dérivées

10.3.1 Cas des fonctions d'entrée discontinues : fonction échelon

Les expressions des TL des dérivées données par les équations (10.8) et (10.9) vont nous permettre de prendre en compte les conditions initiales dans la résolution des EDL. Cependant, lorsque la fonction en entrée $e(t)$ est discontinue en $t = 0$ et nulle pour $t < 0$, il est préférable d'en prendre en compte la discontinuité d'une manière plus directe, qui fait intervenir les TL au sens des distributions et permet une écriture plus compacte. Soit donc

$$\begin{aligned} e(t) &= 0 && \text{pour } t < 0, \\ e(t) &= f(t) && \text{pour } t \geq 0. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Pour pouvoir prendre en compte la discontinuité de manière implicite, le plus simple est d'introduire la **fonction échelon**

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

et d'écrire

$$e(t) = f(t)\Gamma(t). \quad (10.11)$$

L'utilisation de la fonction échelon permet d'obtenir la TL de $e(t)$ sans devoir explicitement utiliser la valeur de sa discontinuité : Par exemple, pour $f(t) = 1$, nous avons $e(t) = \Gamma(t)$ et donc $E_L(p) = 1/p$. Les TL d'un certain nombre d'autres fonctions du type $f(t)\Gamma(t)$ est donné par notre dictionnaire, et permet de calculer $E_L(p)$ dans la plupart des cas.

Mais pourquoi ? Pourquoi la discontinuité de la fonction $\Gamma(t)$ ne pose pas de problème alors qu'on vient de voir que les points de discontinuité doivent être pris en compte explicitement dans le calcul de la TL des dérivées ? C'est parce que on peut, encore une fois, élargir l'ensemble des fonctions pour y inclure les distributions, et redéfinir alors les dérivées de sorte à pouvoir les traiter comme des fonction continues. Nous allons voir comment tout de suite.

10.3.2 Dérivées au sens des distributions

Dans le cas où on utilise la fonction échelon pour décrire la discontinuité du signal d'entrée $e(t)$, on s'attend à trouver une fonction en sortie qui est aussi proportionnelle à $\Gamma(t)$. Comment va-t-on prendre en compte la discontinuité des deux fonctions dans le calcul des dérivées qui interviennent dans l'EDL ?

Si on accepte d'utiliser des fonctions spéciales (discontinues) comme $\Gamma(t)$, alors il faut décider comment on va en définir les dérivées. Pour ce qui est de la fonction échelon, on peut montrer par un passage à la limite que

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \delta(t) : \quad (10.12)$$

comme on peut le comprendre à la forme de la fonction elle même, la dérivée de l'échelon est une distribution delta de Dirac, nulle partout et infinie au point de discontinuité $t = 0$. Cette dérivée n'est donc pas une fonction ordinaire mais une distribution. Si on accepte cette définition élargie de la dérivée de $\Gamma(t)$, on a immédiatement :

$$TL[\dot{\Gamma}(t)] = TL[\delta(t)] = 1. \quad (10.13)$$

En d'autres termes, une fois définie la dérivée de $\Gamma(t)$ **au sens des distributions**, la TL de cette dérivée est elle aussi définie au sens des distributions : si la fonction échelon n'est pas traitée comme une fonction discontinue mais comme une fonction dont la dérivée peut être infinie à certains endroits, alors il n'y a plus besoin de traiter séparément ses points de discontinuité, ils sont automatiquement traités par l'introduction de delta de Dirac.

Cette idée peut se généraliser à n'importe quelle fonction discontinue de manière à pouvoir en définir une dérivée en tout point de discontinuité. Considérons une fonction $x(t)$ telle que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) &= x(0+) \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) &= x(0-) \end{aligned}$$

alors, on peut définir la **dérivée au sens des distributions (ASDD)** de $x(t)$:

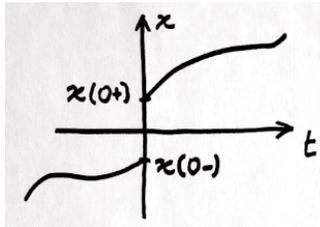


FIG. 10.1 – Fonction discontinue $x(t)$.

$$\dot{x}_{ASDD}(t) = \{\dot{x}(t)\}_{t \neq 0} + [x(0+) - x(0-)] \delta(t) \quad (\text{dérivée ASDD}) \quad (10.14)$$

où $\{\dot{x}(t)\}_{t \neq 0}$ coïncide avec la dérivée ordinaire ou **dérivée au sens des fonctions (ASDF)** de $x(t)$ là où elle est définie et vaut zéro en $t = 0$.

Dans la pratique, nous allons toujours utiliser cette dérivée au sens des distributions directement pour les signaux d'entrée, qu'on écrira souvent en utilisant la fonction échelon. Grâce à cette généralisation du concept de dérivée, comme nous l'avons vu, le calcul des TL en résulte simplifié. En effet, si les dérivées sont prises ASDD, on a toujours

$$TL[\dot{x}_{ASDD}] = pTL[x]. \quad (10.15)$$

Pour le cas qui nous intéresse des fonctions d'entrée nulles pour $t < 0$,

$$e(t) = f(t) \Gamma(t), \quad (10.16)$$

on écrira donc, très simplement, *comme pour la TL de la dérivée d'une fonction continue*

$$TL[\dot{e}(t)] = pTL[e(t)], \quad (10.17)$$

en assumant implicitement que la dérivée est prise ASDD.

Pour mieux comprendre pourquoi la dérivation ASDD facilite le calcul, il est utile de donner une démonstration pour le cas (10.16). On a

$$\dot{e}_{ASDD} = \{\dot{f}(t)\}_{t \neq 0} + f(0+) \delta(t) :$$

quand on calcule la dérivée au sens des distributions de $e(t)$, on a deux contributions, une régulière pour tout $t \neq 0$ plus le delta au point de discontinuité. Par conséquent, la TL de cette dérivée se compose de deux parties,

$$TL[\dot{e}_{ASDD}] = TL[\{\dot{f}(t)\}_{t \neq 0} + f(0+) \delta(t)] = pTL[\{\dot{f}(t)\}_{t \neq 0}] + f(0+) \cdot 1 ;$$

mais alors, en utilisant la formule (10.8) pour la TL de la dérivée régulière $\{\dot{f}(t)\}_{t \neq 0}$, on obtient

$$\begin{aligned} &= pTL[f(t)] - f(0+) + f(0+) = \\ &= pTL[f(t)]. \end{aligned} \quad (10.18)$$

c'est-à-dire le résultat cherché (10.17).

Résumons : pour la dérivée des fonctions discontinues, qu'on écrira à l'aide de fonctions échelons $\Gamma(t)$, on peut écrire la TL *comme pour les fonctions continues* ($TL[\dot{x}(t)] = pTL[x(t)]$), pourvu que leur dérivée soit définie ASDD (avec des deltas de Dirac aux points de discontinuité). Ce résultat simplifie la résolutions des EDL, car on n'aura, en pratique, jamais besoin de prendre en compte explicitement les discontinuités des fonctions d'entrée.

Chapitre 11

Resolution d'EDL par TL

11.1 Résolution d'EDL par TL

Nous savons que déterminer la réponse d'un système linéaire signifie trouver la solution d'une équation différentielle linéaire (EDL) à coefficients constants dont l'inconnue est le signal de sortie $s(t)$ et qui contient le signal d'entrée $e(t)$ (et éventuellement ses dérivées, même si cela sera rarement le cas pour nous) comme terme extérieur. Dans sa forme la plus générale, l'EDL s'écrira donc

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t) \quad (11.1)$$

où le second membre de l'équation, complètement déterminé par la connaissance de la fonction d'entrée $e(t)$, représente le terme connu $f(t)$ d'une EDL non homogène tel que nous l'avons déjà introduit dans le premier cours. Dans la plupart des exemple que nous aborderons, ce second membre se réduit simplement à la seule fonction $e(t)$ (c'est-à-dire qu'on se place dans le cas où $b_0 = 1$ et $b_n = 0$ pour $n \neq 0$). Nous avons appris dans le chapitre 10 à traiter par TL toutes les dérivées qui apparaissent dans l'EDL (11.1). Comment fait-on donc en pratique pour la résoudre? Voyons cela d'abord sur deux exemples concrets.

11.1.1 Exemple 1. Des fonctions continues et dérivables.

Considérons pour commencer de vouloir trouver la solution de l'EDL de premier degré

$$a\dot{s}(t) + bs(t) = e(t),$$

avec une certaine fonction en entrée $e(t)$ donnée, que pour cette fois nous considérons continue et dérivable. On suppose alors que $s(t)$ sera aussi continue et dérivable, et on peut appliquer la formule (10.2) et écrire la TL de l'EDL,

$$\begin{aligned} ap S_L(p) + bS_L(p) &= E_L(p) \\ (ap + b) S_L(p) &= E_L(p) \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$S_L(p) = \frac{1}{(ap + b)} E_L(p) : \quad (11.2)$$

nous avons donc une expression explicite de la TL de la fonction en sortie, solution de l'EDL, qui ne dépend que des paramètres de l'EDL et de la TL de la fonction en entrée, connue. Il suffit donc de calculer la transformée de Laplace inverse pour avoir la solution :

$$s(t) = TL^{-1}[S_L(p)].$$

Les seules opérations à faire consistent à calculer la TL de $e(t)$ et à déterminer la TL inverse de l'expression (14.9). Cette dernière tâche demande parfois un peu plus d'attention mais est faisable de manière analytique dans un grand nombre des cas qui nous intéressent. Remarquons que l'équation (14.9) rappelle de très près ce que nous avons déjà obtenu en régime harmonique avec la fonction de transfert : dans ce cas on aurait trouvé $S(\omega) = T(\omega)E(\omega)$. Nous verrons dans un moment que en effet la relation (14.9) est la généralisation de la résolution en régime harmonique au cas d'une fonction d'entrée quelconque.

11.1.2 Exemple 2. Entrée discontinue et conditions initiales

Soit encore

$$a\dot{s}(t) + bs(t) = e(t)$$

l'EDL à résoudre, mais supposons cette fois que la fonction en entrée $e(t)$ soit discontinue en $t = 0$ et nulle pour $t < 0$. Dans ce cas, nous nous intéressons seulement au comportement du système pour $t > 0$. Dans ce cas, comme nous le savons par la résolution classique des EDL, la solution du problème ne dépendra pas seulement de l'excitation $e(t)$ mais aussi des **conditions initiales** pour $s(t)$: pour une équation du premier ordre on aura une seule condition initiale, soit

$$s(0) = x_0.$$

Remarquons que, si nous ne nous sommes pas posé cette question dans l'exemple précédent, c'est parce que le signal en entrée continu et dérivable $e(t)$ était présent en principe depuis $t = -\infty$: ce n'est que lorsque l'excitation est "allumée" à un instant donné que la question de l'état du système à cet instant initial se pose.

Quand on prend la TL de l'EDL, il faut donc explicitement prendre en compte les conditions initiales sur le signal de sortie dans les TL de ses dérivées :

$$\begin{aligned} a\{p S_L(p) - x_0\} + bS_L(p) &= E_L(p) \\ (ap + b) S_L(p) &= 1E_L(p) + ax_0 \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$S_L(p) = \frac{1}{(ap + b)} E_L(p) + \frac{ax_0}{(ap + b)}. \quad (11.3)$$

Remarquons que nous n'avons pas eu besoin de prendre en compte la discontinuité de l'entrée $e(t)$, en premier lieu parce que cette EDL ne contient pas ses dérivées. Mais même

si ces dérivées étaient présentes, on aurait pu éviter de prendre en compte explicitement la discontinuité de $e(t)$ en l'écrivant sous la forme (10.16) comme expliqué en 10.3.2. Nous avons donc encore une fois une expression explicite de la TL de la solution de l'EDL, qui cette fois dépend, en plus que des paramètres de l'EDL, des conditions initiales (imposées sur la solution elle-même). Encore une fois, il faudra calculer la transformée de Laplace inverse $TL^{-1}[S_L(p)]$ pour avoir la solution $s(t)$.

11.1.3 Résolution d'EDL par TL, formule générale.

Le cas d'EDL de degré supérieur peuvent être résolus en procédant comme nous l'avons fait dans les exemples précédents, et en tenant compte du fait que, pour une EDL d'ordre n , il faut donner n conditions initiales (en général la valeur de la fonction et de ses dérivées jusqu'à la $n - 1$ -ème) pour que la solution soit déterminée de manière univoque.

La généralisation des résultats précédents à une EDL quelconque peut être formulée de la manière suivante. Soit l'EDL à coefficients constants

$$a_n s^{(n)}(t) + a_{n-1} s^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 s'(t) + a_0 s(t) = b_m e^{(m)}(t) + \dots + b_1 e'(t) + b_0 e(t) \quad (11.4)$$

où $e(t)$ est une fonction connue. Alors, la TL $S_L(p)$ de la solution $s(t)$ de l'EDL est donné par

$$S_L(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} E_L(p) + \frac{\sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^i p^{i-j} s^{(j-1)}(0)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (11.5)$$

que nous pouvons récrire, de manière schématique, comme

$$S_L(p) = H(p) E_L(p) + \{C.I.\} \quad (11.6)$$

où $\{C.I.\}$ indique le terme qui dépend des conditions initiales et

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} \quad \text{transmittance} \quad (11.7)$$

est nommé **transmittance** du système linéaire régi par l'EDL.

11.2 La résolution d'EDL en pratique

11.2.1 Réponse libre (transitoire pur) et réponse forcée (régime permanent)

Essayons d'abord d'interpréter le sens physique du résultat de la formule (11.5) (ou (11.6)) à partir de quelques observations.

- D'une part, si $e(t) = 0$ (cas d'une EDL homogène), on a $E_L(p) = 0$ et seul le terme lié aux conditions initiales $\{C.I.\}$ reste : c'est le cas où il n'y a pas de sollicitation extérieure, et on a alors la **réponse libre** du système à des conditions initiales données et sans forçage ;

- La **réponse libre** est aussi appelée **transitoire pur** : en effet, pour tout système réel, il y a dissipation d'énergie et par conséquent la réponse libre finit par s'annuler. Le terme $\{C.I.\}$ donne (après TL⁻¹) une solution $s(t)$ qui tend à zéro pour $t \rightarrow \infty$;
- La considération précédente reste valable même si $e(t) \neq 0$, le terme $\{C.I.\}$ correspond toujours au transitoire pur ;
- La partie donnée par $H(p) E_L(p)$ donne donc la partie de la solution due à la sollicitation extérieure $e(t)$, qu'on appelle **réponse forcée** ou **régime permanent** du système, qui reste une fois que la partie de la solution associée aux conditions initiales s'est annulée ;
- La réponse forcée est aussi la seule présente dans le cas de conditions initiales toutes nulles (système initialement à repos) ;
- Bien que la réponse forcée associée (par TL⁻¹) à $H(p) E_L(p)$ soit la seule qui dépend de la sollicitation extérieure $e(t)$, on remarque que cette sollicitation intervient seulement à travers $E_L(p)$, et que la fonction $H(p)$ *ne dépend que des coefficients de l'EDL*.

11.2.2 La transmittance $H(p)$

La dernière remarque devrait nous rappeler quelque chose ! En effet, considérons la réponse forcée $S_L(p) = H(p) E_L(p)$ et prenons maintenant $p = i\omega$: on obtient alors

$$S_L(i\omega) = H(i\omega) E_L(i\omega)$$

et donc, si les TF de $s(t)$ et $e(t)$ existent, $S(\omega) = H(\omega) E(\omega)$: à ω donnée, la fonction $H(\omega)$ donne le rapport entre les amplitudes $S(\omega)$ et $E(\omega)$ correspondantes à la pulsation ω . Mais c'est exactement ce que nous avons déjà écrit pour la réponse d'un système linéaire en régime harmonique, où on avait

$$S(\omega) = T(\omega) E(\omega).$$

Dans le cas de la réponse harmonique, on considérait une entrée sinusoïdale de pulsation ω , avec $E(\omega)$ l'amplitude (complexe) associée. La fonction de transfert $T(\omega)$ permettait alors de calculer l'amplitude (complexe) $S(\omega)$ de l'oscillation (de pulsation ω) obtenue en sortie. Dans le cas présent, si on prend en entrée une fonction sinusoïdale, on doit avoir la même chose :

$$H(i\omega) = T(\omega). \quad (11.8)$$

$H(p)$ n'est donc rien d'autre que la **transmittance** ou **fonction de transfert** du système linéaire, c'est à dire le coefficient (complexe) qui donne l'amplification et le déphasage d'une composante spectrale du signal en entrée. Mais maintenant, grâce aux TF et TL, nous sommes en mesure de prendre en compte **toutes les contributions spectrales à la fois**, et de déterminer en un seul passage le spectre du signal en sortie pour un signal en entrée quelconque.

11.2.3 Mode opératoire

Avons nous bien la réponse à la question de départ ? Oui : à partir de l'EDL, nous sommes maintenant capables d'écrire d'abord la transmittance $H(p)$ sous la forme d'un rapport de polynômes :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} \quad \text{transmittance ;} \quad (11.9)$$

à partir de la, on peut calculer la TL du signal en sortie du système pour n'importe quelle sollicitation en entrée, de manière à prendre en compte en même temps les conditions initiales s'il y en a.

La figure 11.1 illustre schématiquement la manière de procéder.

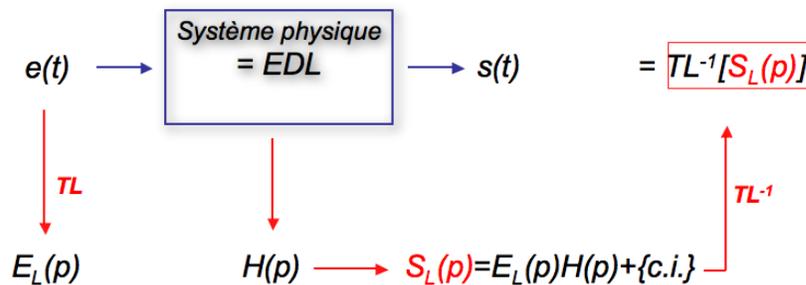


FIG. 11.1 – Résolution d'EDL par TL.

Pour la réponse forcée, une fois déterminé la transmittance $H(p)$ à partir de l'EDL, on calcule la TL $E_L(p)$ de l'entrée $e(t)$. On multiplie donc ces deux grandeurs et on en cherche la TL inverse, qui donne la sortie $s(t)$. Dans certains cas, on ne donne pas de conditions initiales, ce qui veut dire qu'on s'intéresse seulement à la réponse forcée du système, celle qu'on obtiendrait une fois les distorsions transitoires éventuelles seront dissipées (ou pour conditions initiales nulles). Il n'y a donc pas besoin de prendre en compte le terme $\{C.I.\}$. En d'autres cas, l'effet lié aux conditions initiales est intéressant et il faut donc calculer aussi la TL inverse de ce terme.

Décomposition en éléments simples

Le calcul des TL inverses est souvent assez facile à l'aide du dictionnaire, mais peut nécessiter une manipulation des rapports de fonctions en entrée pour les récrire en somme de fonctions plus simples. Plus particulièrement, on a souvent besoin d'opérer une **décomposition en éléments simples**, c'est-à-dire de réduire une fraction rationnelle en somme de fractions ayant pour dénominateurs des puissances de polynômes du premier degré et pour numérateurs un polynôme de degré inférieur au polynôme irréductible du dénominateur.

En d'autres termes, si $P(\omega)$ et $Q(\omega)$ sont deux polynômes, on veut décomposer la fraction rationnelle P/Q . On commence par chercher les pôles de la fraction, c'est à dire

les valeurs de ω qui annulent le dénominateur $Q(\omega)$. Un pôle est dit d'ordre p s'il est une racine d'ordre p de Q . Un théorème assure alors que, si z est un pôle de la fraction P/Q d'ordre p , P/Q peut toujours s'écrire comme

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha_1}{\omega - z} + \frac{\alpha_2}{(\omega - z)^2} + \dots + \frac{\alpha_p}{(\omega - z)^p} + \frac{P_1}{Q_1} \quad (11.10)$$

avec P_1/Q_1 une autre fraction pour laquelle on pourra procéder de la même manière. En déterminant tous les racines de Q on peut donc récrire la fraction P/Q sous la forme d'une somme de fractions simples (généralement on a des pôles d'ordre deux au plus). A ce points, pour déterminer les coefficients α_i , une méthode qui est toujours réalisable consiste à réduire au même dénominateur le membre de droite de la décomposition et à identifier les coefficients des numérateurs ordre par ordre : on verra un exemple un peu plus loin.

11.3 Caractérisation d'un système

Nous sommes maintenant capables de déterminer la réponse d'un système linéaire à une sollicitation quelconque. Parmi les sollicitations possibles, il y en a trois qui sont particulièrement intéressantes à considérer, car elles permettent de *tester* le système de manière à avoir accès facilement à ses grandeurs caractéristiques. On parle ainsi de **caractérisation d'un système**. Les trois méthodes qu'on utilise couramment pour déterminer le comportement du système sont d'étudier

- sa *réponse fréquentielle* : la réponse à $e(t) = \exp(i\omega t)$;
- sa *réponse impulsionnelle* : la réponse à $e(t) = \delta(t)$;
- sa *réponse indicielle* : la réponse à $e(t) = \Gamma(t)$.

Ce ne sont pas les seules méthodes possibles, car évidemment l'étude de la réponse d'un système à n'importe quelle fonction d'entrée donnera toujours des informations sur le système. Mais ces trois cas sont simples à interpréter, parfois simples à mettre ne place expérimentalement, et souvent utilisés en pratique.

Pour mieux comprendre leur fonctionnement prenons un exemple concret :

Exemple : le circuit RC. Nous connaissons l'EDL associée à ce système,

$$RC \dot{s}(t) + s(t) = e(t).$$

Par TL, on obtient

$$p RC S_L(p) + S_L(p) = E_L(p).$$

Si nous sommes intéressés au caractéristiques *propres* au système, nous choisirons de nous affranchir de l'influence des conditions initiales et de considérer le *régime forcé*; on pourra donc écrire comme nous l'avons vu

$$S_L(p) = H(p) E_L(p)$$

avec

$$H(p) = \frac{1}{pRC + 1} = \frac{1/RC}{p + 1/RC} = \frac{-p_1}{p - p_1}.$$

où nous avons mis en évidence le pôle $p_1 = -1/RC$.

Cherchons donc la réponse de ce système aux trois signaux d'entrée particuliers.

11.3.1 Réponse fréquentielle

Nous avons déjà rencontré ce cas important dans la première partie de ce cours : c'est le cas où le signal en entrée est harmonique. Nous avons vu comment déterminer en particulier la fréquence propre du système $\omega_0 = 1/RC$ à partir de la courbe de résonance : retrouvons le même résultat en utilisant maintenant la méthode de résolution d'EDL par TL. Soit donc $e(t) = \exp(i\omega t)$. On a (sur le dictionnaire)

$$E_L(p) = 2\pi \delta\left(\frac{p}{i} - \omega\right)$$

d'où

$$S_L(p) = H(p) E_L(p) = \frac{-p_1}{p - p_1} 2\pi \delta\left(\frac{p}{i} - \omega\right).$$

La fonction précédente est nulle partout sauf en $p/i = \omega$, c'est-à-dire en $p = i\omega$: on peut donc remplacer $p = i\omega$ dans l'expression de $H(p)$ sans modifier le résultat, et on a alors

$$S_L(p) = \frac{-p_1}{i\omega - p_1} 2\pi \delta\left(\frac{p}{i} - \omega\right)$$

(attention à ne pas faire confusion : ici la variable est p , et non pas ω , qui est fixé par le choix de la fonction harmonique en entrée). Par TL^{-1} on obtient

$$\begin{aligned} s(t) &= TL^{-1}[S_L(p)] = TL^{-1}\left[\frac{-p_1}{i\omega - p_1} 2\pi \delta\left(\frac{p}{i} - \omega\right)\right] \\ &= \frac{-p_1}{i\omega - p_1} 2\pi TL^{-1}\left[\delta\left(\frac{p}{i} - \omega\right)\right] \\ &= \frac{-p_1}{i\omega - p_1} 2\pi \exp(i\omega t) \\ &= H(i\omega) \exp(i\omega t) = T(\omega) \exp(i\omega t). \end{aligned} \quad (11.11)$$

On retrouve donc bien le résultat connu : la réponse du système à une sollicitation harmonique est une oscillation harmonique de même fréquence dont l'amplitude complexe est donnée par la fonction de transfert ou transmittance du système $T(\omega)$ évaluée à cette fréquence. Ici,

$$T(\omega) = \frac{-p_1}{i\omega - p_1} = \frac{1}{1 + i\omega/\omega_0}$$

dépend de la pulsation propre

$$\omega_0 = -p_1 = 1/RC :$$

La mesure de l'amplitude de la réponse $s(t)$ et de son déphasage par rapport à l'entrée $e(t)$ permettent donc de remonter au paramètre caractéristique du système, RC .

11.3.2 Réponse impulsionnelle

Considérons maintenant la réponse du système à une impulsion, modélisée par un delta de Dirac : $e(t) = \delta(t)$. On a donc très simplement

$$E_L(p) = TL[\delta(t)] = 1$$

et donc

$$S_L(p) = H(p) E_L(p) \quad (11.12)$$

d'où

$$s(t) = TL^{-1}[H(p)] = h(t) \quad \text{réponse impulsionnelle :} \quad (11.13)$$

la réponse impulsionnelle est donnée par la TL inverse de la fonction de transfert $H(p)$, notée généralement $h(t)$. Comme pour la réponse fréquentielle, il est aisé d'obtenir la valeur des paramètres typiques du système en étudiant cette réponse. Dans le cas du circuit RC, on a par exemple (en utilisant le dictionnaire) :

$$h(t) = TL^{-1}\left[\frac{-p_1}{p - p_1}\right] = -p_1 e^{p_1 t} \Gamma(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \Gamma(t)$$

La décroissance exponentielle en t/RC de cette fonction permet de déterminer facile-

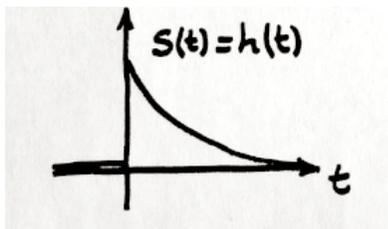


FIG. 11.2 – Réponse impulsionnelle $h(t)$ du circuit RC.

ment le paramètre caractéristique RC .

11.3.3 Réponse indicielle

Le troisième cas qu'on considère typiquement est la réponse indicielle, ou réponse à une sollicitation en entrée en échelon, $e(t) = \Gamma(t)$. La TL de l'entrée est :

$$E_L(p) = TL[\Gamma(t)] = \frac{1}{p},$$

d'où

$$S_L(p) = H(p) \frac{1}{p} \quad (11.14)$$

et dans notre exemple

$$S_L(p) = \frac{-p_1}{p - p_1} \frac{1}{p}.$$

On doit donc déterminer la TL^{-1} de cette fonction, mais elle n'est pas dans le dictionnaire : nous rencontrons donc le problème typique de ce genre de calcul, qui consiste à devoir récrire une fonction de manière plus simple, comme somme de fonctions dont on sais facilement déterminer la TL inverse. Comme nous l'avons anticipé plus haut, la méthode de choix est de faire une **décomposition en éléments simples**.

Nous avons décrit les principes de cette méthode en 11.2.3; utilisons-la sur cet exemple. Il faut réussir à récrire la fraction comme une somme de fractions simples, chacune associée à une racine du dénominateur. Ici les deux racines (d'ordre 1) sont $p = p_1$ et $p = 0$, donc le résultat (11.10) assure qu'on peut toujours trouver les paramètres α et β tels que

$$\frac{-p_1}{p - p_1} \frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p - p_1} + \frac{\beta}{p}.$$

Pour déterminer α et β on factorise,

$$\frac{-p_1}{p - p_1} \frac{1}{p} = \frac{\alpha p + \beta(p - p_1)}{(p - p_1)p}$$

puis on identifie les numérateurs (car les dénominateurs sont identiques!)

$$-p_1 = \alpha p + \beta(p - p_1).$$

On a ici l'identité entre deux polynômes en p : pour qu'ils soient équivalents les coefficients de chaque puissance de p doivent être identiques, et on doit donc résoudre le système d'équations

$$\begin{aligned} -p_1 &= -\beta p_1 && \text{ordre 0} \\ 0 &= (\alpha + \beta)p && \text{ordre 1} \end{aligned}$$

qui donne tout de suite $\beta = 1$, $\alpha = -\beta = -1$. En utilisant le dictionnaire, on peut déterminer le signal en sortie comme

$$s(t) = TL^{-1}\left[\frac{-1}{p - p_1} + \frac{1}{p}\right] = (-e^{-t/RC} + 1) \Gamma(t),$$

car les fonctions qui apparaissent sont maintenant plus simples. Encore une fois, on a

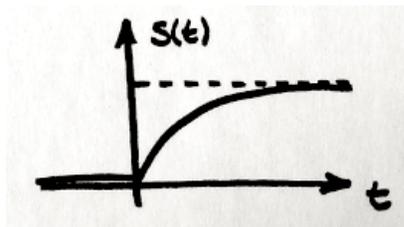


FIG. 11.3 – Réponse indicielle $h(t)$ du circuit RC.

une décroissance exponentielle en t/RC à partir de laquelle sera facile d'évaluer RC .

•Exercice

Que vaut $s(t)$ pour $e(t) = \exp(i\omega t) \Gamma(t)$? Utiliser le dictionnaire !

△ Une animation du site web "Figures animées pour la physique" permet d'observer le comportement d'un sismographe, qui est en fait un oscillateur mécanique sensible aux vibrations du support sur lequel il est posé. Il est possible d'observer sa réponse à une sollicitation sinusoïdale (réponse fréquentielle) et à une courte impulsion (approchant la réponse impulsionnelle), mais aussi à une rampe, ce qui correspond pratiquement à un saut brusque d'un déplacement donné à zéro. C'est un joli exemple qui illustre comment les réponses d'un même système à des excitations différentes contiennent toutes des informations sur les paramètres physiques du système.

<http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/sismo.html>

Voir aussi la page sur les équations différentielles pour une description plus mathématique des EDL de premier et second ordre et des tracés des signaux en réponse à plusieurs signaux d'entrée et pour différentes conditions initiales. En manipulant la figure on peut changer la valeur des différents paramètres et observer les variations qui en résultent.

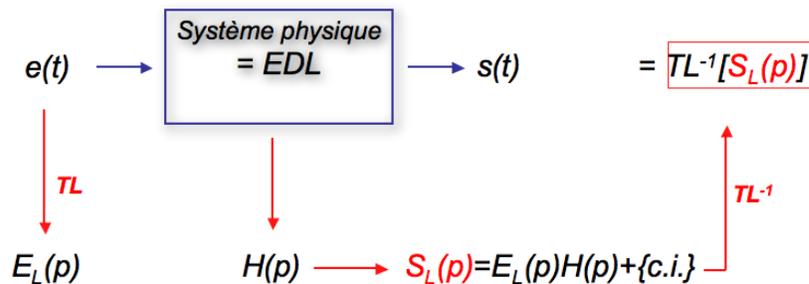
<http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/equadiff/equadiff.html>

Chapitre 12

Un point de vue alternatif : la convolution

12.1 Décomposer l'entrée dans le domaine du temps

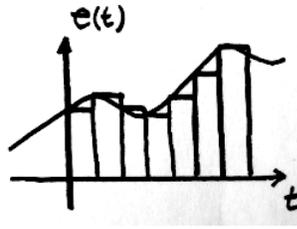
Revenons encore une fois à la figure 11.1 :



nous avons ici un outil puissant, permettant de résoudre une EDL pour n'importe quelle fonction en entrée (et éventuellement avec conditions initiales). En observant ce diagramme, on remarque que, à partir d'un problème défini dans le *domaine temporel*, on est passé au domaine de la variable complexe p (associé comme nous le savons au *domaine fréquentiel*) où le problème est plus simple à résoudre, pour revenir finalement au domaine temporel pour déterminer la réponse cherchée.

On peut donc se poser la question : il n'y a pas un moyen de trouver la solution directement dans le domaine temporel ? En d'autres mots, maintenant que nous connaissons la solution, il ne serait pas possible de l'écrire d'une manière différente, qui ne fait pas appel à la TL et qui ne fait pas apparaître la variable complexe p ? La réponse est oui, et pour le faire, on a besoin de la réponse impulsionnelle $h(t)$. D'un point de vue mathématique les calculs sont un peu compliqués, mais nous allons encore une fois prendre un point de vue plus physique et essayer de comprendre l'idée très simplement plutôt que de donner une démonstration rigoureuse du résultat.

Considérons donc un signal en entrée $e(t)$ quelconque, et supposons maintenant de le découper en fines tranches :

FIG. 12.1 – Réponse indicielle $h(t)$ du circuit RC.

on peut voir la fonction comme une succession de segments, chacun au sommet d'un rectangle étroit de largeur Δt ,

$$e(t) \simeq \sum_n e_n(t) \quad \text{où } e_n(t) = \begin{cases} e(t_n) & \text{pour } t \in [t_n, t_n + \Delta t] \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (12.1)$$

où $t_n = n \Delta t$ est la position du n -ième rectangle. Nous savons que si on prend des intervalles Δt de plus en plus étroits, on approche de mieux en mieux la fonction $e(t)$. Pour ce faire, on peut écrire plus précisément

$$e_n(t) = e(t_n) \cdot \Delta t \cdot \begin{cases} 1/\Delta t & \text{pour } t \in [t_n, t_n + \Delta t] \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (12.2)$$

de manière à avoir $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} e_n(t) = e(t_n) \delta(t - t_n)$. La somme de l'équation 12.1 devient donc, à la limite $\Delta t \rightarrow 0$, une somme infinie d'impulsions de Dirac : on arrive donc à l'identité

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t') \delta(t - t') dt'. \quad (12.3)$$

Nous avons retrouvé ici une des propriétés de la distribution delta de Dirac que nous avons énoncé lors de son introduction : l'intégrale en dt' d'une fonction fois $\delta(t - t')$ (ou $\delta(t' - t)$, par symétrie) donne la valeur de la fonction en t . Cette propriété a donc un sens profond : elle exprime la possibilité de décomposer une fonction en une succession infinie de pic infiniment étroits, chacun multiplié par sa valeur au point correspondant. On peut remarquer tout de suite qu'on est entrain ici de faire une décomposition de la fonction $e(t)$ dans le domaine *temporel*, justement ce qu'on voulait faire...

12.2 Déterminer le signal de sortie

Maintenant, comment peut-on déterminer la sortie $s(t)$? Grâce à la linéarité du système (et de l'EDL), la réponse à une somme de fonctions est la somme des réponses à chaque fonction. On peut donc approcher $s(t)$ avec la somme des réponses à chaque rectangle et donc, après passage à la limite, comme intégrale des réponses à chaque delta de Dirac. Et la réponse à une delta de Dirac est la *réponse impulsionnelle*, $h(t)$, qu'on peut déterminer à partir de l'EDL comme TL^{-1} de la fonction de transfert $H(p)$ où mesurer expérimentalement comme réponse à une impulsion. On a donc

$$\begin{aligned}
 \text{entrée} &\rightarrow \text{sortie} \\
 \delta(t) &\rightarrow h(t) \\
 \delta(t-t') &\rightarrow h(t-t') \\
 a \delta(t-t') &\rightarrow a h(t-t')
 \end{aligned}$$

il suffit donc de prendre à la place de la constante a la valeur de la fonction en t' , $e(t')$, et d'intégrer le résultat, pour avoir

$$e(t') \delta(t-t') \rightarrow e(t') h(t-t')$$

et finalement

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t') \delta(t-t') dt' \rightarrow s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t') h(t-t') dt' \quad (12.4)$$

C'est notre résultat : la réponse d'un système linéaire à un signal d'entrée $e(t)$ peut être déterminée comme une intégrale sur les réponses impulsionnelles $h(t-t')$ multipliées par les valeurs $e(t')$ de la fonction à chaque instant t' . L'opération que nous faisons ici s'appelle **produit de convolution**. Nous allons maintenant l'introduire formellement.

12.3 La réponse du système comme produit de convolution

On note $f * g$ le produit de convolution entre deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ défini comme suit :

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') g(t-t') dt'. \quad (12.5)$$

$f * g$ est donc *une fonction* de t . Le résultat (12.4) s'écrit donc aussi

$$s(t) = e * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t') h(t-t') dt' \quad (12.6)$$

où $e(t)$ est le signal d'entrée et $h(t) = TL^{-1}[H(p)]$ la réponse impulsionnelle du système.

Nous avons trouvé une méthode alternative pour la détermination de la réponse d'un système, qui fait appel à la réponse impulsionnelle plutôt qu'à la fonction de transfert et qui s'écrit directement dans le domaine du temps. Dans ce cas, il est nécessaire de calculer le produit de convolution entre deux fonctions, ce qui est souvent un peu plus compliqué que de passer par les TL, sauf dans certains cas simples (et particulièrement lorsque une des deux fonctions est un Dirac!), mais ça reste une possibilité.

On peut se poser la question de la relation entre cette méthode et la résolution par TL, pour laquelle nous avons écrit $S_L(p) = E_L(p) H(p)$ et

$$s(t) = TL^{-1}[E_L(p) H(p)].$$

Est-ce que les deux solutions sont bien identiques? La réponse est oui, car on peut montrer la propriété suivante pour le produit de convolution.

Soient f et g deux fonctions, $F(\omega)$ et $G(\omega)$ leurs TF et $F_L(p)$ et $G_L(p)$ leurs TL. Alors,

$$TF[f * g] = F(\omega) G(\omega) \quad (12.7)$$

$$TL[f * g] = F_L(p) G_L(p) : \quad (12.8)$$

les transformées de Fourier et Laplace du produit de convolution entre deux fonctions sont les produits ordinaires des transformées des deux fonctions.

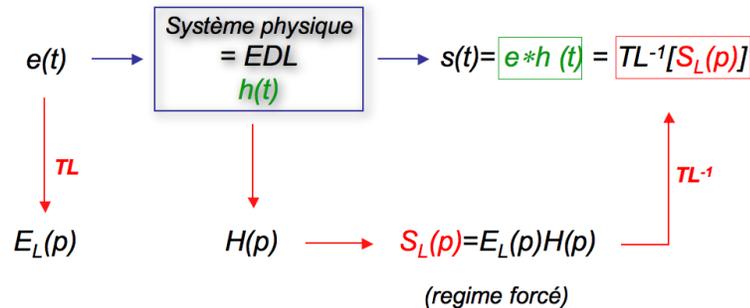


FIG. 12.2 – Résolution d'EDL : par TL ou par convolution.

Il est donc équivalent de calculer $TL^{-1}[E_L(p) H(p)]$ ou $e * h(t)$, et les deux fonctions $H(p)$ et $h(t)$ donnent deux manières équivalentes de caractériser le système, l'une dans le domaine des fréquences, l'autre dans le domaine temporel. Nous pouvons donc compléter notre schéma, comme illustré par la figure 12.2.

12.4 Exemples de convolution

Il est utile, pour mieux comprendre le sens mathématique de l'opération de convolution, de tracer quelques schémas sur un exemple concret. Nous avons écrit

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t - t') dt'$$

comme on intègre sur t' , $f * g(t) = \mathcal{F}(t)$ est une fonction de t . Quelle opération nous permet concrètement de construire $\mathcal{F}(t)$ pour un t donné? On prend d'une part $f(t')$:

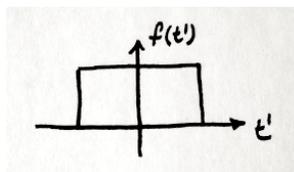
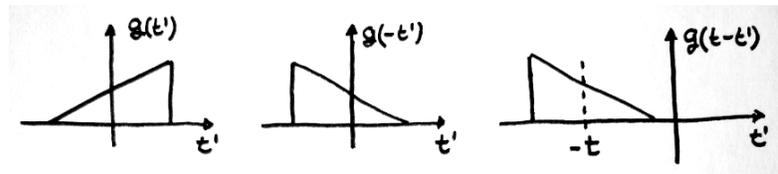


FIG. 12.3 – $f(t')$ en f de t' p ex rectangle centré en zéro

FIG. 12.4 – $g(t')$, $g(-t')$, $g(t-t')$ p ex triangle rectangle

D'autre part, on prend $g(t')$ mais inversée, $g(-t')$, puis décalée du temps t qui nous intéresse, $g(t-t')$:

c'est donc dans le décalage de la fonction g que le temps t intervient. Chaque instant t correspond à un décalage différent entre $f(t')$ et $g(t-t')$.

Finalement, on multiplie ces deux fonctions et on intègre la fonction qui en résulte :

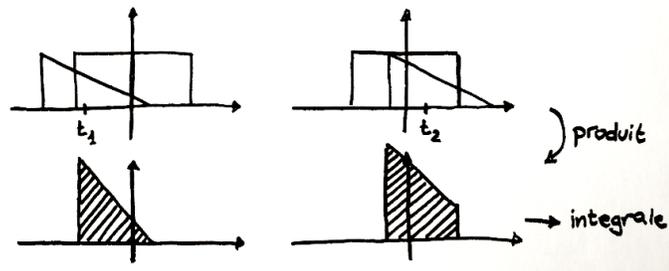


FIG. 12.5 –

Sur notre exemple, lorsque $|t|$ est grand, les deux fonctions ne se recouvrent pas, et leur convolution $\mathcal{F}(t)$ est donc nulle ; pour des t opportuns, plus proches de zéro, on aura un recouvrement des deux fonctions : leur produit est dans ce cas non nul et son intégrale, non nulle aussi, donne $\mathcal{F}(t)$. En d'autres termes, on pourrait dire que le produit de convolution est une mesure du degré de recouvrement de deux signaux en fonction du décalage temporel entre les deux.

△ *Quelques animations sur internet permettent de mieux visualiser l'opération ; voir par exemple*

http://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_de_convolution

<http://www.jhu.edu/~signals/convolve/index.html>

Chapitre 13

Oscillations et ondes.

Dans le chapitre 3 nous avons rapidement discuté le problème de la transmission d'une oscillation au milieu environnant, qui rend possible de la capter et l'étudier. Nous allons revenir maintenant sur cette question pour mieux comprendre comment cette transmission est possible, comment décrire une onde, et surtout pour mettre en évidence l'étroite analogie entre oscillations et ondes. Le but de cette comparaison est de se rendre compte que les méthodes d'analyse que nous avons introduit dans ce cours en considérant des signaux temporels sont en réalité parfaitement applicables à des fonctions d'une variable différente, par exemple de la position.

13.1 Oscillations et ondes

Dans les problèmes de l'oscillateur mécanique que nous avons abordé au chapitre 2, l'oscillateur est un système isolé, décrit par la simple variable $x(t)$ décrivant la position de la masse. Mais supposons maintenant que cet oscillateur soit la membrane d'un haut-parleur. Sa position est encore définie par une variable locale, mais sa vibration rapide perturbe l'air environnant, produisant des compressions et des décompressions qui se transmettent de proche en proche aux molécules du gaz (via les chocs moléculaires) : c'est le son ! Une onde sonore, générée par la membrane—"source", se propage dans le milieu environnant. De la même manière, on peut imaginer de mettre en vibration un atome dans un solide : cette vibration se transmet aux atomes voisins et une onde sonore est créée dans le solide. Si l'oscillateur—source est attaché à l'extrémité d'une corde, une onde transversale traversera la corde. On peut créer une onde de compression dans un ressort, une onde de surface dans un liquide... Le *couplage* de l'oscillateur au milieu extérieur produit une onde.

Un des cas les plus intéressants est quand c'est une charge électrique qui se met à osciller : il peut s'agir de la charge des électrons qui se déplacent dans un circuit électrique ou des vibrations du nuage électronique d'un atome. Dans tous les cas, une onde électromagnétique est émise, et cette fois elle peut se propager le milieu de propagation est *l'espace vide*, dont les propriétés locales "champs électrique" E et "champs magnétique" B sont modifiés par la perturbation¹.

¹L'onde électromagnétique peut évidemment se propager aussi dans un milieu diélectrique.

Il y a donc une relation directe entre oscillateurs et ondes. A bien voir, nous pouvons aussi remarquer que toutes les méthodes développées dans ce cours sont basées sur la décomposition des signaux sur des exponentielles complexes, et que ces mêmes exponentielles sont utilisées dans la description des ondes électromagnétiques! Quel est le rapport précis entre un oscillateur et une onde? Nous savons que une onde est aussi caractérisée par une oscillation, mais cette oscillation est plus complexe et comprends à la fois une variation au cours du temps et une variation dans l'espace. On va essayer de clarifier ce point, et de bien comprendre les différences et les points communs entre oscillateurs et ondes. Voyons brièvement comment décrire une onde se propageant dans un milieu.

13.1.1 Onde progressive

Si on se limite pour simplifier à une seule dimension spatiale y , une onde progressive est par définition une fonction $\psi(y, t)$ qui donne la perturbation de la caractéristique d'intérêt du milieu (pression, déplacement transversale, champs électrique..) au point y et à l'instant t . Attention, j'ai choisi de noter la position par y ici car elle désigne la position dans l'espace où l'onde se propage, et non pas un déplacement local comme dans l'exercice sur l'oscillateur. Si par exemple on considère un oscillateur-source en $y = 0$ attaché à une corde allongée le long d'un axe y , le déplacement transversal x de l'oscillateur correspondra à la valeur du champ ψ en $y = 0$: $\psi(0, t) = x(t)$. Si l'onde se propage (sans atténuation) à la **vitesse de propagation** v , alors, par définition, la perturbation générée en $y = 0$ rejoint un point y après un temps $t = y/v$ (voir figure 13.1).

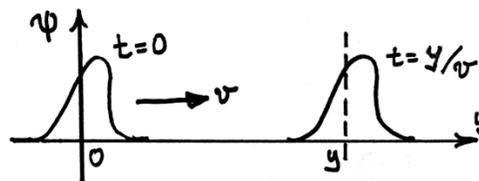


FIG. 13.1 – Onde progressive.

Si on connaît $\psi(0, t) = f(t)$ définissant le comportement de la source en fonction du temps, alors on sait que la même perturbation passera en y au temps retardé $t = y/v$: on a donc

$$\psi(0, t) = f(t) \Rightarrow \psi(y, t) = f\left(t - \frac{y}{v}\right) : \quad (13.1)$$

les deux variables y et t ne sont *pas indépendantes* mais apparaissent toujours sous la forme combinée $q = (t - y/v)$.

En particulier,

FIG. 13.2 – Perturbation en $y = 0$ et en y au cours du temps.

- en un point $y = y_0$ donné, $\psi(y_0, t) = f(t - \frac{y_0}{v})$ est une fonction de t uniquement (évolution temporelle en un point donné),
- à $t = t_0$ fixé, $\psi(y, t_0) = f(t_0 - \frac{y}{v})$ est une fonction de y uniquement ("photographie" de l'onde à temps fixé).

Mais dans les deux cas, c'est toujours la même fonction f qui est en jeu : la description d'une onde progressive comme fonction de l'espace ou du temps sont strictement liées et on peut remonter de l'une à l'autre.

13.1.2 Onde progressive périodique

Précisons ultérieurement la nature de l'onde en supposant que le mouvement de la source soit périodique (comme dans le cas de l'oscillateur libre) de **période** T . Alors,

$$f(t + nT) = f(t) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (13.2)$$

d'où

$$\psi(y_0, t + nT) = f(t + nT - \frac{y_0}{v}) = f(t - \frac{y_0}{v}) = \psi(y_0, t), \quad (13.3)$$

et

$$\begin{aligned} \psi(y, t_0) &= f(t_0 - \frac{y}{v}) = f(t_0 - \frac{y}{v} - nT) = f(t_0 - \frac{y + nvT}{v}) \\ &= \psi(y + nvT, t) = \psi(y + n\lambda, t) : \end{aligned} \quad (13.4)$$

la périodicité temporelle (T) est donc associée à une *périodicité spatiale* décrite par la **longueur d'onde** $\lambda = vT$.

13.1.3 Onde progressive périodique sinusoïdale

Si, de plus, le mouvement de la source est sinusoïdal, c'est-à-dire si $f(t) = a \cos(\omega t)$ avec $\omega = 2\pi/T$, alors

$$\psi(y, t) = f(t - \frac{y}{v}) = a \cos\left(\omega\left(t - \frac{y}{v}\right)\right) = a \cos(\omega t - ky) \quad (13.5)$$

où $k = \omega/v = 2\pi/vT = 2\pi/\lambda$ est le **nombre d'onde**.

On retrouve donc finalement la dépendance en $(\omega t - ky)$ des ondes électromagnétiques : en notation complexe, on pourra donc écrire $\cos(\omega t - ky) = \text{Re}(\exp j(\omega t - ky))$. De plus, nous venons de retrouver les deux relations fondamentales entre les variables période et pulsation, longueur d'onde et nombre d'onde :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (13.6)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (13.7)$$

avec $k/\omega = v$.

En conclusion, une onde qui se propage dans un milieu transporte avec elle une oscillation qui est partout proportionnelle à l'oscillation de la source qui génère l'onde :

	temps	espace
periode	T	$\lambda = v/T$
pulsation	$\omega = 2\pi/T$	$k = 2\pi/\lambda = \omega/v$
fréquence	$f = 1/T = \omega/2\pi$	

TAB. 13.1 – Principales grandeurs caractéristique des ondes.

on peut donc capter l'onde à n'importe quelle position pour avoir un signal contenant l'information sur le mouvement de cette source. Les ondes sont donc décrites d'une manière très proche aux oscillateurs, sauf que deux variables (couplées) interviennent. Dans ce cours, je vais toujours parler de fonctions du temps, typiquement de $x(t)$, où x n'est pas forcément une position mais une quelconque grandeur variable au cours du temps (charge, température, différence de potentiel...). Cependant, tout le formalisme qu'on va développer s'applique aussi bien aux fonction du temps que de l'espace, et donc aux ondes et plus en particulier à la variabilité dans l'espace d'une onde "photographiée" à un instant t donné.

Chapitre 14

Signaux aléatoires

14.1 Rappels de probabilité

Nous allons finalement nous intéresser dans ce dernier chapitre aux signaux aléatoires, c'est-à-dire aux signaux pour lesquels la variable à chaque instant ne peut pas être déterminée avec certitude mais on peut seulement donner la probabilité avec laquelle elle aura telle ou telle valeur. Ce type de signaux représente en fait la plupart des signaux réels, car, comme nous l'avons discuté dans le premier chapitre, toute mesure est soumise à un bruit et est donc intrinsèquement aléatoire.

Pour aborder ce type de signal il faut donc prendre en compte son caractère probabiliste et introduire des *outils statistiques*. Avant même de commencer avec l'étude des signaux aléatoires, faisons donc quelques rappels de théorie de la probabilité pour réintroduire les notions de base que nous allons réutiliser par la suite.

Distribution de probabilité et moments

Considérons donc une **variable aléatoire** physique à mesurer X . Pour l'instant X n'est pas un signal (dépendant du temps) mais une variable unique, une seule mesure, comme par exemple la longueur d'onde émise par un atome ou la température dans une pièce.

Si on mesure X plusieurs fois, on aura donc une série de **réalisations de X** ,

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \dots$$

chacune d'entre elles étant une valeur précise de X obtenue dans la mesure correspondante. Le résultat d'une mesure peut donc varier et il n'est prévisible qu'en termes de probabilité. Si la variable X est continue, alors **la probabilité d'obtenir la valeur x** dans un intervalle dx lors d'une mesure est donné par

$$\mathcal{P}(x < X < x + dx) = P(x) dx, \quad (14.1)$$

avec $P(x)$ la **densité de probabilité** associée. La connaissance de $P(x)$ est le maximum d'information qu'on puisse avoir sur X . Typiquement, on ne connaît $P(x)$ exactement que pour une variable aléatoire qu'on a défini de manière mathématique ; pour

une variable réelle issue d'une mesure, dont on ne connaît pas exactement la forme mathématique, on peut tout de même **estimer** $P(x)$ à partir d'un assez grand nombre N de mesures en construisant l'**histogramme** de ces mesures, qui approche $P(x)$ de mieux en mieux lorsque $N \rightarrow \infty$.

D'autre part, la densité de probabilité $P(x)$ est caractérisée par un certain nombre de paramètres, les **moments de la distribution**, dont les plus importants sont ceux d'ordre plus faible :

1. le **moment d'ordre 1** ou **espérance mathématique** de X :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)dx. \quad (14.2)$$

On reconnaît dans cette expression la définition courante de **valeur moyenne** \bar{x} de x .

Une **estimation** opérationnelle de $E[X]$ peut donc être obtenue, à partir d'un grand nombre N de mesures, en calculant la *moyenne d'ensemble* sur ces mesures, qui doit tendre à cette moyenne mathématique pour $N \rightarrow \infty$:

$$E[X] = \bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (14.3)$$

2. Le **moment d'ordre 2** ou **variance** de X , qui n'est rien d'autre que l'espérance mathématique de $(X - \bar{x})^2$:

$$E[(X - \bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 P(x)dx. \quad (14.4)$$

C'est l'expression usuelle de la **variance** σ_X^2 de x .

Une **estimation** opérationnelle de $E[(X - \bar{x})^2]$ sera donc obtenue à partir d'un grand nombre N de mesures, en calculant la variance de ces mesures, qui doit tendre à cette variance mathématique pour $N \rightarrow \infty$:

$$E[(X - \bar{x})^2] = \sigma_X^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (14.5)$$

3. Plus généralement, le **moment d'ordre n** de X est défini comme l'espérance mathématique de $(X - \bar{x})^n$:

$$E[(X - \bar{x})^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^n P(x)dx, \quad (14.6)$$

et peut aussi être estimé à partir des mesures comme

$$E[(X - \bar{x})^n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^n. \quad (14.7)$$

Remarquons que, en général, l'estimation de n'importe quelle fonction $f(X)$ de la variable aléatoire X peut se faire à partir des mesures, en calculant $\sum_{i=1}^N f(x_i)$. Plus N est grand, meilleure sera l'estimation.

On peut montrer que la connaissance de tous les moments d'une distribution de probabilité équivaut à la connaissance (mathématique) de la distribution.

D'autre part, on peut parfois connaître théoriquement la forme mathématique de $P(x)$, grâce à des informations complémentaires sur le type de processus aléatoire qui génère la variable X . Par exemple, on peut savoir que la variable à laquelle on s'intéresse suit une loi de probabilité Gaussienne, ou binomiale, ou de Poisson. Ces distributions ont des formes mathématique relativement simples (que vous pouvez retrouver facilement sur n'importe quel texte de probabilité) pour lesquelles les moment d'ordre plus élevé sont nuls. Il suffit alors d'estimer ces premiers moments pour obtenir toute la distribution, grâce à la connaissance théorique de sa forme générale.

Exemple. Un exemple important est lié au *théorème de la limite centrale*. Ce théorème affirme que si X est la somme de N variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, alors pour grand N elle tend vers une variable aléatoire Gaussienne dont la loi de probabilité est donnée par

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_X^2}\right) \text{ distribution Gaussienne.} \quad (14.8)$$

C'est un exemple particulièrement intéressant parce que des nombreuses variables physiques peuvent être considérées comme somme de variables aléatoires : un exemple pour tous est la vitesse des atomes dans un gaz ou dans un liquide, qui, sur des échelles de temps suffisamment longues, peut être vu comme la somme d'une grands nombre de forces de choc aléatoires.

Covariance

Dans certains cas, l'étude d'un système physique peut nous amener à considérer plusieurs variables aléatoires à la fois. Il peut alors être important de déterminer si ces variables sont indépendantes, ou bien si les valeurs mesurées pour l'une dépendent, et en quelle mesure, de celle mesurées pour l'autre. Cette interdépendance entre deux variables peut être caractérisée par un autre paramètre statistique dont on va se servir plus tard : la **covariance**.

Soient X et Y deux variables aléatoires, alors on définit leur covariance

$$C_{XY} = E[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})(y - \bar{y})P(x, y) dx dy \text{ covariance,} \quad (14.9)$$

où $P(x, y)$ est la densité de probabilité conjointe d'avoir la valeur x pour la variable X et la valeur y pour la variable Y . On note parfois la covariance $\text{cov}(X, Y)$ ou encore σ_{XY} .

Essayons de comprendre le sens de cette quantité en considérant des cas limites :

1. si X et Y sont complètement indépendant, alors on a, par définition,

$$P(x, y) = P(x)P(y) :$$

d'où la covariance est nulle :

$$C_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})P(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \bar{y})P(y) dy = 0 \quad (X \text{ et } Y \text{ indépendants}). \quad (14.10)$$

2. Dans le cas opposé où $X = Y$, es deux sont complètement dépendants, car une fois déterminée la valeur de X on connaît avec certitude la valeur de Y . On obtient alors directement par la définition

$$\begin{aligned} C_{XY} &= E[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})] = E[(X - \bar{x})(X - \bar{x})] & (14.11) \\ &= C_{XX} = \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 & (\text{si } X = Y). \end{aligned}$$

A partir de la covariance il convient alors de définir une quantité adimensionnée appelée **coefficient de corrélation** ρ_{XY} et donnée par

$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (14.12)$$

(avec $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$ et $\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2}$), de telle sorte que

$$\begin{aligned} \rho_{XY} &= 0 & \text{pour } X \text{ et } Y \text{ indépendants,} \\ \rho_{XY} &\in]0, 1[& \text{pour } X \text{ et } Y \text{ partiellement dépendants,} \\ \rho_{XY} &= 1 & \text{pour } X \text{ et } Y \text{ entièrement dépendants } (X = Y). \end{aligned}$$

La figure 14.1 montre des exemples où les deux variables x et y sont variables plus ou moins corrélées. Plus le coefficient de corrélation est grand, plus la la valeur mesuré pour y s'approche de celle de x : les points s'alignent donc sur la droite $y = x$. On peut aussi avoir une dépendance particulière entre le deux variables, $y = f(x)$, vérifiée plus ou moins bien selon le degré de corrélation : les points s'aligneront dans ce cas sur une courbe différente.

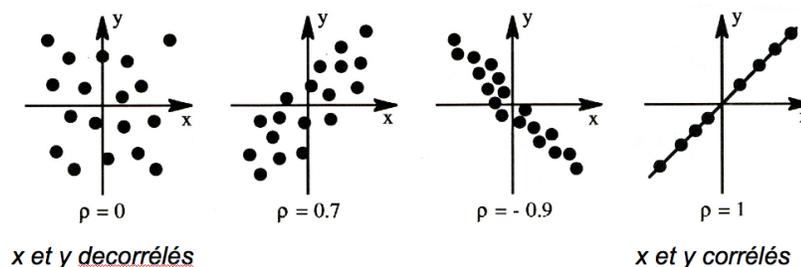


FIG. 14.1 – Exemple de variables plus ou moins corrélées.

14.2 Signaux aléatoires

Considérons maintenant des signaux aléatoires, c'est-à-dire des signaux temporels pour lequel la valeur à *chaque instant de temps* t est une variable aléatoire, dont on ne connaît la valeur que avec une certaine distribution de probabilité :

$$x(t) \text{ variable aléatoire } \forall t.$$

Voyons quelques exemples. AJOUTER Commentaires : signaux discrets ou continus, avec

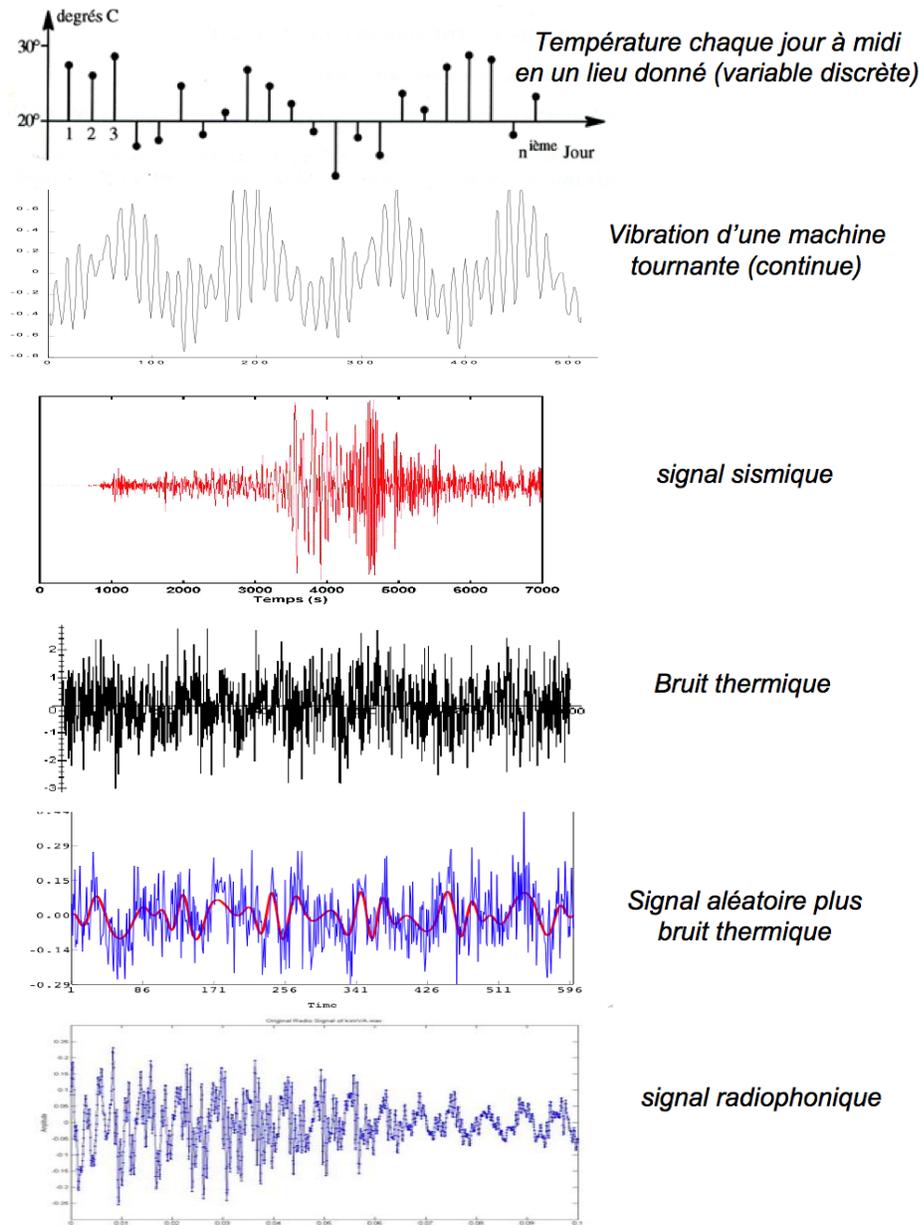


FIG. 14.2 – Exemples de signaux aléatoires.

une certaine régularité et des échelles de temps reconnaissables ou rapidement variables et plus

», de durée limitée ou pas, éventuellement issu le la somme de plusieurs signaux aléatoires.

Ces signaux peuvent aussi contenir plus ou moins d'information : il est clair par exemple que le signal issu du bruit thermique ne contient pas autant d'information que un signal radio, qui est fait justement pour transporter de l'information. On peut d'ailleurs se demander si ce dernier est véritablement un signal aléatoire : d'une part, en connaissant le

» transporté, on doit pouvoir reproduire - et donc prévoir - la même forme de signal ; d'autre part, on peut s'attendre à que ce signal ne soit pas parfait mais affecté d'un certain degré de bruit additionnel. De toutes manières, il est sûr que, si on le prend tel quel, on ne peut pas en prévoir la suite. On est donc porté à le qualifier d'aléatoire et à le traiter comme tel. Et, en réalité, la question est mal posé : même pour le cas du bruit thermique, par exemple dans un gaz, si on pouvait connaître exactement toutes les forces en jeu, la position initiales de tous les atomes, et déterminer les trajectoires de tous les atomes, on pourrait en principe déterminer l'évolution du système de manière parfaite et donc aussi le bruit qu'il en résulte ! Or évidemment ceci n'est pas possible à cause de la grande complexité du système, mais on est donc un peu dans la même situation que pour le signal radio : notre incapacité de prévoir l'évolution du signal vient de notre connaissance incomplète des causes qui le déterminent. Ce même raisonnement peut donc s'appliquer même à des signaux issus de mécanismes bien plus simples, mais dont on ne connaît pas, ou on ne veut pas prendre en compte, l'origine : un bon exemple c'est celui de la température d'une usine au cours de la journée. Cette température évolue dans le temps de manière complètement prévisible car elle a été programmée par un opérateur ; cependant, si on ne veut pas connaître exactement son évolution mais simplement en déterminer par exemple la valeur moyenne ou la variabilité (variance), on peut la traiter comme un signal aléatoire, et lui appliquer les mêmes outils statistiques qu'aux autres signaux aléatoires.

14.2.1 Stationnarité et ergodicité

Statistique

L'étude des signaux aléatoires nécessite les mêmes outils statistiques que celle des variables aléatoires que nous avons vu en introduction, évidemment en prenant en compte la variable temps et donc en définissant les grandeurs statistiques à chaque instant. Par exemple, on introduira l'**espérance mathématique** ou moyenne de $X(t)$ comme

$$E[X(t)] = \bar{x}(t) \quad (14.13)$$

ou sa **variance**

$$E[(X(t) - \bar{x}(t))^2] = \sigma_X^2(t). \quad (14.14)$$

Ces grandeurs sont encore à calculer comme des moyennes d'ensemble : pour chaque instant, l'espérance mathématique d'une fonction $f(X(t))$ du signal $X(t)$ doit être calculée, théoriquement, sur la base de la probabilité $\mathcal{P}(x(t))$ d'avoir la valeur $x(t)$ au

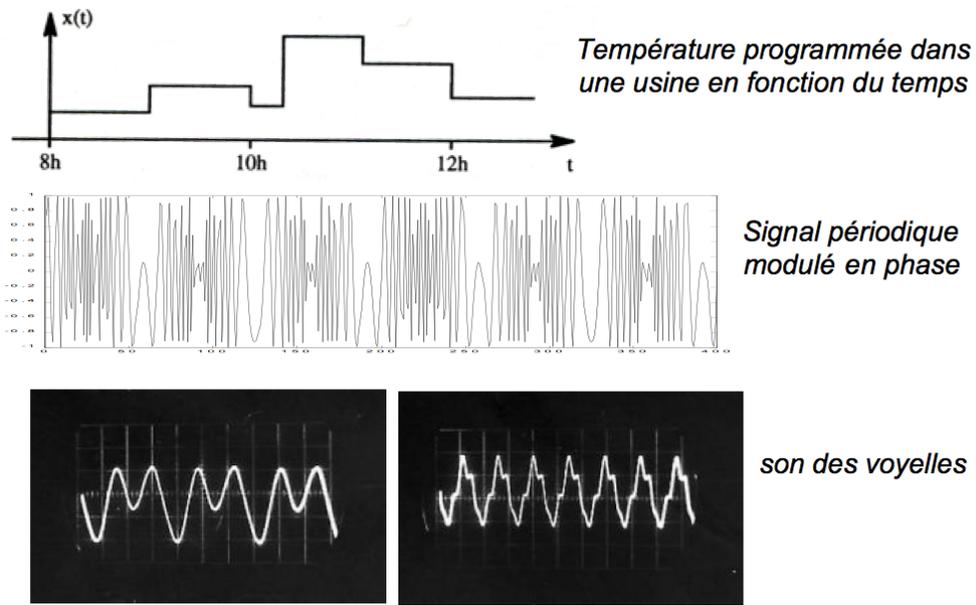


FIG. 14.3 – Exemples de signaux déterministes qu'on peut avoir intérêt à traiter comme signaux aléatoires.

temps t , où, pratiquement, sur la base de l'ensemble des valeurs $x(t)$ obtenues au temps t sur plusieurs réalisations du processus aléatoire.

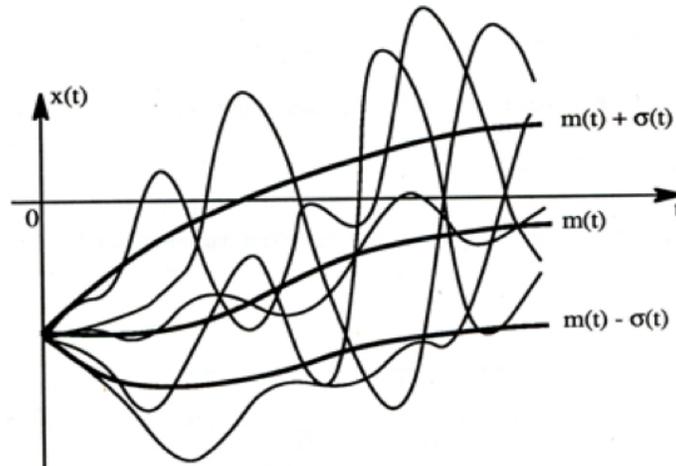


FIG. 14.4 – Caractéristiques statistiques (fonctions du temps) d'un signal aléatoire calculées à chaque instant sur la base d'un ensemble de réalisations.

Stationnarité

Dans certains cas, ces moyennes d'ensemble s'avèrent être indépendantes du temps : on parle alors de **signaux stationnaires** :

un signal aléatoire $X(t)$ est dit **stationnaire** si **toutes ses caractéristiques statistiques sont indépendantes de l'origine des temps.**

On aura donc par exemple

$$\bar{x}(t) = \bar{x} \quad (14.15)$$

$$\sigma_X^2(t) = \sigma_X^2 \quad (\text{si } X(t) \text{ est un signal stationnaire}) \quad (14.16)$$

$$(14.17)$$

etc. pour tous les autres grandeurs statistiques.

On comprend mieux la définition de signal stationnaire en considérant quelques exemples de signaux qui ne le sont pas. En figure 14.5 on a représenté trois exemples de signaux non stationnaires : pour le premier, la moyenne reste constante au cours du temps, mais pas la variance ; pour le deuxième, l'une et l'autre augmentent avec le temps. Le troisième signal semble avoir une moyenne et une variance constantes, mais il est évident que ses caractéristiques générales ne le sont pas, et particulièrement que la fréquence caractéristique de ses oscillations varie au cours du temps : nous n'avons pas encore sous la main une méthode statistique appropriée pour estimer cette grandeur (on devine qu'il va s'agir typiquement d'en calculer le spectre), mais on peut de toutes manières dire que ce signal n'est pas stationnaire, car par définition *toutes* ses caractéristiques statistiques doivent être indépendantes du temps.

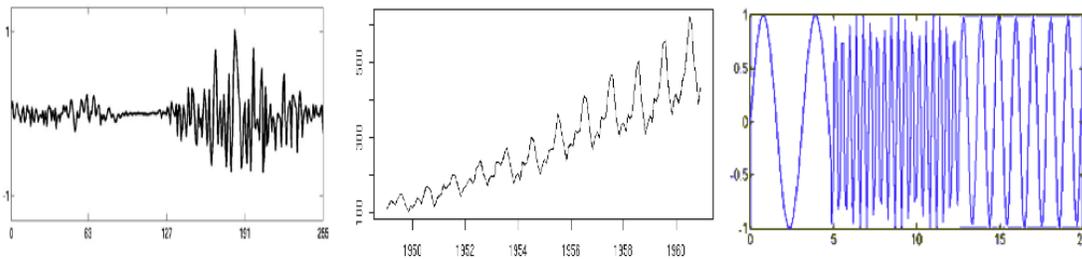


FIG. 14.5 – Exemples de signaux non stationnaires.

Ergodicité

Une autre caractéristique importante d'un signal aléatoire est son ergodicité. Dans la pratique, on ne dispose souvent que d'une seule réalisation du phénomène aléatoire. Il devient donc difficile de caractériser statistiquement le signal aléatoire : comment faire des moyennes d'ensemble ? L'hypothèse d'ergodicité consiste à admettre que l'évolution d'un signal aléatoire au cours du temps apporte la même information qu'un ensemble de réalisations. Par conséquent, la moyenne d'ensemble et la moyenne temporelle coïncident :

Si $X(t)$ est un **signal ergodique**, alors, pour n'importe quelle fonction $f(X)$, on a

$$E[f(X(t))] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x(t)) dt \quad (14.18)$$

moy. d'ens. moy. temp. (X(t) ergodique)

Pour un signal ergodique la moyenne d'ensemble peut donc être remplacé par une moyenne temporelle : il sera donc possible d'utiliser une seule réalisation du processus aléatoire de durée suffisamment longue T et de moyenner sur cette durée pour avoir un bon **estimateur** de ses caractéristiques statistiques :

$$E[f(X(t))] \simeq \frac{1}{T} \int_0^T f(x(t)) dt \quad (\text{si } X(t) \text{ ergodique}). \quad (14.19)$$

Par exemple, on aura pour un signal ergodique

$$E[f(X(t))] = \bar{x} \simeq \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (14.20)$$

$$E[(X(t) - \bar{x}(t))^2] = \sigma_X^2 \simeq \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \bar{x}(t))^2 dt. \quad (14.21)$$

Evidemment plus longue sera la durée de la réalisation meilleure sera la statistique obtenue, le résultat approchera de mieux en mieux la valeur théorique donnée par la limite $T \rightarrow \infty$.

Il est important de ne pas confondre stationnarité et ergodicité, même si les deux propriétés ont toutes les deux affaire à l'évolution temporelle d'un signal, et leur conséquences sont parfois liées d'un point de vue pratique. En général,

- Stationnarité n'implique pas ergodicité,
- Ergodicité n'implique pas stationnarité.

Par exemple, le signal de la figure 14.6 est non stationnaire, ses propriétés changent au cours du temps : dans ce cas, il n'est pas raisonnable de vouloir les estimer par une moyenne temporelle, et la question de l'ergodicité ne se pose donc pas. Par contre, la fig-

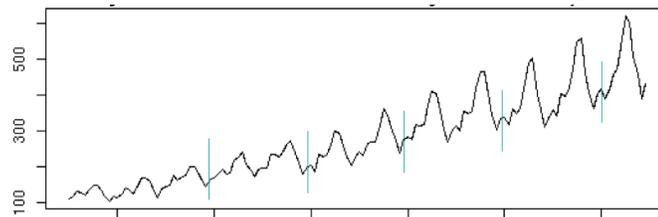


FIG. 14.6 – Signal non stationnaire.

ure 14.7 représente un signal qui est une constante aléatoire : à chaque réalisation, le signal est constant, mais sa valeur est différente, et aléatoire. Le signal est donc évidemment

stationnaire, mais pas ergodique : on ne peut pas remplacer la moyenne d'ensemble, qui prend en compte toutes les différentes réalisations, par une moyenne temporelle sur l'une d'entre elles. La vérification de l'hypothèse d'ergodicité peut dépendre de quel type

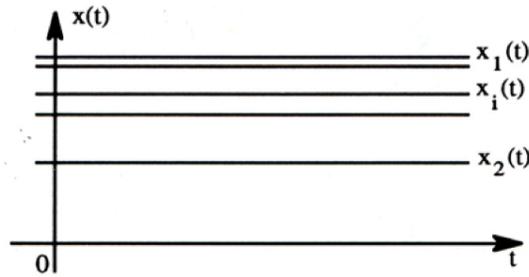


FIG. 14.7 – Signal stationnaire non ergodique.

de statistique on veut faire, de quelles expériences on veut comparer. Si par exemple on effectue une mesure de la tension due au bruit de fond d'un amplificateur chaque jour à la même heure, et donc dans les mêmes conditions, et si on peut supposer que le temps d'échauffement soit négligeable et les signaux obtenus stationnaires (premiers trois graphes de la figure 14.8), alors on peut raisonnablement supposer que les moyennes temporelles effectuées un jour donné ne soient pas différentes de celles faites les autres jours et des moyennes d'ensemble, et assumer l'ergodicité du signal. En revanche, on peut vouloir étudier le même bruit de fond pour des amplificateurs différents (derniers quatre graphes de la figure 14.8), on peut être confronté à des différences intrinsèques à l'électronique de chacun : faire l'hypothèse d'ergodicité signifie en ce cas assumer que la moyenne sur l'ensemble des amplificateurs est équivalente à la moyenne temporelle sur l'un d'entre eux, ce qui n'est pas forcément vrai car les amplificateurs peuvent se comporter de manière différente. On devra donc soit refuser cette hypothèse, soit essayer de montrer qu'elle est valable en comparant moyennes temporelles et moyennes d'ensemble (comme vous le verrez dans un TP).

Stationnarité et ergodicité sont deux hypothèses importantes car elles facilitent considérablement l'étude des signaux aléatoires et en particulier de leurs propriétés spectrales, comme nous allons le voir.

14.2.2 Fonction de corrélation

Fonction de covariance

Revenons maintenant à la question de l'intercorrélation, mais en considérant deux signaux temporels à la place de deux simples variables aléatoires. Par exemple on peut vouloir comparer le flux radiatif provenant du soleil $x(y)$, mesuré pendant une journée, à la température $y(t)$ au sol enregistrée en même temps au même endroit (figure 14.9). En observant les données, on se rend compte facilement que les deux quantités sont en effet corrélées l'une à l'autre pendant la journée, comme on peut s'attendre car le flux radiatif entraîne une augmentation de température, mais on remarque la présence d'un certain retard τ_0 entre l'arrivée du flux et l'augmentation de température. Pour mettre

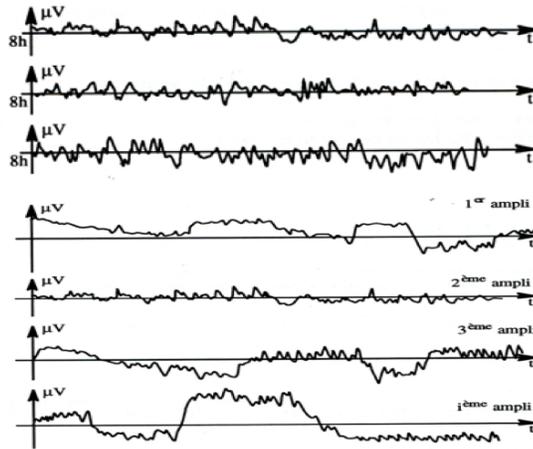


FIG. 14.8 –

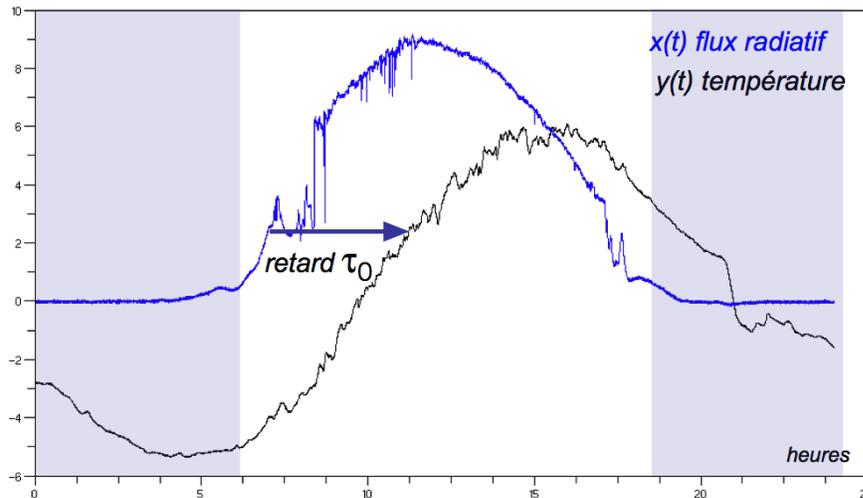


FIG. 14.9 – Température (noir) et flux radiatif (bleu) au sol pendant une journée (en grisée les périodes de nuit).

en évidence la corrélation entre ces deux signaux il ne suffira donc pas de calculer la covariance des deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ à un temps t donné. Il est plutôt plus intéressant de calculer la covariance entre le signal $x(t)$ et le signal **retardé d'un temps τ** $y(t + \tau)$ en fonction du retard τ (et du temps t) : c'est la **fonction de covariance entre deux signaux**

$$C_{xy}(t, \tau) = E[(X(t) - \bar{x}(t))(Y(t + \tau) - \bar{y}(t + \tau))]. \quad (14.22)$$

On aura une covariance maximum lorsque τ est égale au retard τ_0 qui intervient effectivement entre les deux signaux.

Corrélation

Cette idée de calculer l'interdépendance entre deux signaux pris à deux temps différents suggère qu'on pourrait faire la même chose pour un seul signal $x(t)$, en le comparant à lui-même à un temps décalé. Considérons donc la covariance entre $x(t)$ et $x(t + \tau)$:

$$C_{xx}(t, \tau) = E[(X(t) - \bar{x}(t))(X(t + \tau) - \bar{x}(t + \tau))]. \quad (14.23)$$

Quelle information nous donne cette grandeur ? Quelques parts, on peut dire qu'elle mesure la **mémoire du signal** : si le signal retardé $x(t + \tau)$ dépend de $x(t)$, la covariance sera non nulle, alors qu'elle sera zéro si la valeur du signal en T n'a aucune influence sur celle en $t + \tau$. Or la covariance C_{xx} dépend de τ mais aussi de t : la dépendance entre les deux signaux peut changer avec le temps initial. Cependant, les choses se simplifient beaucoup dans le cas d'un signal stationnaire :

si le signal $x(t)$ est stationnaire, alors

$$C_{xx}(t, \tau) = C_{xx}(0, \tau) \quad (14.24)$$

et on peut définir la **fonction de corrélation** $\varphi_{xx}(\tau)$

$$\varphi_{xx}(\tau) = C_{xx}(0, \tau) \quad \text{fonction de corrélation de } x(t). \quad (14.25)$$

De par sa définition, $\varphi_{xx}(\tau)$ mesure donc l'interdépendance entre un signal stationnaire à un temps donné et le même signal retardé, en fonction du retard. Elle contient beaucoup d'information et nous renseigne sur la nature du signal dans plusieurs sens :

1. **Périodicités cachées.** D'une part, la fonction de corrélation peut être utile pour étudier un signal aléatoire mais caractérisé par des événements répétés avec une fréquence caractéristique. Considérons par exemple un morceau musical ; dans la figure 14.10, le signal temporel d'une musique de Strauss. Même si le signal n'est

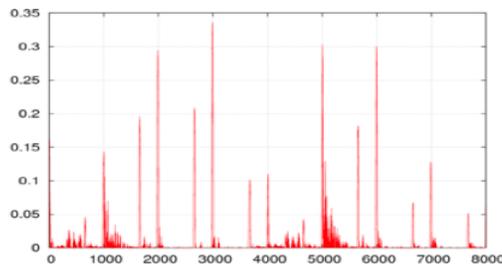


FIG. 14.10 – Signal temporel issu de la musique 'Danube bleu' de Strauss, en fonction du temps en secondes.

pas périodique, le rythme musical fait qu'il y a un certain degré de répétition : on peut alors s'attendre à que la fonction de corrélation soit sensible à cette répétition, parce que le signal retardé
ble plus
» au
signal d'origine pour des retards multiples de la période typique de répétition T_0 que pour d'autres retards. Et en effet, la fonction corrélation qu'on obtient, montrée

«rassem-

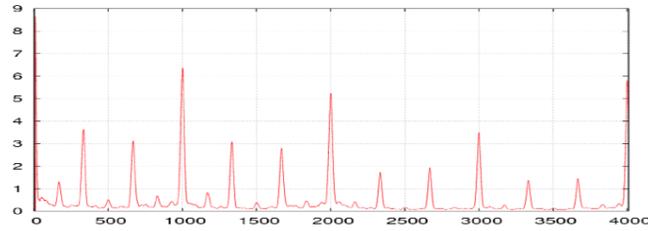


FIG. 14.11 – Fonction de corrélation pour le signal de musique 'Danube bleu' de Strauss, en fonction du retard en millisecondes.

en figure 14.11, présente des pics bien nets pour tous les retards $\tau = mT_0$. La fonction de corrélation permet donc d'identifier des **périodicités cachées dans un signal**.

2. **Mémoire.** D'autre part, même en l'absence de périodicité dans le signal, la fonction de corrélation nous renseigne sur le degré de **persistance** d'un signal : si le signal a tendance à varier doucement, donc à rester proche d'une valeur initiale pendant un certain temps, alors $\varphi_{xx}(\tau)$ sera non nulle pour des valeurs du retard suffisamment petites, pour s'annuler seulement pour des retards tels que le signal a perdu toute dépendance de sa valeur initiale. Au contraire, pour un signal qui varie très rapidement, la valeur à un temps retardé aura tendance à être très rapidement décorrélée de la valeur initial, et la fonction de corrélation s'annulera donc beaucoup plus rapidement (figure 14.12). Dans ce sens, $\varphi_{xx}(\tau)$ est une mesure de

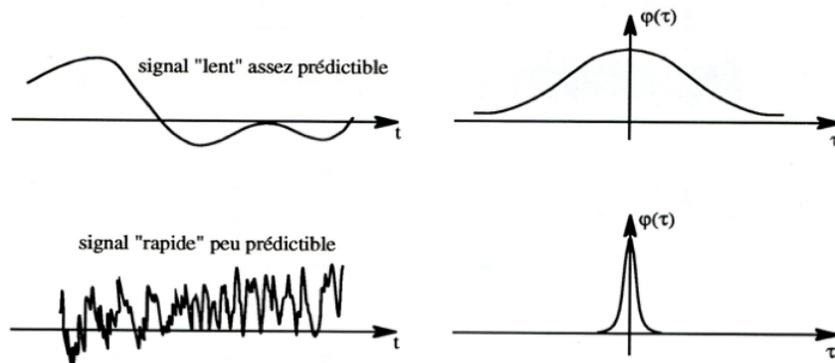


FIG. 14.12 – Cas de signaux

» ou

» et fonctions de corrélation correspondantes.

«lent

«rapide

la **mémoire** du signal $x(t)$ (et donc du phénomène physique qui est à l'origine du signal), et du degré de dépendance de la valeur du signal à un instant donné de son histoire précédente.

3. **Anti-persistance.** Un signal peut donc avoir une certaine persistance, mais le cas opposé existe aussi : on parle ainsi de signal **anti-corrélé** quand après un certain retard sa valeur a tendance à être opposée à celle initiale. Sa corrélation devient alors

«bonne mémoire » de son histoire précédente. Des exemples possibles (mais pas sûrs !) d'un tel comportement peuvent être envisagés dans l'évolution de la température de la planète ou dans l'évolution des cours boursiers.

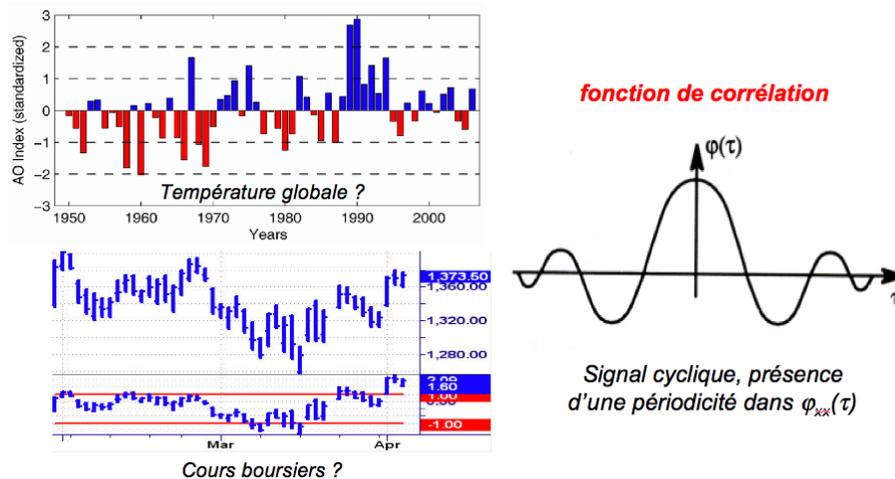


FIG. 14.13 –

En résumé, la fonction de corrélation nous fournit une information assez riche sur les propriétés d'un signal aléatoire et particulièrement sur son évolution temporelle.

Propriétés de la fonction de corrélation

Il est utile de connaître les **principales propriétés de la fonction de corrélation** :

- Par définition, $\varphi_{xx}(0) = E[(X(t) - \bar{x})(X(t) - \bar{x})] = \sigma_{xx}^2$:
la fonction de corrélation évaluée à retard nul $\tau = 0$ coïncide avec la variance du signal.
- $\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{xx}(-\tau)$:
La fonction de corrélation est paire.
- $|\varphi_{xx}(\tau)| \leq \varphi_{xx}(0) \forall \tau$:
Le module de la fonction de corrélation est toujours inférieure à sa valeur en $\tau = 0$: le signal $x(t)$ est toujours parfaitement corrélé au signal $x(t)$ lui même, sans retard !
- En général, $\varphi_{xx}(\tau) \rightarrow 0$ pour $\tau \rightarrow \infty$:
un signal aléatoire finit par perdre l'information sur sa valeur d'origine au tendre à l'infini du retard. Ceci n'est pas vrai pour un signal déterministe, dont l'évolution à tous temps est déterminé par sa valeur initiale.

- Dans des nombreux cas, on peut définir une **durée de corrélation** τ_0 caractéristique du phénomène aléatoire, donnant justement une mesure du retard après lequel le signal a perdu la mémoire de sa valeur initiale. Plusieurs définitions sont possibles. Un choix simple est de définir τ_0 comme le temps tel que le module de la fonction de corrélation est divisé par deux :

$$|\varphi_{xx}(\tau_0)| = \frac{\varphi_{xx}(0)}{2} \quad (\text{déf. 1}). \quad (14.26)$$

Si $\varphi_{xx}(\tau)$ décroît de manière exponentielle, comme c'est souvent le cas¹, on peut aussi être un peu plus précis et calculer τ_0 comme l'échelle caractéristique de cette décroissance (en faisant un fit de la fonction pour τ assez grand par exemple) :

$$|\varphi_{xx}(\tau)| \propto \exp(-\tau/\tau_0) \quad (\text{déf. 2}). \quad (14.27)$$

14.3 Cas des signaux déterministes

Nous venons d'introduire la fonction de corrélation comme une mesure du degré de mémoire d'un signal. Quels sont les cas limites de ce point de vue ? Existe-t-il des signaux avec une mémoire infinie ou sans mémoire ? Pour le premier cas, nous connaissons la réponse : un signal complètement déterministe est, par définition, complètement déterminé par sa valeur initiale, via sa loi d'évolution. On peut toujours calculer la covariance $C_{xx}(t, \tau)$ pour un tel signal, dont l'allure dépendra de la forme du signal lui-même ; si le signal peut aussi être considéré comme stationnaire, on peut aussi définir sa fonction de corrélation. Pour pouvoir considérer le signal comme stationnaire il faut que ses propriétés ne dépendent pas de l'origine des temps : il nous faut donc exclure par exemple toutes les fonctions qui s'annulent pour $t \rightarrow \infty$: l'exemple typique d'un signal déterministe stationnaire est par contre un signal périodique. Dans ce cas, la fonction de corrélation est elle aussi parfaitement périodique, avec la même période, car elle est maximale à chaque fois que $x(t + \tau) = x(t)$.

Il est aussi intéressant de voir l'allure de la fonction corrélation d'un signal périodique auquel on a rajouté du bruit (figure 14.14) : dans ce cas, la périodicité cachée du signal, peu visible sur le signal lui-même, résulte assez clairement dans l'allure oscillante de la fonction de corrélation, bien que estompée pour des retards de plus en plus importants. Le bruit additif finit par détruire la corrélation du signal.

14.4 Un signal sans mémoire : le bruit blanc

L'autre cas extrême qui nous intéresse est le cas d'un signal sans aucune mémoire. Un signal rigoureusement sans mémoire n'existe pas naturellement, mais il est très utile d'introduire un signal idéal avec cette propriété car il est un bon modèle pour des nombreux cas réels. On l'appelle **bruit blanc**, et on le définit comme suit :

¹Il est intéressant de noter cependant que certains phénomènes aléatoires sont caractérisés par une décroissance particulièrement lente de la fonction de corrélation, tellement lente qu'il devient impossible de définir une durée de corrélation finie. Typiquement la fonction $\varphi_{xx}(\tau)$ décroît dans ces cas comme une puissance de τ . On parle alors de **corrélation longue portée**.

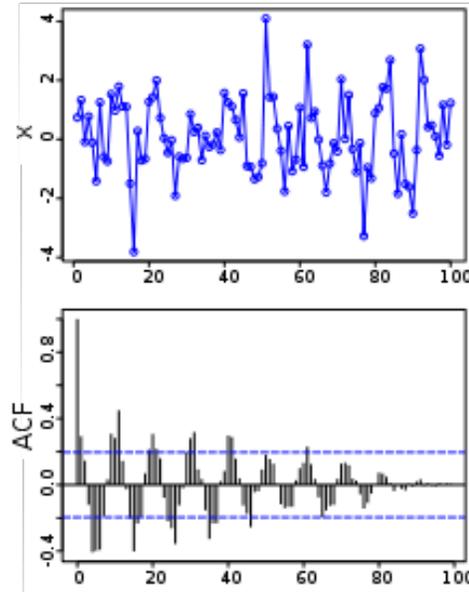


FIG. 14.14 –

Le **bruit blanc** $b(t)$ est un signal stationnaire idéal pour lequel

$$\bar{b}(t) = 0 \quad \text{signal de moyenne nulle} \quad (14.28)$$

$$\text{vp}_{bb}(\tau) = \gamma\delta(\tau) \quad \text{fonction de corrélation nulle pour } \tau \neq 0. \quad (14.29)$$

Pour n'importe quel retard $\tau \neq 0$, la valeur de $b(t+\tau)$ est indépendante de celle de $b(t)$: le signal n'a pas de mémoire, il est immédiatement décorrélé de la valeur précédente. Par contre nous savons que la corrélation ne peut pas s'annuler en $\tau = 0$, et on a toujours $\text{vp}_{bb}(0) = \sigma_{bb}^2 = \infty$ pour un bruit blanc : sa variance est infinie.

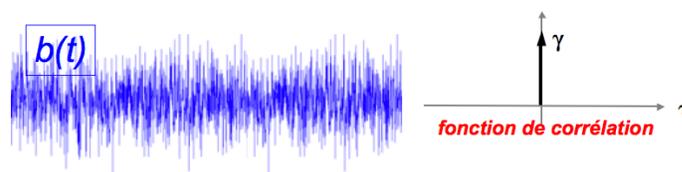


FIG. 14.15 –

Pourquoi appelle-t-on ce signal $b(t)$ un **bruit** ? C'est parce que ce signal est un bon modèle de bruit, en particulier du bruit thermique. Nous savons que la mesure physique est toujours affectée d'un bruit thermique résultant de la somme d'un grand nombre de phénomènes aléatoires (les chocs des molécules dans un gaz ou des électrons dans un conducteur) Ces forces microscopiques agissent sur des échelles de temps données et en général très courtes par rapport au temps d'observation, et nous savons que si on observe

le signal résultant sur des pas de temps² Δt grands par rapport aux temps caractéristiques de ces forces alors chaque mesure sera indépendante de la mesure précédente. Sur cette échelle de temps le signal sera donc totalement aléatoire et décorrélé : c'est pour cela que le bruit blanc est un bon modèle pour ce bruit, à l'échelle d'observation Δt .

Et pourquoi bruit

«blanc

» ? Pour répondre à cette question, il faut aller un peu plus loin dans la théorie des signaux aléatoires, et arriver finalement à la généralisation de la notion de **spectre** pour ce signaux.

14.5 Spectre d'un signal aléatoire

Nous avons parlé de périodicités cachées dans un signal. Pourquoi ne pas les rechercher en faisant une transformée de Fourier, comme nous l'avons appris ? Pour un signal déterministe, cette opération permet d'obtenir le spectre du signal et donc les fréquences caractéristiques, qui donnent généralement des pics bien identifiables sur le spectre. En effet, la détermination d'un spectre pour un signal aléatoire est un peu plus délicate.

Le problème est lié justement au caractère aléatoire du signal. Pour avoir une information pertinente sur le processus aléatoire, nous avons besoin de faire recours à une analyse statistique, moyennant sur des grands nombres de réalisation (ou sur des temps très longs pour des signaux ergodiques). Une seule réalisation n'est généralement pas suffisante, car elle ne contient pas suffisamment d'information sur le processus aléatoire : en effet, si on calcule la TF d'un signal aléatoire individuel, on n'obtient en général que peu d'information. La figure 14.16 montre un exemple où on a calculé la TF de trois réalisations d'un même phénomène aléatoire.

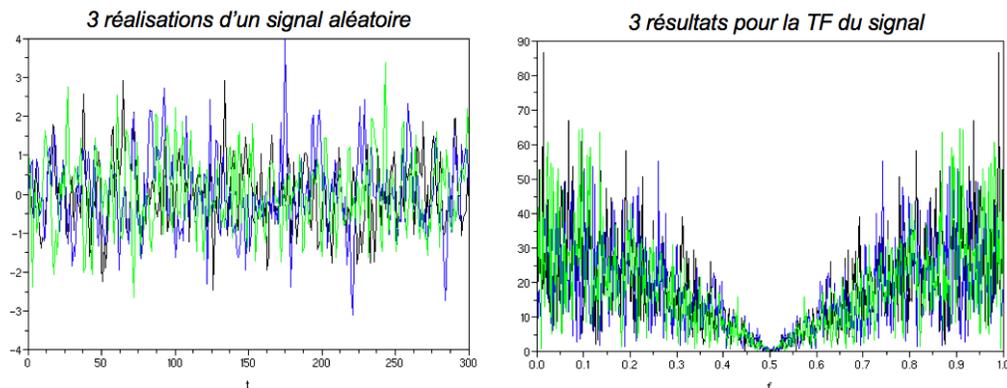


FIG. 14.16 –

On peut en déduire que la TF d'un signal aléatoire n'est pas un élément caractéristique. Ce qu'il nous faudrait, c'est probablement de calculer la moyenne des TF

²Remarque : nous faisons implicitement référence dans cette section au bruit blanc *continu*. Le cas du bruit thermique observé sur une échelle de temps Δt correspond plutôt à un bruit blanc échantillonné donc discret : dans ce cas, la fonction de corrélation est aussi une fonction discrète et vaut σ_{bb}^2 en zéro, zéro partout ailleurs.

d'un grand nombre de réalisations du même signal. C'est une solution pratique à laquelle on va finir par arriver ; mais nous allons suivre ici une autre piste.

Nous pouvons en effet mieux exploiter ce que nous avons fait jusqu'ici pour l'étude des signaux aléatoires, et nous dire que nous avons déjà un outil statistique qui contient de l'information par exemple sur la répétition du signal : c'est la fonction de corrélation. Cette fonction du temps présente en effet des oscillations caractéristiques si le signal contient des périodicités cachées, décroît à une vitesse caractéristique de la perte de mémoire dans le signal : on peut donc se dire que la **TF de la fonction de corrélation** pourrait être un bon candidat pour obtenir une sorte de spectre du signal, car on peut s'attendre à des pics caractéristiques de ses oscillations, à une TF d'autant plus étroite que la fonction de corrélation est étendue dans le temps... Voyons donc qu'est-ce qu'on peut obtenir.

14.5.1 La densité spectrale de puissance (DSP)

Définissons la **Densité Spectrale de Puissance (DSP)** d'un signal aléatoire $X(t)$ comme la fonction de la fréquence f donnée par la TF de la fonction de corrélation du signal :

$$S_{xx}(f) = TF[\varphi_{xx}(\tau)] \quad \text{DSP de } x(t). \quad (14.30)$$

Les deux **propriétés principales de la DSP** suivent directement de celles de $\varphi_{xx}(\tau)$:

- $S_{xx}(f) = S_{xx}(-f)$:
La DSP est une fonction paire ;
- $S_{xx}(f) > 0 \forall f$:
La DSP est toujours positive.

la figure 14.17 montre schématiquement quelques exemples de TF de fonctions de corrélation mettant en évidence les caractéristiques typiques de la DSP : comme nous l'avons prévu, elle présente des pics en présence de périodicité de la fonction de corrélation (et donc du signal) ; sa largeur est inversement proportionnelle à la largeur de la fonction de corrélation et donc de la durée de corrélation caractéristique du signal. En général, la DSP tombe à zéro pour $f \rightarrow \infty$, comme conséquence de la présence d'une vitesse maximale de variation de $\varphi_{xx}(\tau)$, ce qui permet de définir une largeur de bande. Il y a cependant une exception importante à ce comportement et c'est le cas où la fonction de corrélation présente une variation infiniment rapide : c'est le cas du bruit blanc, pour lequel

$$\varphi_{bb}(\tau) = \gamma\delta(\tau) \Rightarrow S_{bb}(f) = \gamma \quad \text{DSP de } b(t). \quad (14.31)$$

Le bruit blanc a une densité spectrale de puissance plate, constante : d'ici vient son nom, par analogie avec la lumière blanche, où toutes les fréquences sont également représentées avec la même intensité.

14.6 Théorème de Wiener-Khintchine

Mais pourquoi la TF de la fonction de corrélation s'appelle-t-elle *sité spectrale de puissance*

» ?

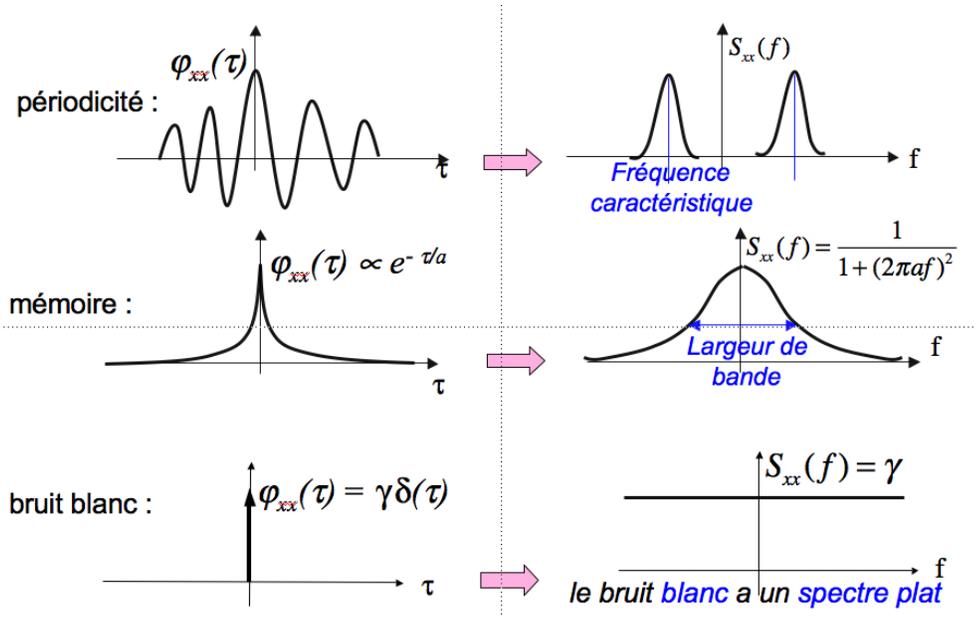


FIG. 14.17 –

Pouvons nous montrer que $S_{xx}(f)$ contient bien l'information sur comment la *puissance* (l'énergie) du signal est distribuée entre les différents modes d'oscillation, les différentes fréquences? C'est vraiment un *spectre*, au sens où nous l'avons entendu jusqu'à maintenant?

La réponse à ces questions - affirmative! - vient d'un théorème important que nous allons énoncer sans démonstration, et qui va nous permettre de réinterpréter la DSP.

Théorème de Wiener-Khinchine. Soit $x(t)$ un signal ergodique, stationnaire et centré (tel que $\bar{x} = 0$)³. On peut alors prouver que

$$TF[\varphi_{bb}(\tau)] \equiv S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T x(t) e^{-i2\pi ft} dt \right|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \quad (14.32)$$

où $X_T(f)$ est la TF de $x(t)$ limitée à l'intervalle $[0, T]$:

$$\begin{aligned} X_T(f) &= TF[x_T(t)], \\ x_T(t) &= x(t) \text{Rect}(0 \text{ à } T). \end{aligned}$$

14.6.1 DSP et puissance

Le théorème de Wiener-Khinchine est important pour deux raisons. La première vient de la relation de Parseval, qui nous dit que l'**énergie** d'un signal s'écrit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt.$$

³Si le signal n'est pas centré on pourra toujours le centrer en soustrayant sa valeur moyenne, $x(t) - \bar{x}$ centré.

On peut alors appliquer le théorème de Parseval à la fonction limitée $x_T(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 dt,$$

puis diviser par T et faire la limite pour $T \rightarrow \infty$: on obtient

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 dt :$$

en supposant de pouvoir inverser la limite avec l'intégration (vrai dans la plupart des cas), on reconnaît dans le premier terme l'intégrale de la DSP de $x(t)$, dans le deuxième la puissance $P(x)$ de $x(t)$, car

$$P(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \quad (14.33)$$

et on considère que le signal $x(t)$ est nul pour $t < 0$. On obtient donc au final

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S_{xx}(f)|^2 df = P(x) : \quad (14.34)$$

la densité spectrale de puissance porte donc bien son nom ! Il s'agit bien de la **distribution de la puissance du signal parmi les différentes fréquences** ; en d'autres mots $|S_{xx}(f)|^2$ est la fraction de puissance qui est engagée sur le mode d'oscillation de fréquence f . Le théorème de Wiener-Khintchine permet d'interpréter la DSP comme une distribution de puissance.

Une dernière considération utile. On reconnaît, dans la puissance définie par l'Equation (14.35), la moyenne temporelle du module carré du signal $x(t)$, effectuée sur une durée T . Comme le signal est ergodique, cette moyenne coïncide avec la moyenne d'ensemble de $|x(t)|^2$, et donc avec la **variance** du signal. D'autre part, nous savons que la variance est égale à la valeur de la **fonction de corrélation** en $t = 0$.

On a donc, pour tout signal $x(t)$ (stationnaire et ergodique), la série de relations suivante entre DSP, puissance, variance et fonction de corrélation :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S_{xx}(f)|^2 df = P(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sigma_x^2 = \varphi_{xx}(0). \quad (14.35)$$

Il est utile de se rappeler ces relations lorsqu'on veut calculer une de ces grandeurs !

14.6.2 Estimateurs de la DSP : le périodogramme

D'autre part, le théorème de Wiener-Khintchine nous a permis de relier la DSP, que nous avons défini initialement comme la TF de la fonction de corrélation, à la TF du signal lui-même. De manière exacte, la DSP s'écrit selon l'équation 14.32 comme

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2,$$

c'est à dire comme le rapport entre le module carré de la TF du signal et sa durée, pour une **durée infinie**.

Pratiquement, lorsqu'on analyse le signal issu d'une mesure, on aura affaire à un signal de durée limitée : tout ce qu'on pourra calculer est alors la grandeur

$$\frac{1}{T}|X_T(f)|^2, \quad (14.36)$$

avec T la durée du signal. Le théorème de Wiener-Khintchine nous permet de comprendre que la DSP est bien liée à la TF du signal de la même manière que la puissance pour un signal déterministe : c'est le **module carré de la TF du signal** qui est **associé à sa distribution de puissance**. Pour un signal de durée finie, cependant, la grandeur de l'équation 14.36 peut être considérée comme un **estimateur** de la DSP, mais, comme nous l'avons vu, il ne contiendra pas beaucoup d'information, surtout pour des durées T pas très importantes.

On peut cependant améliorer la statistique en recourant à une **moyenne d'ensemble** : en moyennant $\frac{1}{T}|X_T(f)|^2$ sur plusieurs réalisations du signal, on obtient ce qu'on appelle le **périodogramme** :

$$\text{Périodogramme} = \langle \frac{1}{T}|X_T(f)|^2 \rangle_{N \text{ réalisations}} \sim S_{xx}(f).$$

La moyenne sur plusieurs réalisation

pense

»

partiellement la durée finie du signal enregistré (ergodique) et permet de mieux approcher la limite théorique de définition de la DSP.

De la même manière, on peut obtenir une estimation raisonnable de la fonction de corrélation d'un enregistrement de durée limité d'un signal en moyennant sur plusieurs réalisation. Cela s'appelle le **corrélogramme** :

$$\text{Corrélogramme} = \langle \varphi_{x_T x_T}(t) \rangle_{N \text{ réalisations}} \sim \varphi_{xx}(t).$$

la figure 14.18 montre un exemple d'utilisation de périodogramme et corrélogramme sur un signal aléatoire construit de manière à contenir une partie corrélié. On voit bien comment, à l'augmenter du nombre de réalisations, les estimateurs approchent de mieux en mieux leur limite théorique (une fonction triangle pour la fonction de corrélation, d'où un sinus cardinal carré pour la DSP).

14.6.3 Spectres des signaux aléatoires et des signaux déterministes

Une dernière remarque s'impose à propos de ces définitions et des définitions qu'on a pu introduire dans les cours précédents à propos des signaux déterministes. Nous venons de voir que la DSP est bien une distribution de puissance parmi les différentes fréquences, et représente donc le spectre du signal aléatoire, au même sens que le module carré de la TF d'un signal déterministe représente son spectre d'énergie (cours 4). On a donc écrit, d'une part, pour un signal $x(t)$ **déterministe**

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df,$$

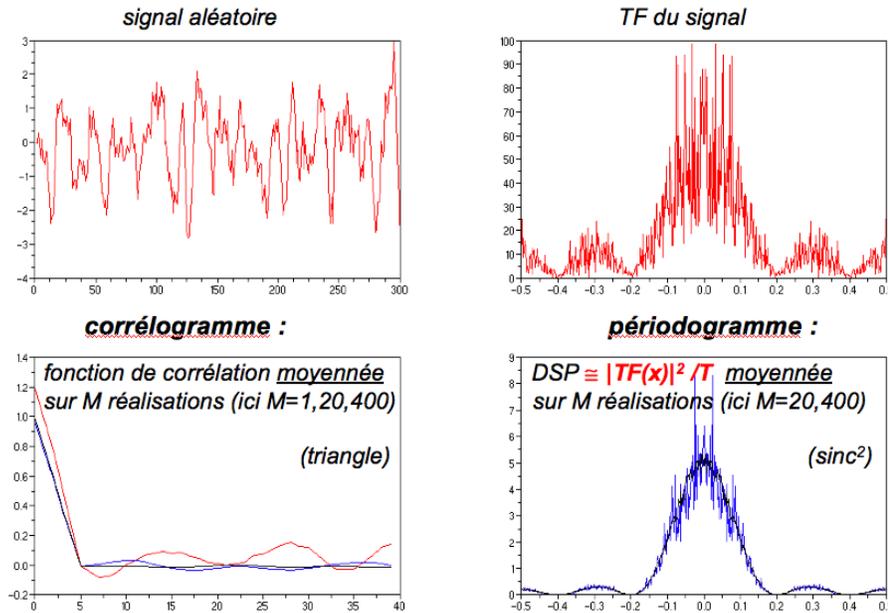


FIG. 14.18 –

et d'autre part ici, pour un signal $x(t)$ **aléatoire**, nous avons

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S_{xx}(f)|^2 df$$

avec

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2.$$

Compte tenu de fait que la DSP est homogène à une transformée de Fourier au carré divisée par un temps, et que la puissance est une énergie par unité de temps, Les deux définitions sont donc complètement cohérentes, ce qui nous autorise, le cas échéant, à calculer une DSP aussi pour un signal déterministe, de la même manière que pour un signal aléatoire, pour en obtenir la densité spectrale de puissance. Evidemment, dans ce cas, il n'est plus nécessaire de faire intervenir une évaluation statistique de cette grandeur : par exemple pour obtenir une bonne estimation de la DSP, on obtiendra exactement le même résultat avec une seule réalisation qu'en faisant une moyenne sur plusieurs réalisations (de faire un périodogramme).

Il peut aussi être utile de rappeler ici comment calculer ces grandeurs **pour un signal échantillonné** x_k , $k = 0 \dots N - 1$. Nous avons déjà vu la quel relation entre la TF $X(f)$ et la transformée de Fourier rapide (discrète) ou FFT $X_D(f)$ fait intervenir le pas d'échantillonnage Δt ,

$$X(f) = X_D(f) \Delta t \quad (\text{défini pour les } f = f_n, n = 0 \dots N - 1) \quad (14.37)$$

et que par conséquent on a

$$E = \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2 \Delta t = \sum_{n=0}^{N-1} |X_D(f_n)|^2 \Delta t^2 \Delta f = \sum_{n=0}^{N-1} |X_D(f_n)|^2 \frac{\Delta t}{N} \quad (14.38)$$

(car $\Delta f = 1/T_e = 1/N \Delta t$). La DSP (son estimateur) s'obtient donc en divisant le module carré de la TF pour la durée du signal échantillonné, $T_e = N \Delta t$:

$$S_{xx}(f_n) = \frac{1}{N \Delta t} |X_D(f_n) \Delta t|^2 = \frac{\Delta t}{N} |X_D(f_n)|^2 \quad (14.39)$$

et la puissance en intégrant la DSP sur la fréquence, ou bien en divisant l'énergie par T_e . Le résultat est le même :

$$P = \frac{1}{T_e} \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2 \Delta t = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} |X_D(f_n)|^2. \quad (14.40)$$

14.7 Et pour conclure... Réponse d'un système linéaire à un signal aléatoire

Notre dernière question réunit l'étude des signaux aléatoire et le problème qui a fait de fil conducteur pour tout le cours : la réponse d'un système physique linéaire à une signal. Considérons donc la réponse d'un système linéaire,

$$\begin{array}{ccccc} e(t) = x(t) & \rightarrow & \boxed{\text{EDL}} & \rightarrow & s(t) = y(t) \\ \text{entrée} & & = & & \text{sortie} \\ & & H(p) \text{ ou } H(f), & & \\ & & h(t) & & \end{array}$$

pour un signal d'entrée $x(t)$ **aléatoire**, avec $H(p)$ la transmittance et $h(t)$ la réponse impulsionnelle associés à l'EDL du système. Que peut-on dire de la sortie $y(t)$?

- Le signal en sortie $y(t)$ est aussi un signal **aléatoire**. Le caractère probabiliste du signal en entrée est nécessairement transmis à la sortie : si l'entrée est imprévisible, la sortie le sera aussi. Il faudra donc caractériser $y(t)$ de manière statistique, de même que pour $x(t)$, en étudiant les grandeurs qu'on a développé en ce cours.
- On sait aussi que la relation entre entrée et sortie que nous avons construit pour le système linéaire n'ont pas changé : on a toujours

$$y(t) = x * h(t), \quad (14.41)$$

$$Y_L(p) = X_L(p)H(p). \quad (14.42)$$

A partir de ces relation il est donc possible de lier les caractéristiques de $y(t)$ à celles de $x(t)$. Nous n'allons pas rentrer dans ces calculs qui sont parfois un peu lourds, mais nous allons voir les quelques résultats importants qu'ils permettent d'obtenir.

- Premièrement, on montre que

$$\text{Si } \bar{x}(t) = \bar{x} = \text{constante, alors } \bar{y}(t) = H(0) \bar{x} : \quad (14.43)$$

la valeurs de la transmittance en zéro permet d'obtenir la **valeur moyenne** de $y(t)$ à partir de celle de $x(t)$.

- Plus important encore, on a pour la **fonction de corrélation** et pour la **DSP** deux relations liées l'une à l'autre :

$$\varphi_{yy}(\tau) = \varphi_{xx}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \quad (14.44)$$

et

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f) |H(f)|^2. \quad (14.45)$$

Remarquons que, les deux grandeurs statistiques étant liées au carré du signal, les fonctions de passage de $x(t)$ à $y(t)$, $h(t)$ et $H(f)$, interviennent à la puissance 2 dans ces formules⁴.

Ces résultats sont très importants et vous les utiliserez à la fois en TD et en TP.

Example. Considérons par exemple le cas où le signal en entrée est un bruit blanc $b(t)$. Sa DSP est donc une fonction constante. Si le système physique est caractérisé par une transmittance $H(f)$ qui décroît comme $1/f$, alors, en sortie, on aura un signal tel que

$$S_{yy}(f) = \text{constante} |H(f)|^2 \sim 1/f^2 :$$

il ne s'agit donc plus d'un bruit blanc mais d'un bruit dont la DSP décroît comme $1/f^2$, ce qu'on appelle un «bruit rouge»

car il est plus centré sur les basses fréquences.

On voit bien dans cet exemple que le passage du bruit à travers le système physique correspond à un **filtrage** : on peut éliminer une partie du bruit, celle à haute fréquence, par ce biais. On comprend donc tout de suite l'intérêt d'une telle opération dans le cas où on souhaite détecter un signal dans du bruit : mais comment les choses se passent-elles exactement ?

14.7.1 Filtrage d'un signal bruité

Considérons donc le cas d'un signal

» $z(t)$ mélangé avec un bruit $b(t)$ (qu'on va appeler $b(t)$ même s'il ne s'agit pas nécessairement d'un bruit blanc dans ce cas). Faisons, de plus, l'hypothèse que le bruit

⁴On peut rappeler, juste pour donner une justification de ces résultats qui peut aider à les mémoriser, que la fonction de corrélation de $y(t)$ se détermine, par définition, en calculant l'espérance mathématique $E[y(0)y(\tau)]$ qui devient donc compte tenu de l'équation (14.41) : $\varphi_{yy}(\tau) = E[x * h(0) x * h(\tau)]$. Dans cette expression il y a donc un produit de deux convolution, et le résultat contient donc deux fois x et deux fois h . Comme $\varphi_{xx}(\tau) = E[x(0) x(\tau)]$ est aussi homogène au carré de $x(t)$, il est raisonnable d'avoir à la fin pour $\varphi_{yy}(\tau)$ une expression contenant $\varphi_{xx}(\tau)$ multipliée deux fois par $h(\pm\tau)$. Le même raisonnement peut être fait par la DSP.

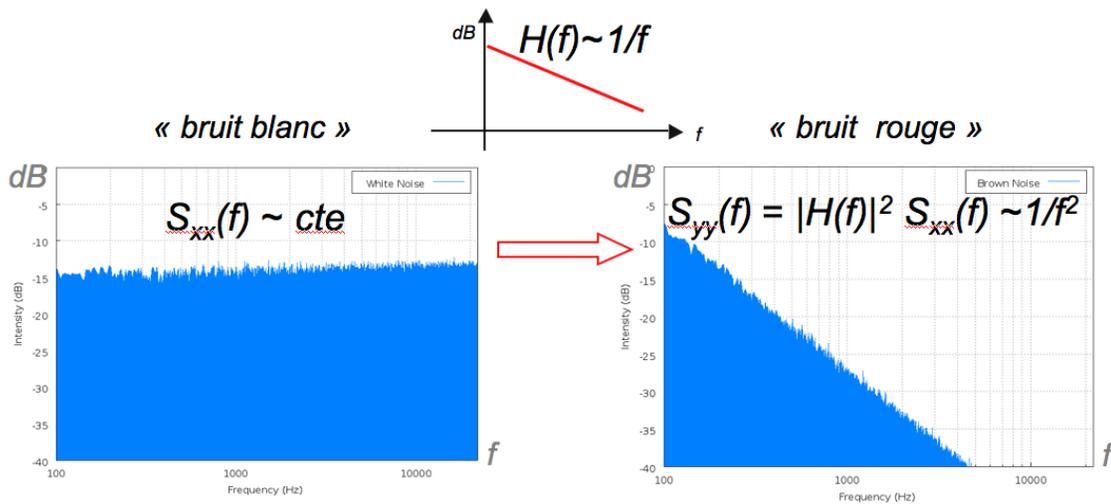


FIG. 14.19 –

soit **indépendant** du signal et **additif**, c'est-à-dire qu'il se somme simplement au signal : on a donc en entrée un signal

$$x(t) = z(t) + b(t). \quad (14.46)$$

Une question se pose tout de suite : quelles sont les caractéristique du signal somme $x(t)$? Dans les hypothèses que nous avons faites, la **linéarité** du système vient en notre secours :

- Si $z(t)$ et $w(t)$ sont deux signaux statistiquement indépendants, alors pour $x(t) = z(t) + w(t)$ on a

$$S_{xx}(f) = S_{zz}(f) + S_{ww}(f) \quad (14.47)$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{zz}(\tau) + \varphi_{ww}(\tau) : \quad (14.48)$$

DSP et fonction de corrélation se somment pour la somme de deux signaux indépendants. Nous avons utilisé ici les notations z et w pour signifier que ces relations sont valables pour deux signaux quelconques.

Le spectre du signal somme est donc simplement la somme des deux spectres : par exemple si on somme un signal harmonique de fréquence f_0 donné à un bruit blanc et qu'on calcule la DSP du signal obtenu, on obtient la somme des des DSP, c'est à dire un spectre constant plus un pic à la fréquence f_0 qu'on voit
 » du spectre plat.

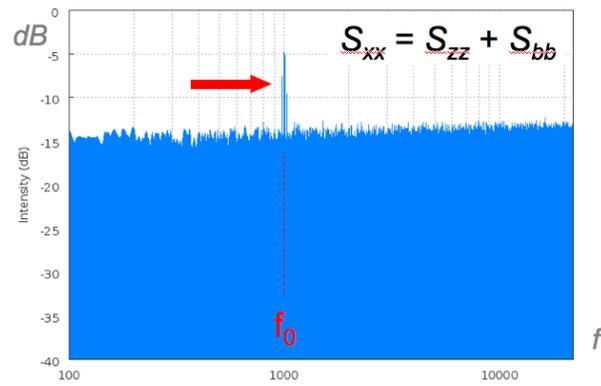


FIG. 14.20 –

A Dictionnaire

TAB. 1 – TF et TL des principales fonctions.

$x(t)$	$TL[x(t)]$ $= X_L(p)$	Intervalle de validité	$TF[x(t)]$ $= X(\omega)$	$TF[x(t)]$ $= X(f)$	Commentaires
$\delta(t)$	1	\mathbb{R}	$j\omega$	$j2\pi f$	
$\delta^{(n)}(t)$	p^n	\mathbb{R}	$(j\omega)^n$	$(j2\pi f)^n$	$\delta^{(n)}(t)$ = dérivée n -ième de $\delta(t)$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2-p^2}$	$] -a, +a[$, $a > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$	la TF existe pour $a > 0$
1	$2\pi\delta(\frac{p}{j})$	\emptyset	$2\pi\delta(\omega)$	$\delta(f)$	Transformée au sens des distributions (a.s.d.d.)
signe(t) $= +1 \forall t > 0$ $= -1 \forall t < 0$	$\frac{2}{p}$	\emptyset	$VP(\frac{2}{j\omega})$	$VP(\frac{1}{j2\pi f})$	$VP(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$ $VP(\frac{1}{x}) = 0$ pour $x = 0$ Transformées a.s.d.d.
$e^{j\omega_0 t}$ $\omega_0 = 2\pi f$	$2\pi\delta(\frac{p}{j} - \omega_0)$	\emptyset	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$2\pi\delta(f - f_0)$	Transformées a.s.d.d.
$\cos(\omega_0 t)$ $\omega_0 = 2\pi f$	$\pi\delta(\frac{p}{j} - \omega_0)$ $+ \pi\delta(\frac{p}{j} + \omega_0)$	\emptyset	$\pi\delta(\omega - \omega_0)$ $+ \pi\delta(\omega + \omega_0)$	$\frac{1}{2}\delta(f - f_0)$ $+ \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$	Transformées a.s.d.d.
$\sin(\omega_0 t)$ $\omega_0 = 2\pi f$	$\frac{\pi}{j}\delta(\frac{p}{j} - \omega_0)$ $- \frac{\pi}{j}\delta(\frac{p}{j} + \omega_0)$	\emptyset	$\frac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_0)$ $- \frac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_0)$	$\frac{1}{2j}\delta(f - f_0)$ $- \frac{1}{2j}\delta(f + f_0)$	Transformées a.s.d.d.
$e^{-\pi(t/\tau)^2}$ $\omega_0 = 2\pi f$	$\tau e^{(pt)^2/(4\pi)}$	\mathbb{R}	$\tau e^{-(\omega\tau)^2/(4\pi)}$	$\tau e^{-\pi(f\tau)^2}$	$x(t)$ = fonction de Gauss
Rect(t/T) $= 1 \forall t \in [-T, T]$ $= 0$ ailleurs	$2T \operatorname{sinc}(\frac{pT}{j})$	\mathbb{R}	$2T \operatorname{sinc}(\omega T)$	$2T \operatorname{sinc}(2\pi f T)$	$x(t)$ = fonction rectangle $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$
$\Gamma(t)$ $= 1 \forall t \geq 0$	$\frac{1}{p}$	\mathbb{R}^+	$VP(\frac{1}{j\omega}) + \pi\delta(j\omega)$	$VP(\frac{1}{j2\pi f}) + \frac{1}{2}\delta(f)$	TF a.s.d.d. $VP(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$ $VP(\frac{1}{x}) = 0$ pour $x = 0$
$e^{p_0 t} \Gamma(t)$	$\frac{1}{p-p_0}$	$] \operatorname{Re}(p_0), +\infty[$	$\frac{1}{j\omega-p_0}$	$\frac{1}{j2\pi f-p_0}$	la TF existe a.s.d.f. pour $\operatorname{Re}(p_0) < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \Gamma(t)$	$\frac{1}{p^n}$	\mathbb{R}^+	$VP(\frac{1}{(j\omega)^n})$ $+ \frac{j^{(n-1)}}{(n-1)!} \pi \delta^{(n-1)}(\omega)$	$VP(\frac{1}{(j2\pi f)^n})$ $+ \frac{(j/2\pi)^{(n-1)}}{(n-1)!} \pi \delta^{(n-1)}(f)$	TF a.s.d.d. $VP(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$, $VP(\frac{1}{x}) = 0$ pour $x = 0$
$e^{-at} \Gamma(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$] -a, +\infty[$	$\frac{1}{j\omega+a}$	$\frac{1}{j2\pi f+a}$	la TF existe a.s.d.f. si $a > 0$
$t e^{-at} \Gamma(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$] -a, +\infty[$	$\frac{1}{(j\omega+a)^2}$	$\frac{1}{(j2\pi f+a)^2}$	la TF existe a.s.d.f. si $a > 0$
$\sin(\omega_0 t) \Gamma(t)$ $\omega_0 = 2\pi f$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	\mathbb{R}^+	$VP(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}) +$ $\frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$\frac{1}{2} VP(\frac{j\omega_0}{f_0^2 - f^2}) +$ $\frac{1}{4j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$	TF a.s.d.d. $VP(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$, $VP(\frac{1}{x}) = 0$ pour $x = 0$
$\cos(\omega_0 t) \Gamma(t)$ $\omega_0 = 2\pi f$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$	\mathbb{R}^+	$VP(\frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}) +$ $\frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$\frac{1}{2} VP(\frac{f}{f_0^2 - f^2}) +$ $\frac{1}{4} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$	TF a.s.d.d. $VP(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$, $VP(\frac{1}{x}) = 0$ pour $x = 0$
$e^{j\omega_0 t} \Gamma(t)$	$\frac{1}{p-j\omega_0}$	\mathbb{R}^+	$VP(\frac{1}{j\omega-j\omega_0}) +$ $\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$\frac{1}{j2\pi} VP(\frac{1}{f-f_0}) +$ $\frac{1}{2}\delta(f - f_0)$	$VP(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$, $VP(\frac{1}{x}) = 0$ pour $x = 0$
$e^{-at} \sin(\omega_0 t) \Gamma(t)$	$\frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$	$] -a, +\infty[$	$\frac{\omega_0}{(j\omega+a)^2 + \omega_0^2}$	$\frac{2\pi f_0}{(j2\pi f+a)^2 + 2\pi f_0^2}$	la TF existe a.s.d.f. pour $a > 0$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t) \Gamma(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$	$] -a, +\infty[$	$\frac{j\omega+a}{(j\omega+a)^2 + \omega_0^2}$	$\frac{j2\pi f}{(j2\pi f+a)^2 + 2\pi f_0^2}$	la TF existe a.s.d.f. pour $a > 0$

B Principales propriétés des TF et TL

	Transformée de Laplace ⁽¹⁾	Transformée de Fourier ⁽²⁾
dualité	//	$TF[x(t)] = X(\omega) \Rightarrow TF[X(t)] = x(-\omega)$
linéarité	$TL[a \cdot x(t) + b \cdot y(t)] = a \cdot X_L(p) + b \cdot Y_L(p)$	$TF[a \cdot x(t) + b \cdot y(t)] = a \cdot X(\omega) + b \cdot Y(\omega)$
translation	$TL[x(t - t_0)] = X_L(p) \cdot e^{-pt_0}$	$TF[x(t - t_0)] = X(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$
modulation	$TL[x(t) \cdot e^{p_0 t}] = X_L(p - p_0)$	$TF[x(t) \cdot e^{j\omega_0 t}] = X(\omega - \omega_0)$
	$TL[x(t) \cdot \cos(\omega_0 t)] = [X_L(p + p_0) + X_L(p - p_0)] / 2$ $TL[x(t) \cdot \sin(\omega_0 t)] = j [X_L(p + p_0) - X_L(p - p_0)] / 2$	$TF[x(t) \cdot \cos(\omega_0 t)] = [X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)] / 2$ $TF[x(t) \cdot \sin(\omega_0 t)] = j [X(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0)] / 2$
changement d'échelle	$TL[x(at)] = \frac{1}{ a } \cdot X_L(p/a)$	$TF[x(at)] = \frac{1}{ a } \cdot X(\omega/a)$
conjugaison	$TL[\overline{x(t)}] = \overline{X_L(p)}$	$TF[\overline{x(t)}] = \overline{X(-j\omega)}$
théorème de Parseval ⁽³⁾	//	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) ^2 d\omega$

FIG. 1 – Principales propriétés des TF et TL.