

Contrôle 1

Durée : 2 heures

Les calculatrices et tous les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les copies ne sont pas anonymes ; vous devez marquer votre nom sur toutes vos copies.

Le sujet consiste en un problème (I), lui-même divisé en deux parties indépendantes (A et B), et un exercice (II). Dans tous les calculs, on donnera toujours les expressions littérales avant d'effectuer, s'il y a lieu, les calculs numériques.

I. Mélange de gaz parfaits

Une enceinte étanche contenant un mélange de gaz parfaits est fermée par un piston mobile dont la masse est suffisamment faible pour pouvoir être négligée. Les parois de l'enceinte et le piston sont des isolants thermiques parfaits. Le mélange gazeux est composé de x moles d'hélium (He, gaz monoatomique, de capacité calorifique molaire à volume constant $C_{V\text{He}}$) et de $(n - x)$ moles d'azote (N_2 , gaz diatomique, de capacité $C_{V\text{N}_2}$). La température initiale vaut $T_1 = 300$ K. Une petite résistance chauffante est plongée dans l'enceinte.

Données :

- Constante des gaz parfaits : $R = 25/3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- $\ln 2 = 0,7$.
- Nombre de micro-états que peut prendre un gaz parfait :

$$\Omega = CV^N U^{\alpha N},$$

où V est le volume, U l'énergie interne, N le nombre de molécules, C une constante (qui n'a rien à voir avec les capacités calorifiques) et $\alpha = C_V/R$.

A. Échauffement

Le volume initial occupé par le mélange gazeux est $V_1 = 25$ L. Le système est en équilibre à la pression ambiante $P_0 = 10^5$ Pa, constante durant toute l'expérience.

1. Calculer le nombre n de moles de gaz contenu dans le récipient.
2. À l'aide de la petite résistance, on chauffe très lentement le gaz jusqu'à une température finale $T_2 = 600$ K. Le gaz est en permanence en équilibre thermique avec la résistance. Quelle est la nature de la transformation ?
3. Exprimer le volume final V_2 du mélange gazeux en fonction de T_2 . Calculer V_2 . Représenter graphiquement la transformation dans le diagramme (V, P) .
4. Exprimer, en fonction de n , R et $\Delta T_{12} = T_2 - T_1$, le travail W_{g12} échangé par le gaz avec l'extérieur par l'intermédiaire du piston. Justifier son signe. Calculer W_{g12} .

5. En utilisant l'expression de la capacité calorifique molaire à volume constant C_V d'un gaz parfait et la relation de Mayer, montrer que les capacités calorifiques molaires à pression constante de l'hélium et de l'azote valent $C_{P\text{He}} = \frac{5}{2}R$ et $C_{P\text{N}_2} = \frac{7}{2}R$.
6. Exprimer, en fonction de n , x , R et ΔT_{12} , les quantités de chaleur $Q_{\text{He}12}$ et Q_{N_212} échangées par chaque type de gaz, puis la quantité de chaleur $Q_{\text{g}12}$ totale échangée avec l'extérieur par l'intermédiaire de la résistance. En déduire l'expression de x en fonction de $Q_{\text{g}12}$, n , R et ΔT_{12} .
7. La quantité de chaleur fournie par la résistance étant de 7500 J, calculer x .
8. Donner les expressions, en fonction de n , x , R et ΔT_{12} , de la variation de l'énergie interne $\Delta U_{\text{He}12}$ et ΔU_{N_212} de chaque gaz, puis $\Delta U_{\text{g}12}$, celle du mélange. Vérifier le premier principe. Calculer $\Delta U_{\text{g}12}$.
9. Donner l'expression de la variation élémentaire d'entropie dS en fonction de la quantité de chaleur infinitésimale δQ . En déduire, en fonction de n , x , R , T_1 et T_2 , les expressions $\Delta S_{\text{He}12}$ et ΔS_{N_212} des variations d'entropie de chaque gaz, puis la variation d'entropie $\Delta S_{\text{g}12}$ du mélange. Calculer $\Delta S_{\text{g}12}$.
10. A priori, sans calculer la variation d'entropie du milieu extérieur, pensez-vous que la transformation soit réversible?
11. Rappeler la relation entre l'entropie et le nombre de micro-états Ω que peut prendre un système. En déduire $\Delta S_{\text{He}12}$, ΔS_{N_212} , puis $\Delta S_{\text{g}12}$ en fonction de n , x , R , T_1 et T_2 . Retrouve-t-on les résultats de la question 9?
12. En utilisant le fait que l'entropie est une fonction d'état additive, trouver une relation entre Ω_{g} , Ω_{He} et Ω_{N_2} , le nombre de micro-états que peuvent prendre le mélange, l'hélium et l'azote respectivement.

B. Refroidissement

On décide de bloquer le piston à sa position actuelle. On arrête de chauffer l'enceinte avec la petite résistance. Le volume est $V_2 = 50$ L et la pression dans l'enceinte est $P_2 = 10^5$ Pa. On a 1 mole de mélange gazeux dans l'enceinte à la température $T_2 = 600$ K.

L'extérieur est un thermostat à la température $T_3 = 300$ K. Si l'on attend suffisamment longtemps, on ne peut plus considérer les parois comme des isolants parfaits et la température du gaz décroît jusqu'à atteindre T_3 . La pression du mélange gazeux est alors P_3 .

1. Quelle est la nature de la transformation subie par le système? Soyez complet.
2. Calculer la pression P_3 du mélange gazeux.
3. Exprimer la variation d'énergie interne $\Delta U_{\text{g}23}$ du mélange gazeux en fonction de n , x , R et $\Delta T_{\text{g}23} = T_3 - T_2$. Calculer $\Delta U_{\text{g}23}$ pour $x = 0,5$ mol.
4. Exprimer le travail $W_{\text{g}23}$ échangé par le mélange au cours de la transformation.
5. En utilisant le premier principe, exprimer puis calculer la quantité de chaleur $Q_{\text{g}23}$ échangée par le mélange au cours de la transformation.
6. Exprimer la variation d'entropie de l'hélium $\Delta S_{\text{He}23}$, de l'azote ΔS_{N_223} et du mélange $\Delta S_{\text{g}23}$ en fonction de n , x , R , T_2 et T_3 . Calculer la variation d'entropie $\Delta S_{\text{g}23}$ du mélange pour $x = 0,5$ mol.
7. Exprimer la variation d'entropie de l'extérieur, $\Delta S_{\text{ext}23}$.

8. Exprimer puis calculer la variation d'entropie totale $\Delta S_{\text{tot}23}$. La transformation est-elle réversible?

II. Distribution des vitesses dans un gaz parfait

On étudie la distribution des vitesses (en norme) des molécules d'un gaz parfait. La probabilité qu'une molécule ait une vitesse w comprise entre v et $v + dv$ vaut

$$\mathcal{P}(v \leq w \leq v + dv) = f(v)dv = Cv^2 \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right) dv,$$

où m est la masse de la molécule, k la constante de Boltzmann et T la température.

La constante $C = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}$ est telle que $\int_0^{+\infty} f(v)dv = 1$.

Données :

- Masse molaire de l'hélium : $M = 4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.
 - $\sqrt{5} = 2,2$; $\sqrt{2} = 1,41$; $e^{-1}/\sqrt{\pi} = 0,21$.
1. Donner l'allure de la courbe de $f(v)$ et montrer qu'elle présente un maximum pour une vitesse v_m , vitesse la plus probable des molécules du gaz.
 2. Expliciter v_m en fonction de m , k et T , puis en fonction de la masse molaire M , de la constante des gaz parfaits R et de T .
 3. Exprimer la vitesse la plus probable v_m pour les molécules d'hélium. Calculer v_m à la température $T = 300 \text{ K}$.
 4. On veut calculer la probabilité $\mathcal{P}(0 \leq w \leq v_m)$ qu'une molécule ait une vitesse w comprise entre 0 et v_m . Exprimer $\mathcal{P}(0 \leq w \leq v_m)$ en fonction de $f(v)dv$.
 5. En faisant le changement de variable $y = v/\sqrt{kT/m}$, montrer que l'on peut écrire cette probabilité sous la forme

$$\mathcal{P}(0 \leq w \leq v_m) = C' \int_0^{\sqrt{2}} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy,$$

où C' est une constante que l'on déterminera.

6. On rappelle que $\int_a^b g'h = \left[gh\right]_a^b - \int_a^b gh'$ (intégration par parties), où g et h sont des fonctions de y , et g' et h' sont leur dérivée. On pose $g' = y \exp(-y^2/2)$. Exprimer g . Montrer que $\int_0^{v_m} f(v)dv$ peut s'écrire comme la somme d'une constante A et d'une intégrale I que l'on déterminera toutes les deux.
7. Montrer que l'on peut calculer $I = C' \int_0^{\sqrt{2}} \exp(-y^2/2)dy$ à partir de l'intégrale de la loi normale centrée réduite (voir feuille ci-jointe). Bien noter que la borne inférieure de l'intégrale de la loi normale est $-\infty$.
8. Que vaut $\mathcal{P}(0 \leq w \leq v_m)$ pour des molécules d'hélium? On utilisera la table de la loi normale centrée réduite pour le calcul de I .
9. Expliquer brièvement pourquoi on ne trouve pas $\mathcal{P}(0 \leq w \leq v_m) = 1/2$.