CMP-hR 6 - révision pour le contrôle : comprendre l'énoncé et résoudre l'exercice

Le but de cette séance est de s'exercer à lire des énoncés qui font référence à des situations physiques dont on n'a pas parlé et à s'y orienter afin de reconnaître les similitudes avec ce qu'on a déjà traité et pouvoir donc l'appliquer pour la résolution de l'exercice.

Rappel de la « stratégie de résolution d'un exercice » :

D'abord bien lire le sujet et en même temps :

1. Faire un **schéma** du système considéré pour bien comprendre le problème ;
2. Ecrire la **liste des grandeurs** connues avec leur nom, leur valeur et l'unité, plus éventuellement les noms des grandeurs encore inconnues ; les notes sur le schéma

En répondant à chaque question ou bloc de questions :

3. bien **identifier** **les hypothèses, les données et les inconnues** ;
4. **établir** des **relations *littérales* entre les variables** : pour cela il faut
    * **connaître** et comprendre les *lois physiques* introduites en cours (« les formules ») et leur domaine d'application
    * **connaître** et maitriser les *formules géométriques* de base (surfaces, volumes… cercle, sphère, cylindre… trigonométrie…)
5. **résoudre** **les relations/équations** pour déterminer (une à une) les inconnues : pour cela il faut
    * savoir ***manipuler*** *des relations littérales* entre grandeurs : simplifier, inverser…
    * connaître les principales *fonctions mathématiques* et leurs propriétés (exponentielle, logarithme, fonctions trigonométriques)
6. **faire** les **applications numériques** demandées : pour cela il faut
    * savoir **mener** des *calculs algébriques*, en **utilisant** les *puissances de 10* de manière appropriée
    * **connaître** les *unités de mesure*, **savoir** changer d'unité et être capable d'utiliser des systèmes d'unités cohérents

Avant de passer à la suite :

7. **vérifier** systématiquement le résultat obtenu : pour cela il faut
    * *savoir **reconnaître** les dimensions* d'une expression et/ou son unité
    * **analyser** le résultat avec *un œil critique* : la grandeur inconnue dépend des autres de manière « logique » ? La valeur numérique est-elle plausible ?

Résoudre l'exercice suivant en deux parties.
Les deux parties sont indépendantes.
Pensez systématiquement à :
faire un schéma ; donner d'abord des expressions littérales ; vérifier vos résultats.
durée : 1h

Partie 1. Chauffer de l'eau

Une masse m = 1 kg d'eau initialement à température T = 25°C est réchauffé à l'aide d'une résistance électrique. La résistance délivre une puissance (énergie par unité de temps) constante P = 30 W. On néglige toute perte d'énergie du système.

On sait que la variation de température ΔT de cette masse d'eau pendant un temps Δt donné est proportionnelle à l'énergie ΔE délivrée pendant ce même temps :

$\Delta T = A\ \Delta E$,

avec $A \approx 0.25\ 10^{-3}$ dans les unités du Système International.

1) Quelles sont les dimensions d'une puissance ?
2) Quelles sont les dimensions de la constante A ?
3) Exprimer la variation de température ΔT en fonction de l'intervalle de temps Δt, puis montrer par un passage à des variations infinitésimales que la température $T(t)$ est solution de l'équation différentielle

   $$\frac{dT(t)}{dt} = K,$$

   où K est une constante que l'on exprimera en fonction des grandeurs du problème. Application numérique.
4) Quelle est la solution $T(t)$ de l'équation différentielle ?
5) Tracer $T(t)$ en faisant apparaître les grandeurs caractéristiques du problème.
6) Au bout de combien de temps la température de l'eau sera de 60°C ?

Partie 2. Refroidir de l'eau

Une masse m = 1 kg d'eau initialement à température T = 60°C est laissée refroidir à l'air libre. La température de la pièce, supposée constante, est T_P = 20°C. On peut montrer que la variation de température ΔT de cette masse d'eau pendant un temps Δt donné est proportionnelle à l'énergie ΔE dissipée (perdue) pendant ce même temps :

$\Delta T = A\ \Delta E$,

où T indique la température de l'eau, et A est une constante ≈ $0.25\ 10^{-3}$ dans les unités du Système International.

D'autre part, la perte d'énergie pendant un temps Δt est proportionnelle à la différence de température entre l'eau et son environnement :

$\Delta E = B\ (T(t) - T_P)\ \Delta t$

où B = 2 S.I. est une constante qui rend compte des échanges thermiques avec l'air.

7) Quelles sont les dimensions de la constante A ?
8) Quelles sont les dimensions de la constante B ?
9) Exprimer la variation de température ΔT en fonction de l'intervalle de temps Δt, puis montrer par un passage à des variations infinitésimales que la **différence de température** $Q(t) = (T(t) - T_P)$ est solution de l'équation différentielle

   $\frac{dQ(t)}{dt} = KQ(t)$. Déterminer la constante K en fonction des grandeurs du problème. Application numérique.
10) Quelle est la solution $Q(t)$ de l'équation différentielle ?
11) Tracer $Q(t)$ en faisant apparaître les grandeurs caractéristiques du problème.
12) Déduire la loi d'évolution de $T(t)$ et la tracer.
13) Au bout de combien de temps la température de l'eau sera de 40°C ?