CMP-hR 2 (cours 2 – chapitre 3/b – évolution temporelle exponentielle)

A. Manipulation d'exposants (« Connaitre »/ « Appliquer »)

Simplifier les expressions suivantes :

1) $\frac{x^3}{x^2}$

2) $\frac{x^{-3}}{x^{-2}}$

3) $\frac{x^2}{x^{-2}}$

4) $\frac{x^a}{x^b}$

5) $x^{1/3}x^{-1/3}$

6) $\frac{x^{-1/2}}{x^{1/2}}$

7) $\frac{x^{-1/a}}{x}$

B. Manipuler les exponentiels et les logarithmes (« Connaitre »/ « Appliquer »)

Evaluer les expressions suivantes (avec exp(x) = e^x , ln(x) = logarithme népérien de x) :

1) ln(a/b)
2) ln(ab)
3) $[\exp(a)]^2$
4) exp(ln(4))
5) exp(ln(4) – ln(2))
6) exp(ln(4) + ln(2))
7) exp(x ln(3))
8) exp(x ln(a))
9) ln(A x^b)
10) ln(A x^{-b})

C. Etudier une fonction exponentielle (« Connaitre »/ « Appliquer »)

Pour chacune des fonctions exponentielles Q(t) suivantes, dire :

(a) Quelle est son ordonnée à l'origine Q_0 (valeur à t=0)
(b) Si elle est croissante ou décroissante
(c) quel est son temps caractéristique τ (tau) tel que $Q(\tau) = Q_0/e$ (e = nombre de Neper)

1) $Q(t) = 10\, e^{-t/10}$
2) $Q(t) = -10\, e^{-t/2}$
3) $Q(t) = e^{t}$
4) $Q(t) = 10\, e^{t}$
5) $Q(t) = A\, e^{-10t}$
6) $Q(t) = A\, e^{10t}$
7) $Q(t) = K\, e^{-t}$
8) $Q(t) = 3\, e^{-2t}$

D. Tracer une fonction exponentielle à coefficients connus (« appliquer »)

Tracer (dans un ou plusieurs graphiques) les fonctions suivantes en fonction de leur variable, *t* :

1) $Q(t) = 10\, e^{-t/10}$
2) $Q(t) = -10\, e^{-t/2}$
3) $Q(t) = e^{t}$
4) $Q(t) = 10\, e^{t}$

F. Tracer une fonction linéaire à coefficients inconnus (« appliquer »)

Tracer (dans un ou plusieurs graphiques) les fonctions suivantes en fonction de leur variable, *t* : **vous assumerez que les paramètres *a* et *B* ont toujours la même valeur pour toutes les fonctions, et vous indiquerez sur les axes les interceptes comme des expressions dépendantes de *a* et *B*.**

1) $Q(t) = B\ e^{-t/a}$
2) $Q(t) = -B\ e^{-t/a}$
3) $Q(t) = B\ e^{-at}$
4) $Q(t) = A + B\ e^{-at}$ avec A une constante positive
5) $Q(t) = -B\ e^{at}$
6) $Q(t) = B\ e^{-2at}$
7) $Q(t) = 2B\ e^{-at}$

G. Equations différentielles du premier ordre évolution éxponentielle (« savoir faire »)

A. Calculer la dérivée de la fonction $Q(t) = Q_0 + kt$ puis de la fonction $Q(t) = Q_0\ e^{kt}$.

B. Calculer la valeur en *t = 0* de la fonction $Q(t) = Q_0 + kt$ puis de la fonction $Q(t) = Q_0\ e^{kt}$.

C. Quelle est la fonction *Q(t)* du temps *t* qui est solution de chacune des équations différentielles suivantes ? L'exprimer en fonction des paramètres et constantes donnés dans l'expression.

On supposera $k > 0$, $A > 0$.

1) $\dfrac{dQ(t)}{dt} = kQ(t)$, avec conditions initiales $Q(0) = A$
2) $\dfrac{dQ(t)}{dt} = k$, avec conditions initiales $Q(0) = A$
3) $\dfrac{dQ(t)}{dt} = -kQ(t)$, avec conditions initiales $Q(0) = -A$
4) $\dfrac{dQ(t)}{dt} = 2$, avec conditions initiales $Q(0) = -A$
5) $\dfrac{dQ(t)}{dt} = -2$, avec conditions initiales $Q(0) = 3$
6) $\dfrac{dQ(t)}{dt} = -2Q(t)$, avec conditions initiales $Q(0) = 3$

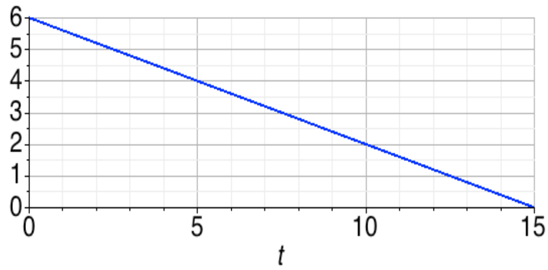
Exercices complémentaires

Dérivation

Vous devez savoir calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = ae^{bx}$
2) $f(x) = ax+b$
3) $f(x) = \cos(2x)$
4) $f(x) = \cos(x)$
5) $f(x) = e^{x}$
6) $f(x) = \sin(ax)$
7) $f(x) = \sin(x)$
8) $f(x) = x^{2}$
9) $f(x) = x^{1/2}$
10) $f(x) = x^{a}$
11) $f(x) = x^{a} + x^{-b}$
12) $f(x) = 2e^{-x}$

Question de lexique

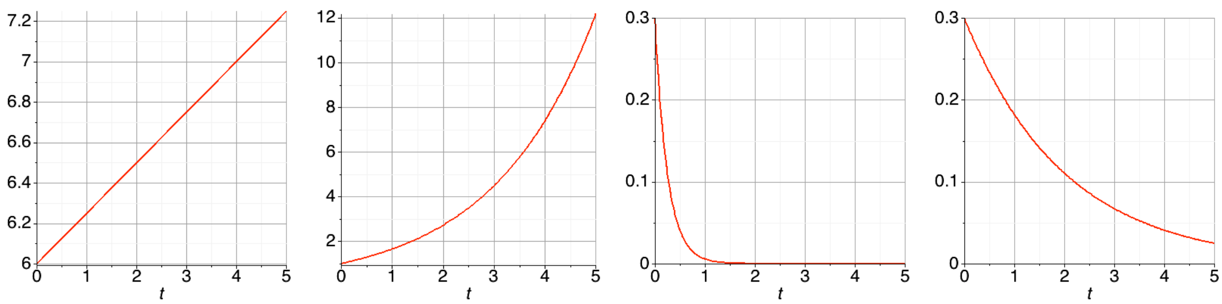


Cette fonction n'est <u>pas</u> :

1) Linéaire
2) Décroissante
3) Proportionnelle au temps
4) Inversement proportionnelle au temps

Reconnaître une fonction à partir de son graphe

1) Quelle courbe représente une évolution temporelle exponentielle Q_0e^{kt} avec $k = -1/2$?
2) Quelle courbe représente une évolution temporelle exponentielle Q_0e^{kt} avec $k = -2$?
3) Quelle courbe représente une évolution temporelle exponentielle Q_0e^{kt} avec $k = 2$?



Population de bactéries

A l'instant t=0, on introduit N_0 bactéries dans un milieu de culture. On s'intéresse alors à l'évolution de la population de bactéries, dont le nombre à l'instant t (t > ou égal à 0) est noté N(t).

Dans les instants suivant l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries en présence est proportionnelle à ce nombre.

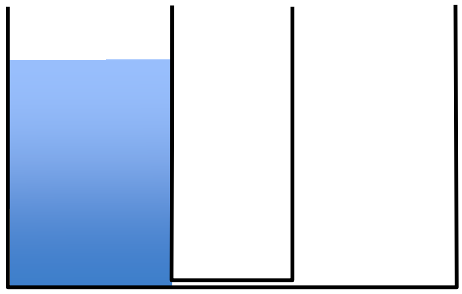
La fonction N(t) est donc solution de l'équation différentielle

$$\frac{dN(t)}{dt} = -aN(t)$$

où a est une constante strictement positive.

1) Quelle est la solution de cette équation différentielle qui satisfait les conditions initiales ?
2) Exprimer le temps T de doublement de la population bactérienne en fonction du réel a.

Problème : évolution exponentielle dans un système hydraulique



Deux récipients cylindriques communiquent par l'intermédiaire d'un tube capillaire placé à leur base. Initialement, le gros récipient est rempli d'eau jusqu'à un niveau H_0 donné, alors que le petit récipient est vide. On laisse l'eau s'écouler à travers le capillaire.

On mesure l'évolution du niveau dans chacun des récipients, $z_1(t)$ et $z_2(t)$, et on trouve qu'on peut les décrire par les deux expressions suivantes :

$$z_1(t) = A + B \exp(-t/\tau) \qquad\qquad z_2(t) = A - A \exp(-t/\tau)$$

où A, B et τ sont des constantes.

1. Tracer sur le même graphique l'allure de ces deux courbes. Préciser les valeurs aux limites : t=0, t qui tend vers l'infini.

2. Quelles sont les valeurs de $z_1(\tau)$ et $z_2(\tau)$? Faire figurer ces points sur le graphique.

3. Quelle est l'interprétation physique du paramètre A ?

4. Calculer les dérivées temporelles de ces deux fonctions et préciser leurs valeurs à t = 0. Tracer les droites tangentes à $z_1(t)$ et $z_2(t)$ à l'origine.

5. Comment peut-on déterminer graphiquement la constante τ à partir de $z_1(t)$? Et de $z_2(t)$? Retrouve-t-on bien la même valeur de τ ?

6. Exprimer la fonction $x_1(t) = \ln z_1(t)$. La fonction $x_1(t)$ est-elle linéaire en t ? Quelle autre fonction doit-on construire et tracer pour trouver une droite et donc vérifier graphiquement la loi d'évolution exponentielle ?

Éléments de correction :