UE CMP
Concepts et Méthodes de la Physique

Cours 3 : la loi exponentielle § 3.2.3

I. Refroidissement de l'eau : découvrons la loi exponentielle

II. L'équation d'évolution pour la loi exponentielle

III. Le raisonnement différentiel par l'exemple

IV. Echelle semi-logarithmique (si on a le temps)

Bibliographie

Sur les équations aux dimensions et les incertitudes :

quelques exercices sur

Mesures physiques et instrumentation

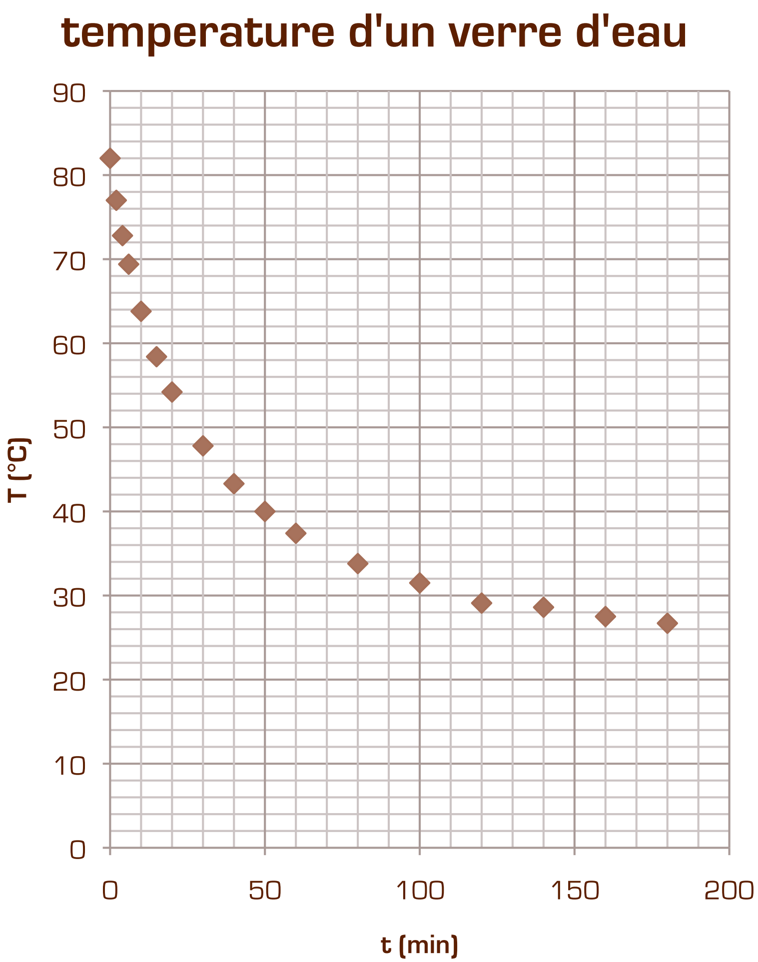
D. Barchiesi

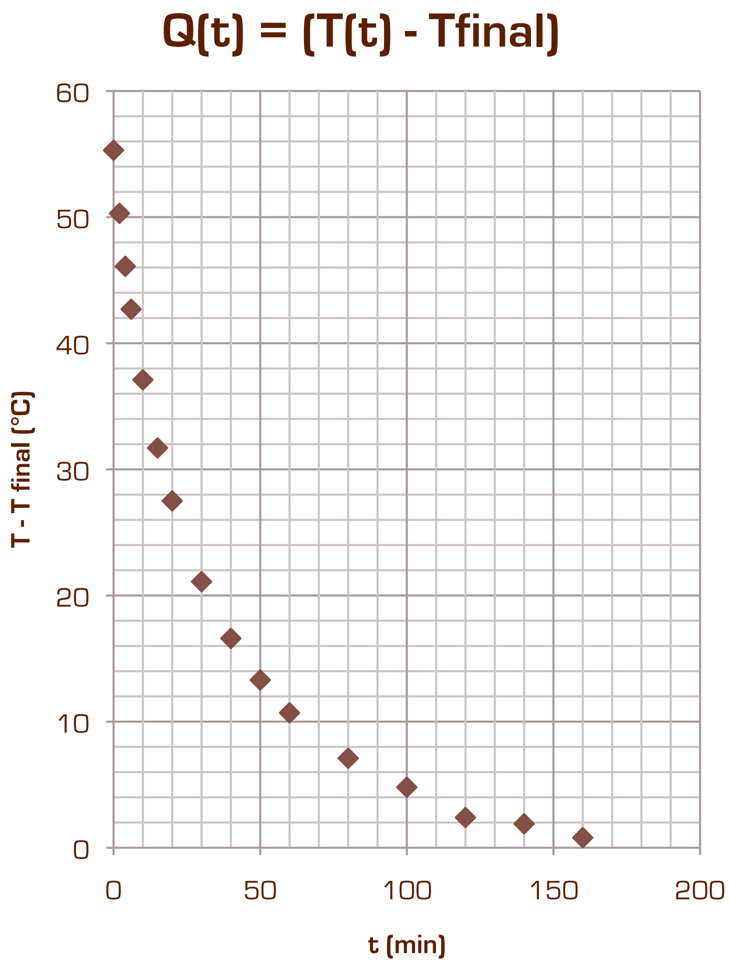
code bibliothèque : 530 BAR

EVOLUTION EXPONENTIELLE

Refroidissement de l’eau

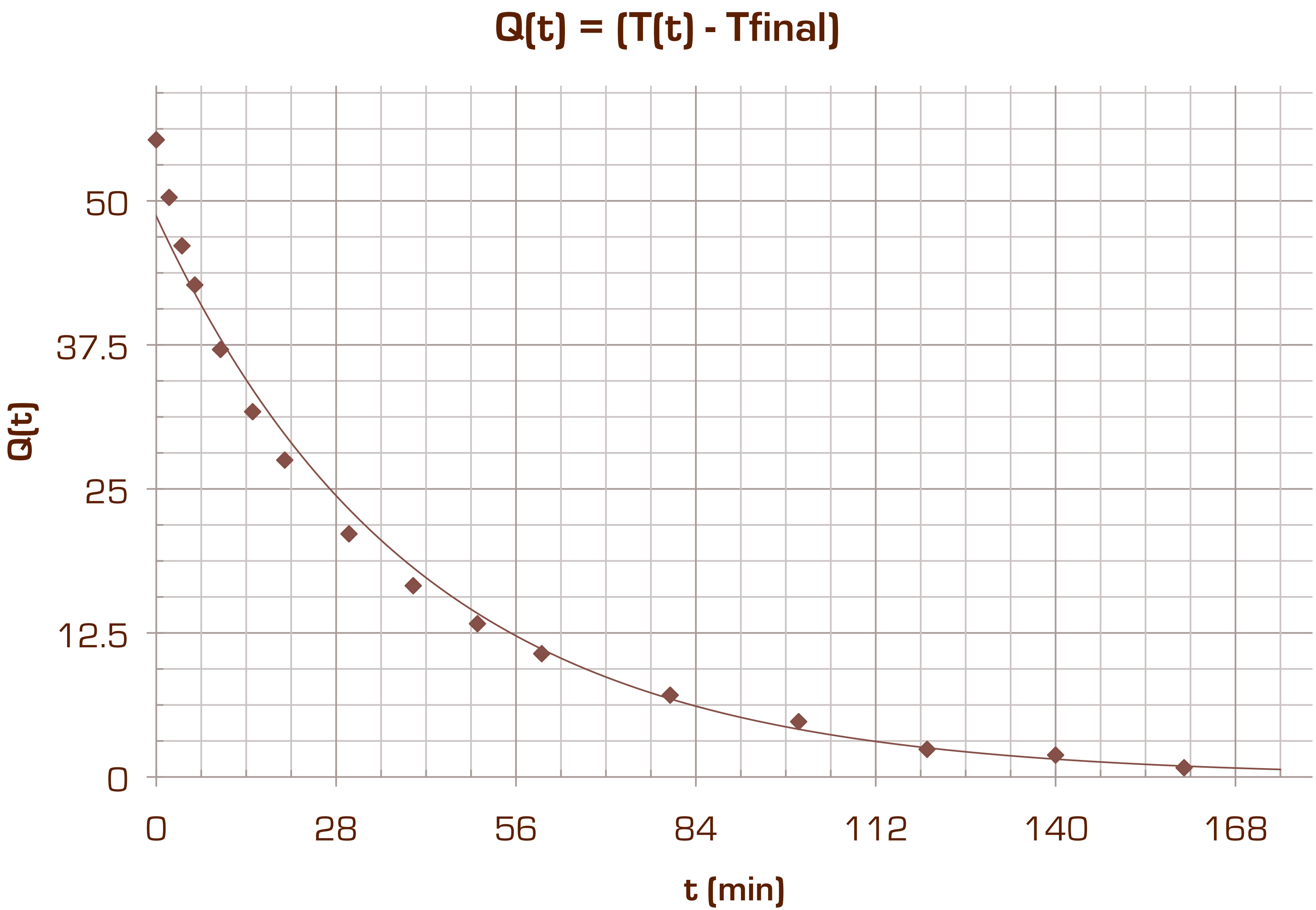
t[min]	T [°C]
0	82
2	77
4	72.8
6	69.4
10	63.8
15	58.4
20	54.2
30	47.8
40	43.3
50	40
60	37.4
80	33.8
100	31.5
130	29.1
140	28.6
160	27.5
180	26.7





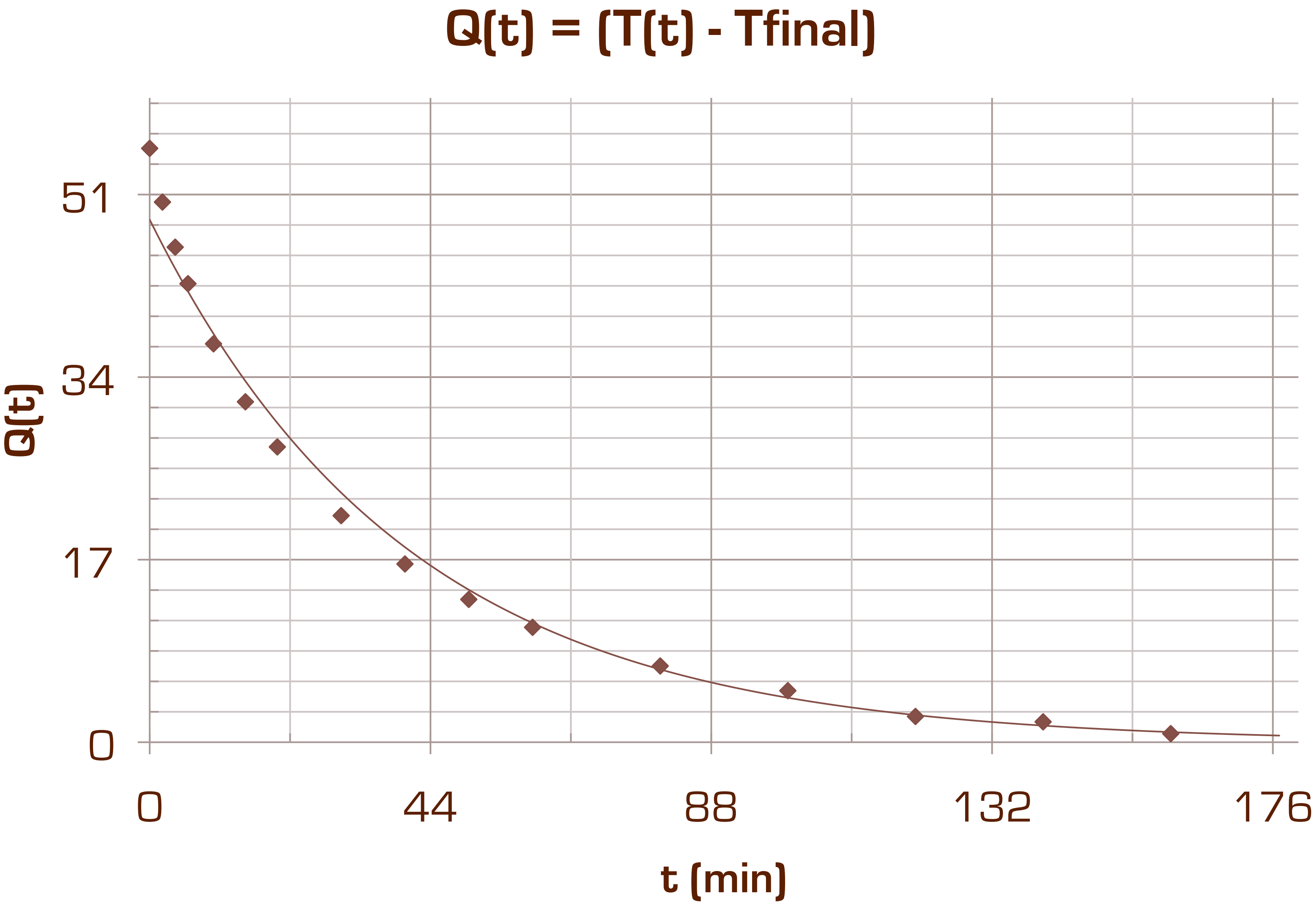
1. Découvrons l'évolution exponentielle

Refroidissement de l'eau : variation relative $\Delta Q/Q = 1/2$?



1. Découvrons l'évolution exponentielle

Refroidissement de l'eau : variation relative $\Delta Q / Q = 1/3$?



2. La loi d'évolution exponentielle

EVOLUTION TEMPORELLE **EXPONENTIELLE**
D'UNE QUANTITÉ PHYSIQUE Q

$$\boxed{Q(t) = Q_0 \, e^{k\,t}}$$

$\mathbf{Q_0}$ = valeur à l'instant initial $t=0$;

k = ?

Dimensions de $k = \ln(a) / \Delta t$?

A T

B T^{-1}

C LT^{-1}

D L^{-1}

2. La loi d'évolution exponentielle

EVOLUTION TEMPORELLE **EXPONENTIELLE**
D'UNE QUANTITÉ PHYSIQUE Q

$$\boxed{Q(t) = Q_0 \, e^{k\,t}}$$

$\mathbf{Q_0}$ = valeur à l'instant initial $t=0$;

k = « **constante de vitesse** » $[k] = T^{-1}$

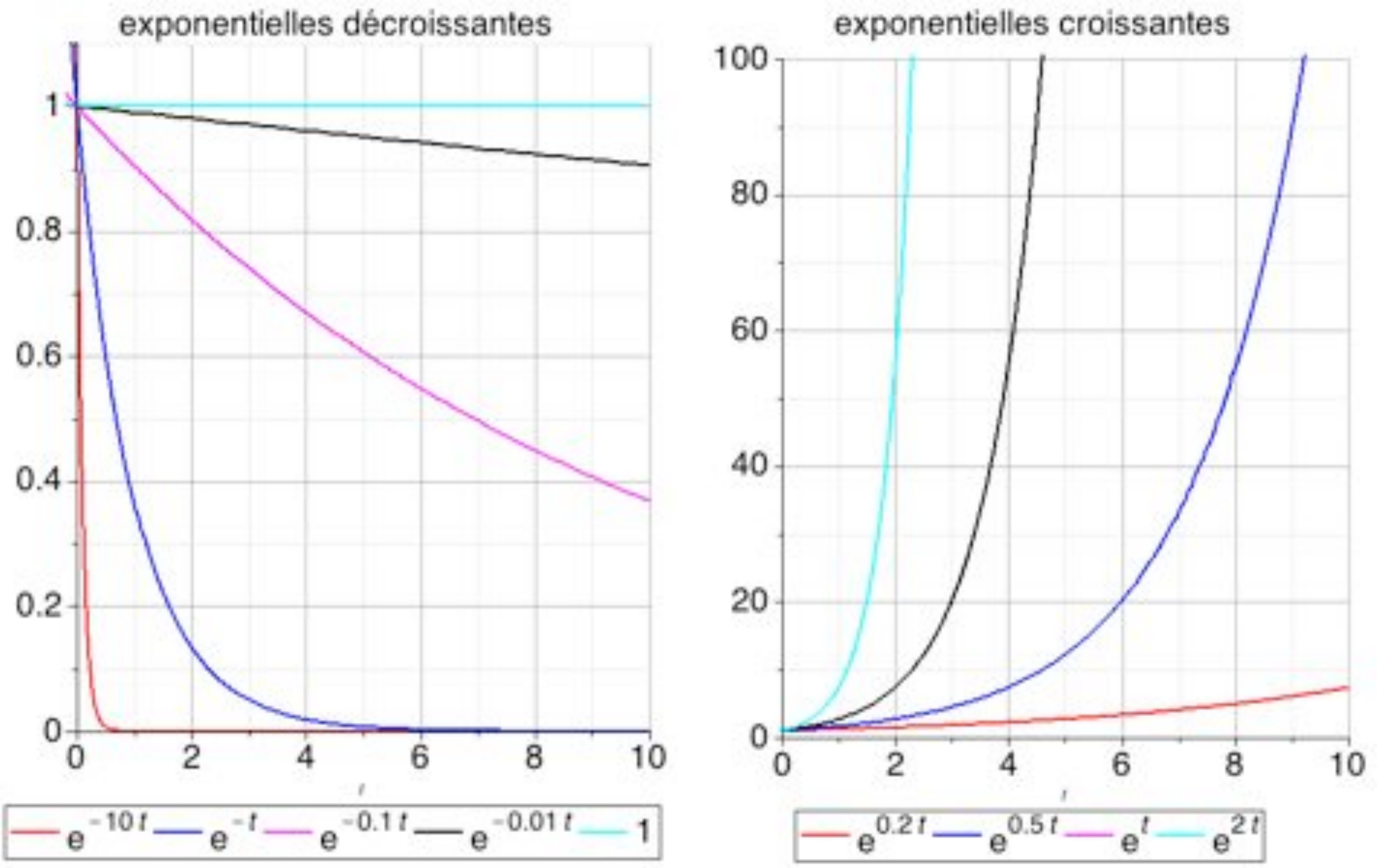
signe de k => sens de l'évolution : $k > 0$ fonction croissante
$k < 0$ fonction décroissante

$\tau = |k|^{-1}$ = **temps caractéristique** de l'évolution :

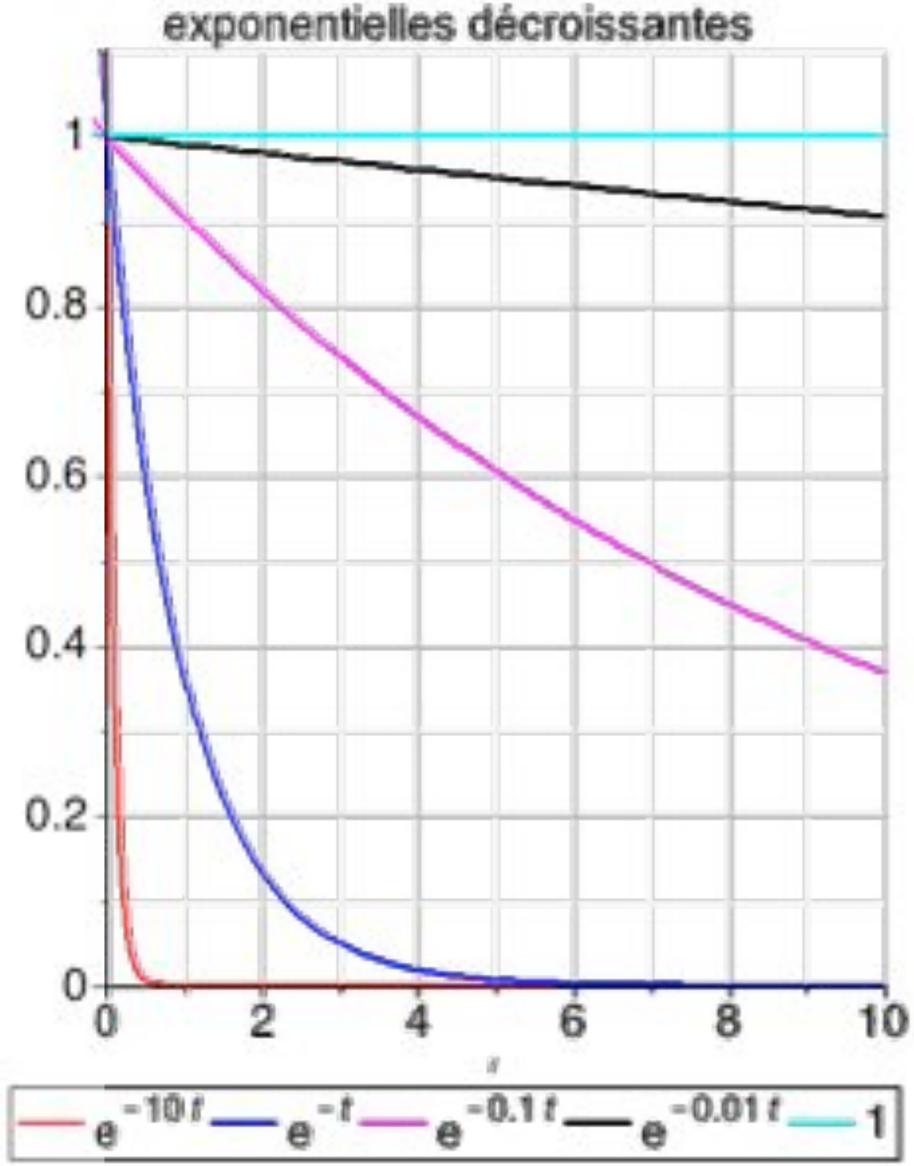
$$Q(t+\tau) = Q(t)\,/\,e \approx Q(t)\,/\,2.7 \quad (\text{pour } k < 0)$$

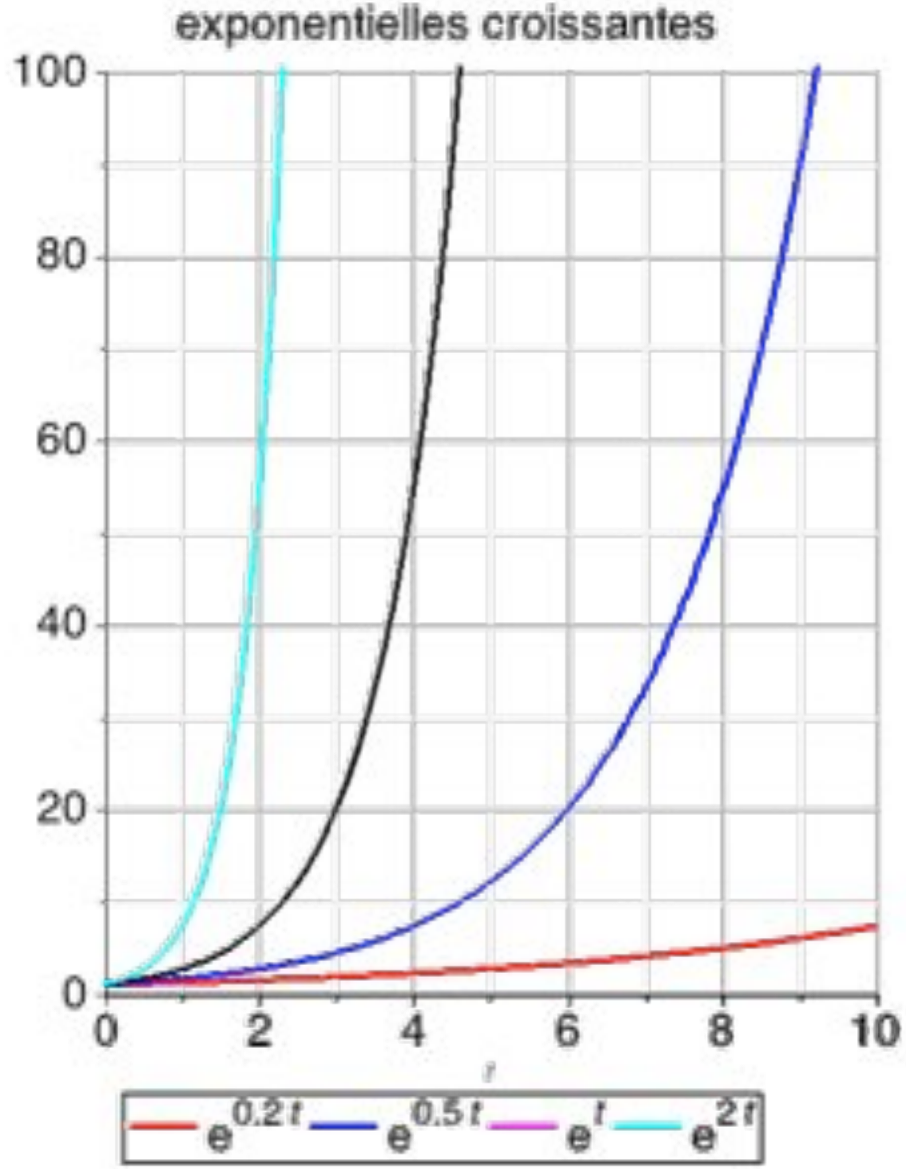
$$Q(t+\tau) = Q(t) \times e \approx Q(t) \times 2.7 \quad (\text{pour } k > 0)$$

3. Représentations graphiques - décroissance et croissance



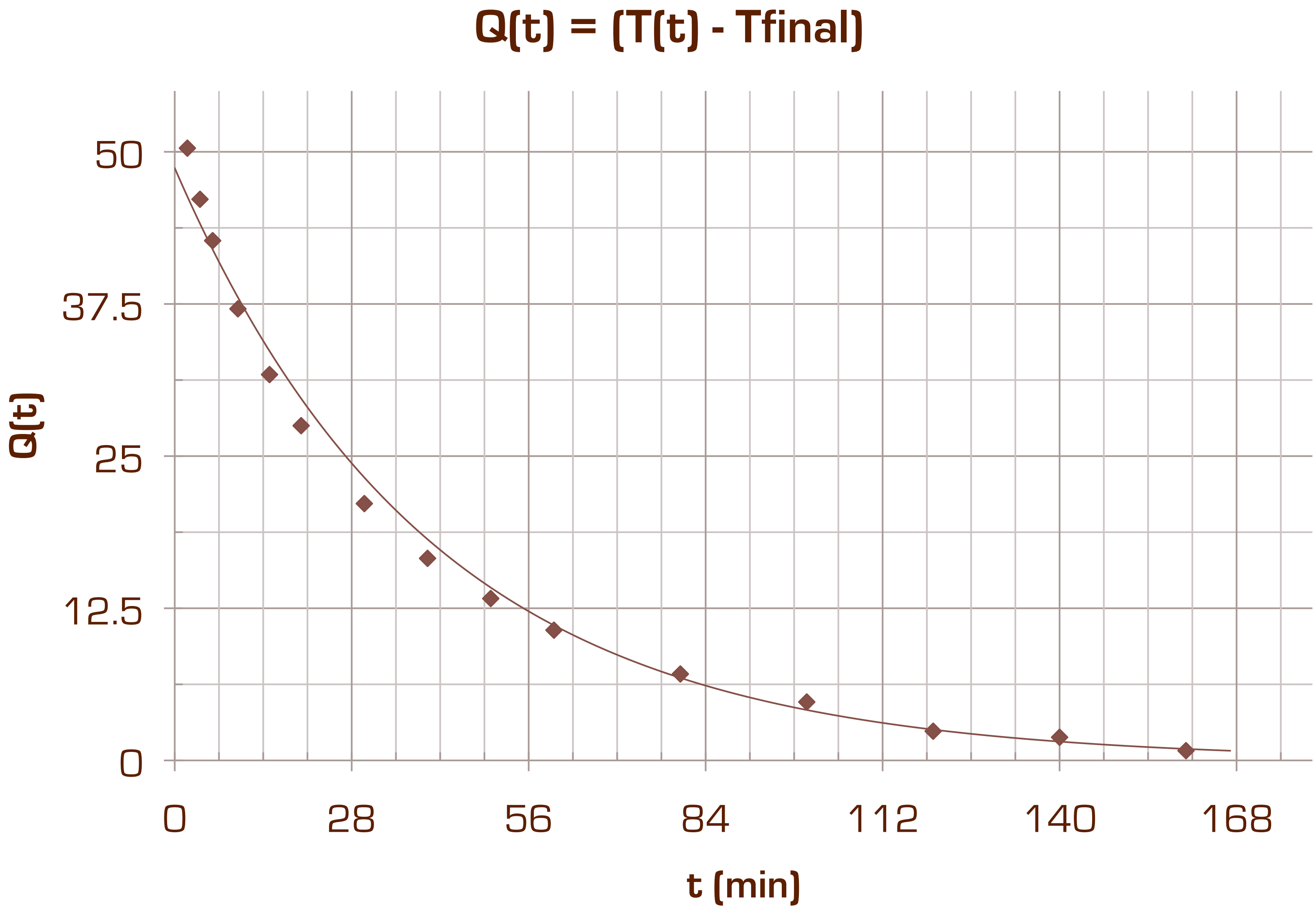
3. Représentations graphiques - décroissance et croissance





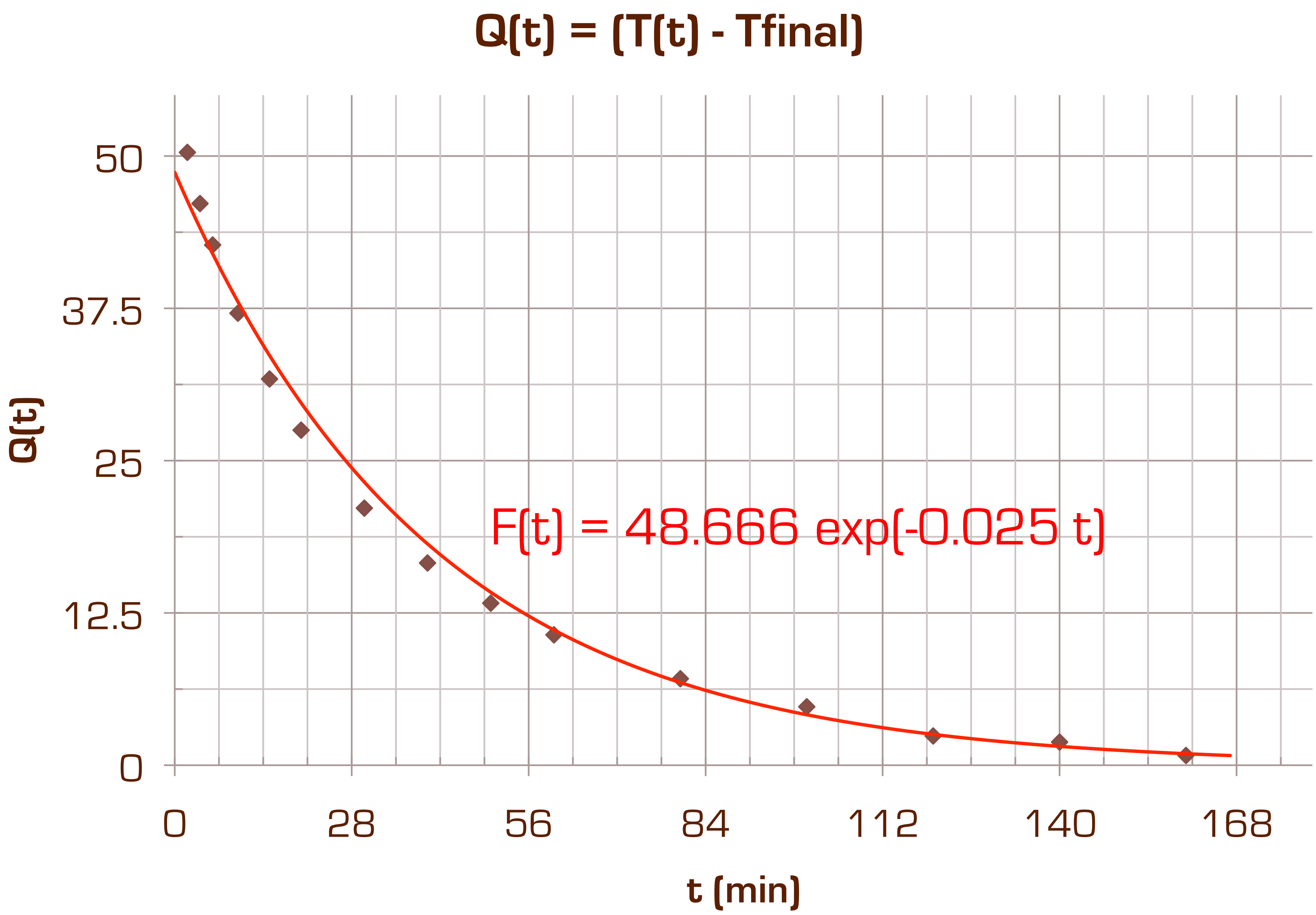
2. La loi d'évolution exponentielle

Refroidissement de l'eau : que vaut k ?



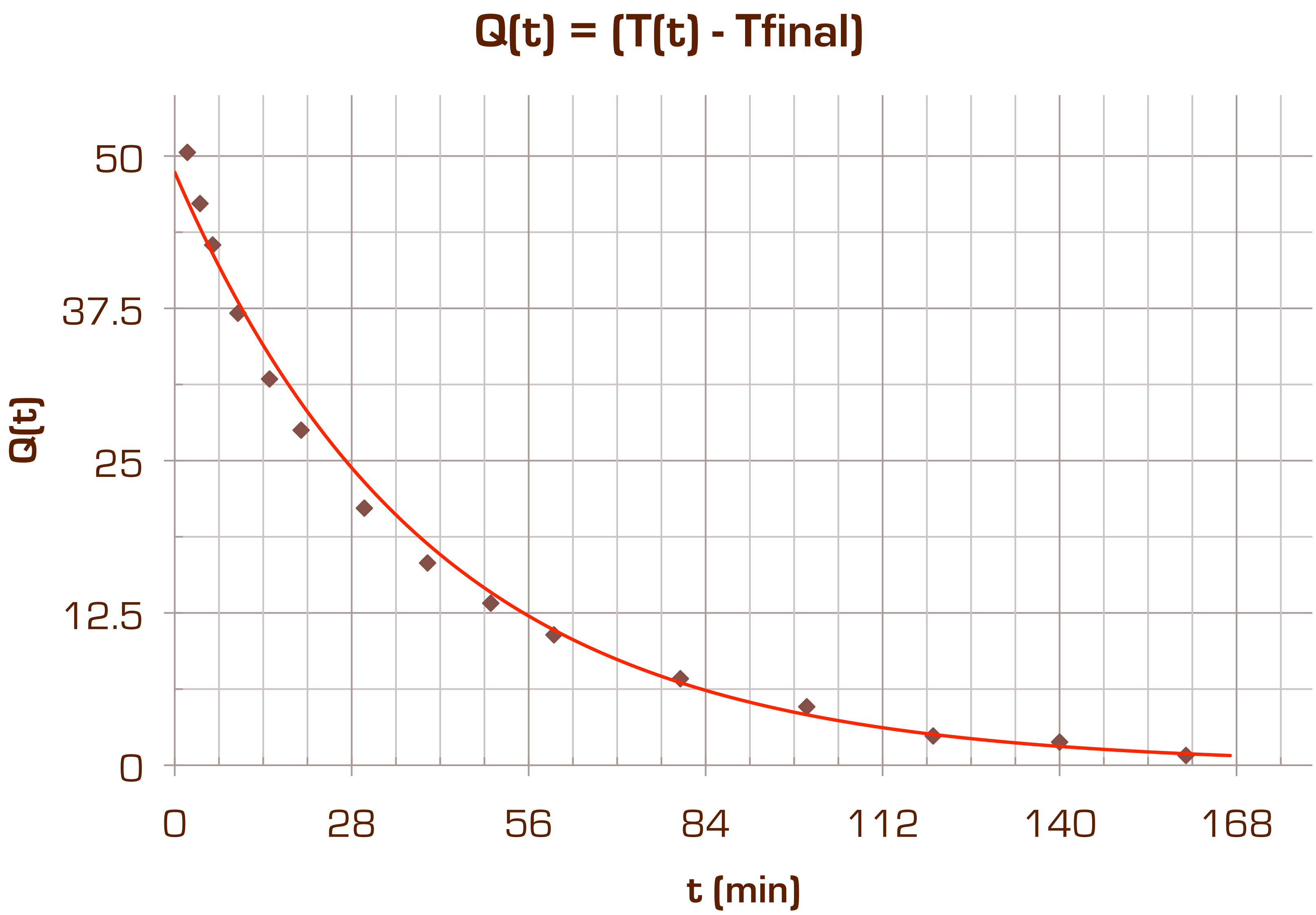
2. La loi d'évolution exponentielle

Refroidissement de l'eau : ajustement avec f(t) exponentielle



2. La loi d'évolution exponentielle

<u>Tracer la tangente à l'origine</u> : que découvre-t-on ?

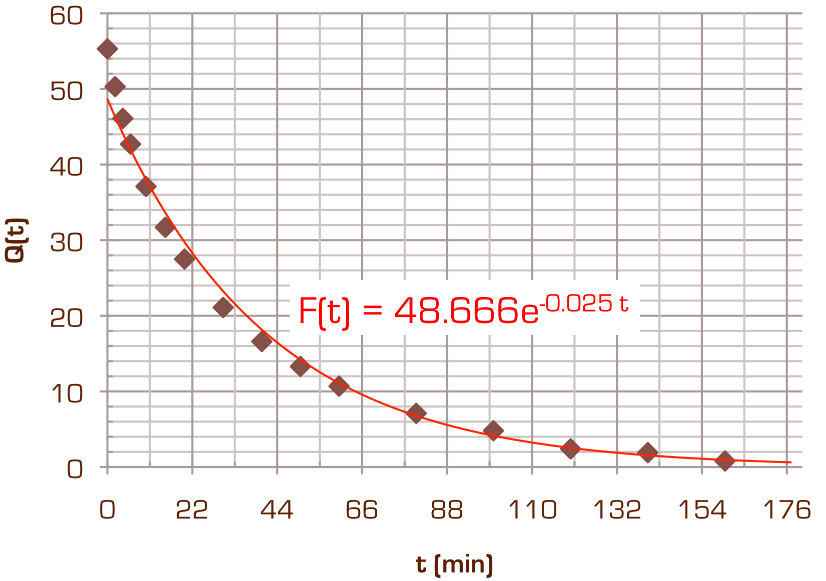


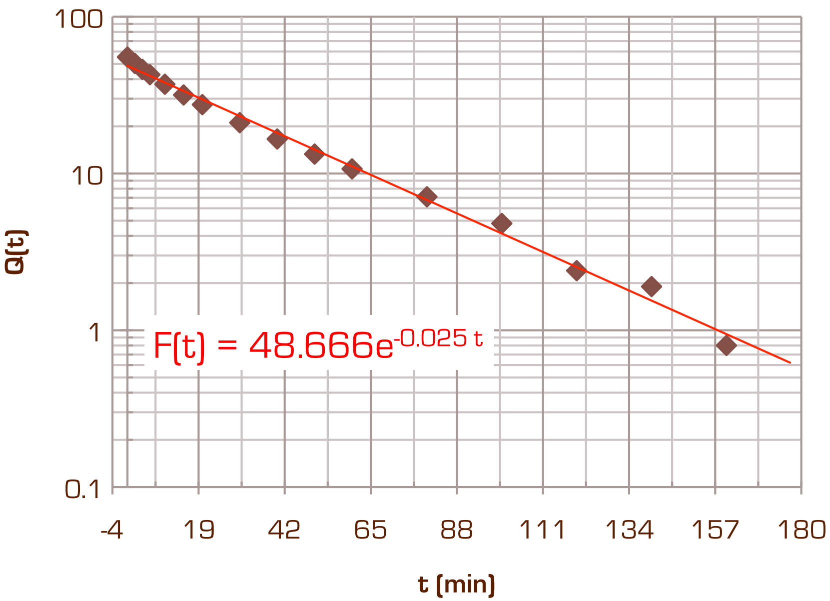
I. évolution exponentielle : équation différentielle

1. un film
2. un tableau de mesures
3. une phrase
4. un graphe
5. une loi mathématique
6. une équation d'évolution

t (min)	T-T(3h) °C
0	55.3
2	50.3
4	46.1
6	42.7
10	37.1
15	31.7
20	27.5
30	21.1
40	16.6
50	13.3
60	10.7
80	7.1
100	4.8
120	2.4
140	1.9
160	0.8
180	0

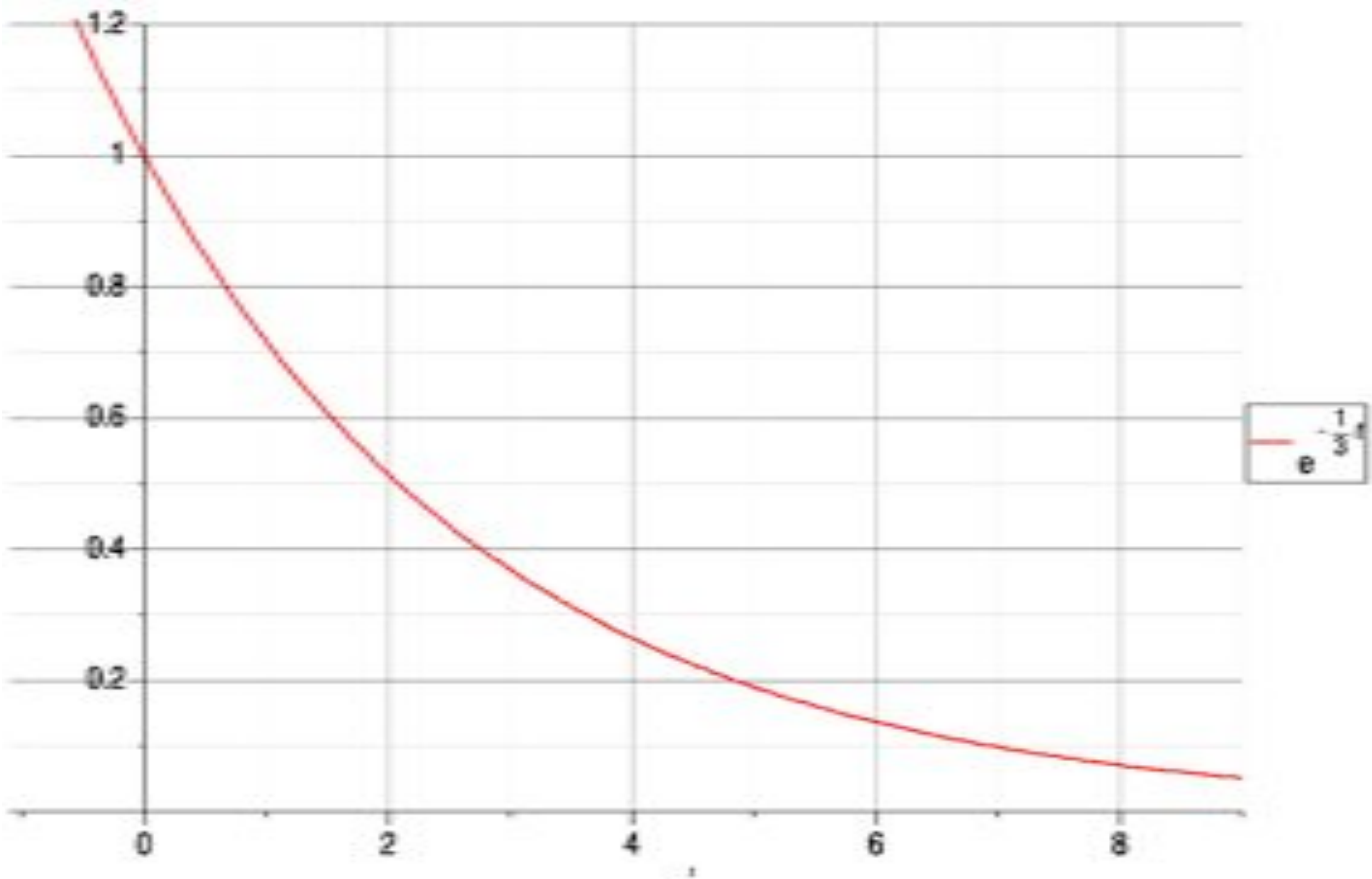
refroidissement de l'eau





I. évolution exponentielle : équation différentielle

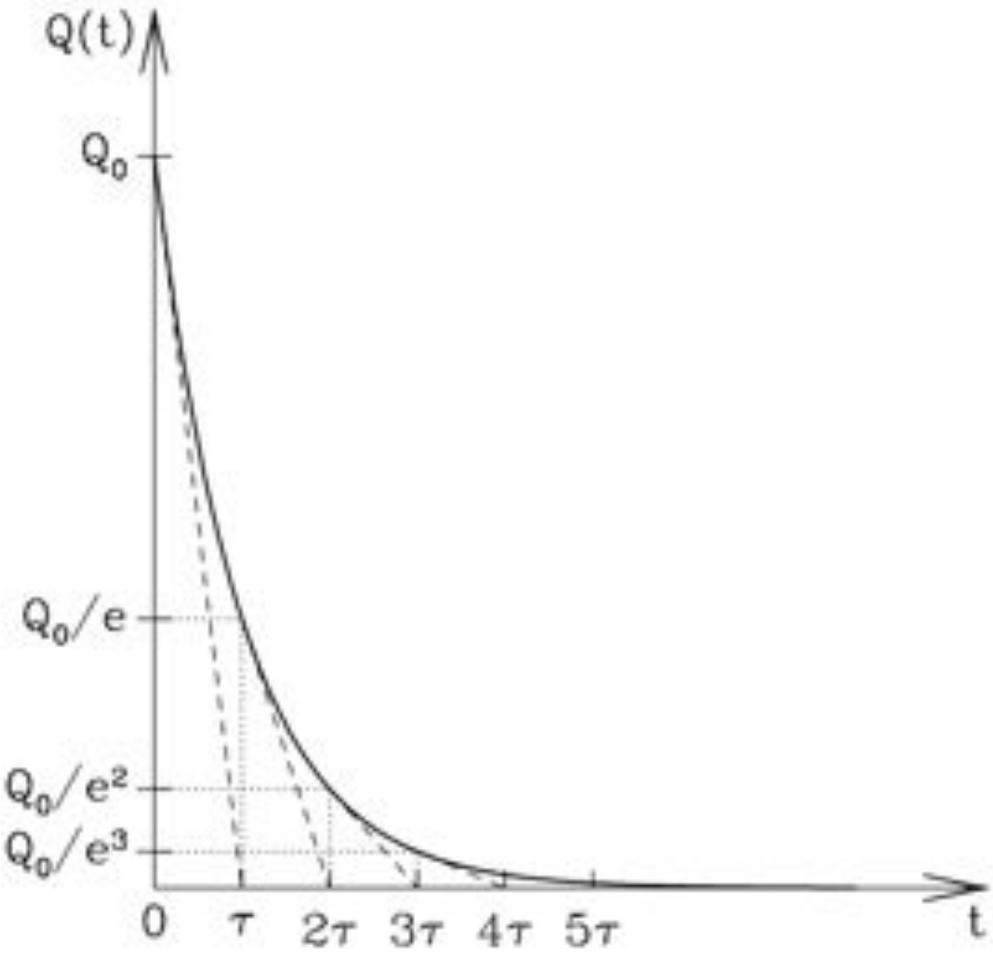
A. Dérivée : signification physique, géométrique

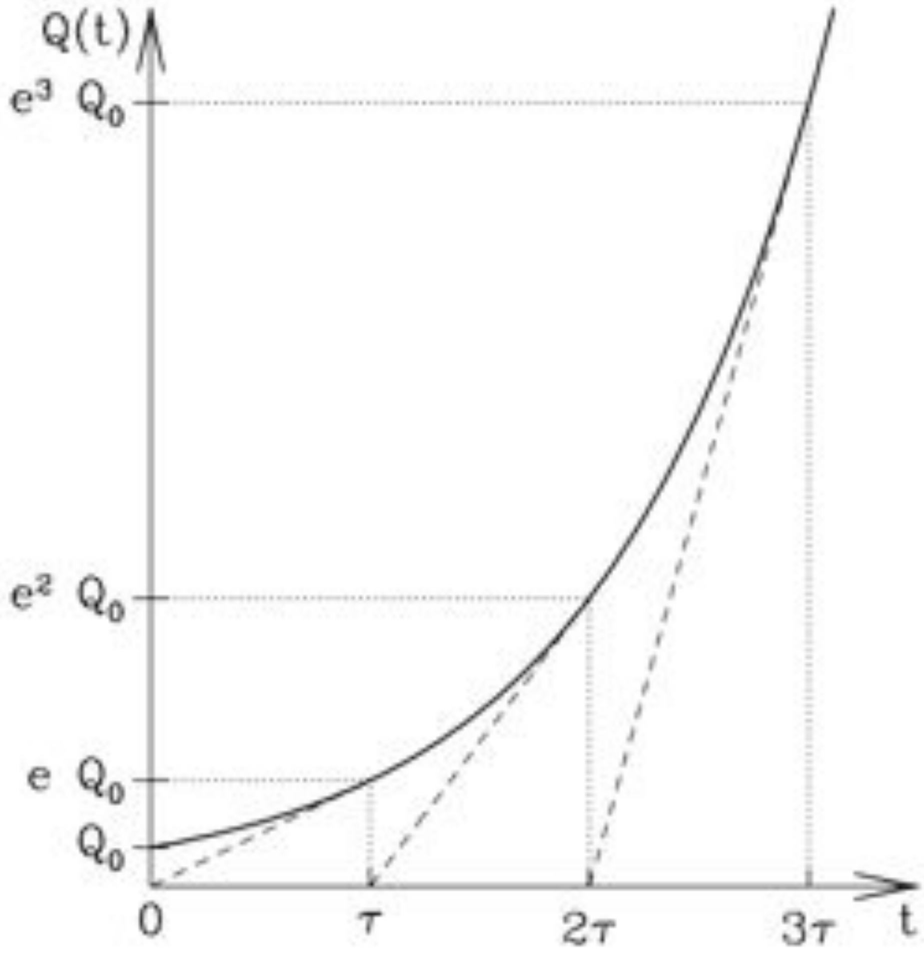


I. évolution exponentielle : équation différentielle

Dérivée de la fonction exponentielle :

$$dQ/dt = k\,Q(t)$$





Les équations différentielles rencontrées

Nos 2 exemples d'équations différentielles :

1. $\boxed{\dfrac{dQ}{dt} = k}$ → Solution : $\boxed{Q(t) = Q_0 + kt}$

évolution linéaire (bougie, sablier,...)

2. $\boxed{\dfrac{dQ}{dt} = k\ Q(t)}$ ou $\boxed{\dfrac{dQ}{dt} - k\ Q(t) = 0}$ → Solution : $\boxed{Q(t) = Q_0\ e^{kt}}$

évolution exponentielle

(refroidissement eau, bactéries,...)

2 cas particuliers d'équations différentielles linéaires du 1er ordre :

$$a\frac{dQ}{dt} + b\ Q(t) = f(t)$$

ATTENTION : Q_0 et k constantes à déterminer pour chaque problème

Résumé des propriétés des évolutions linéaire et exponentielle à connaître : poly page 70

Fiche méthode : Résumé des propriétés des évolutions linéaire et exponentielle à connaître.

	Évolution linéaire	**Évolution exponentielle**
	Lois de l'évolution	
Equation différentielle gouvernant l'évolution	$\frac{dQ(t)}{dt} = k$ avec k = cste	$\frac{dQ(t)}{dt} = k\,Q(t)$ avec k = cste
Solution : **loi d'évolution**	$Q(t) = Q_0 + kt$	$Q(t) = Q_0\,e^{kt}$
Changement d'origine des temps	$Q(t) = Q(t_0) + k(t - t_0)$	$Q(t) = Q(t_0)e^{k(t-t_0)}$
	Paramètres physiques	
Q_0 **: dimension** Q_0 **: signification**	$[Q_0] = [Q]$ $Q_0 = Q(0)$ (valeur initiale à $t = 0$)	$[Q_0] = [Q]$ $Q_0 = Q(0)$ (valeur initiale à $t = 0$)
k **: dimension** k **: signification** k **: signe**	$[k] = [Q].T^{-1}$ k : vitesse (taux) de variation de Q $k > 0$: $Q(t)$ augmente avec t $k < 0$: $Q(t)$ diminue avec t $k = 0$: $Q(t)$ constante	$[k] = T^{-1}$ $1/\lvert k\rvert$: échelle de temps caractéristique de l'évolution $k > 0$: $Q(t)$ augmente avec t $k < 0$: $Q(t)$ diminue avec t $k = 0$: $Q(t)$ constante
	Variation de Q entre t et $t + \Delta t$ pour Δt fixé	
Variation absolue $\Delta Q(t) = Q(t + \Delta t) - Q(t)$	$\Delta Q(t) = k\Delta t$ (indépendant de t)	$\Delta Q(t) = Q(t) \times (e^{k\Delta t} - 1)$ (dépend de t)
Variation relative $\frac{\Delta Q(t)}{Q(t)}$	$\frac{\Delta Q(t)}{Q(t)} = \frac{k\Delta t}{Q(t)}$ (dépend de t)	$\frac{\Delta Q(t)}{Q(t)} = e^{k\Delta t} - 1$ (indépendant de t)
Propriété caractéristique	La variation absolue est la même pour des intervalles de temps identiques	La variation relative est la même pour des intervalles de temps identiques (la grandeur Q est multipliée par un facteur constant $\alpha = e^{k\Delta t}$ sur des intervalles de temps identiques)

Résumé des propriétés des évolutions linéaire et exponentielle à connaître : poly page 70

↕

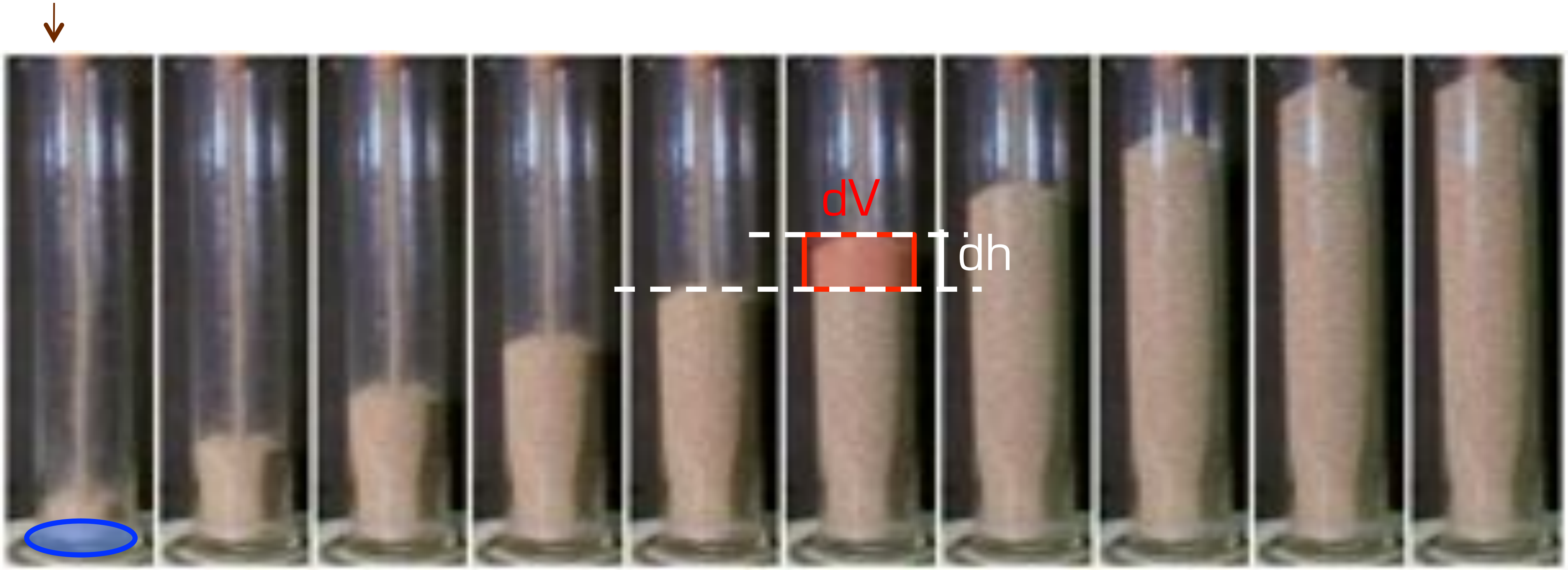
	Échelle de temps caractéristique $\tau = \left\lvert \frac{1}{Q(t)} \frac{dQ(t)}{dt} \right\rvert^{-1}$	
Échelle de temps caractéristique de l'évolution	$\tau = \left\lvert \frac{Q(t)}{k} \right\rvert = \left\lvert \frac{Q_0}{k} + t \right\rvert$ (dépend de t)	$\tau = \frac{1}{\lvert k \rvert}$ (indépendant de t)
Évolution aux temps courts (développement limité au premier ordre)	$Q(\Delta t) = Q_0 + k\Delta t$	$Q(\Delta t) \simeq Q_0\,(1 + k\Delta t)$ si $\Delta t \ll \tau$
Évolution aux temps longs	Pour $t \gg \tau_0 = \left\lvert \frac{Q_0}{k} \right\rvert$, le système perd la mémoire de son état initial : $Q(t) \simeq kt$ et $\tau \simeq t$. $\lvert Q(t) \rvert \to +\infty$ pour $t \gg \tau_0$	$k > 0 : Q(t) \to +\infty$ pour $t \gg \tau$ $k < 0 : Q(t) \to 0$ pour $t \gg \tau$
	Pour les deux évolutions, la validité du modèle physique aux temps longs est généralement remise en cause, en particulier si $Q(t) \to \infty$ (évolution linéaire et croissance exponentielle).	

	Représentation graphique de $Q(t)$	
Construction graphique (à connaître)	Voir page 46	Voir page 51
Mise en évidence expérimentale	On effectue une série de mesures $Q(t_i)$ aux dates t_i.	
	On représente $Q(t_i)$ en fonction de t_i et on doit pouvoir ajuster correctement par une droite.	On représente $\ln(Q(t_i))$ en fonction de t_i et on doit pouvoir ajuster correctement par une droite.

III. RAISONNEMENT DIFFERENTIEL

Exemple 1 : Remplissage d’un cylindre à débit constant

Débit D = constante



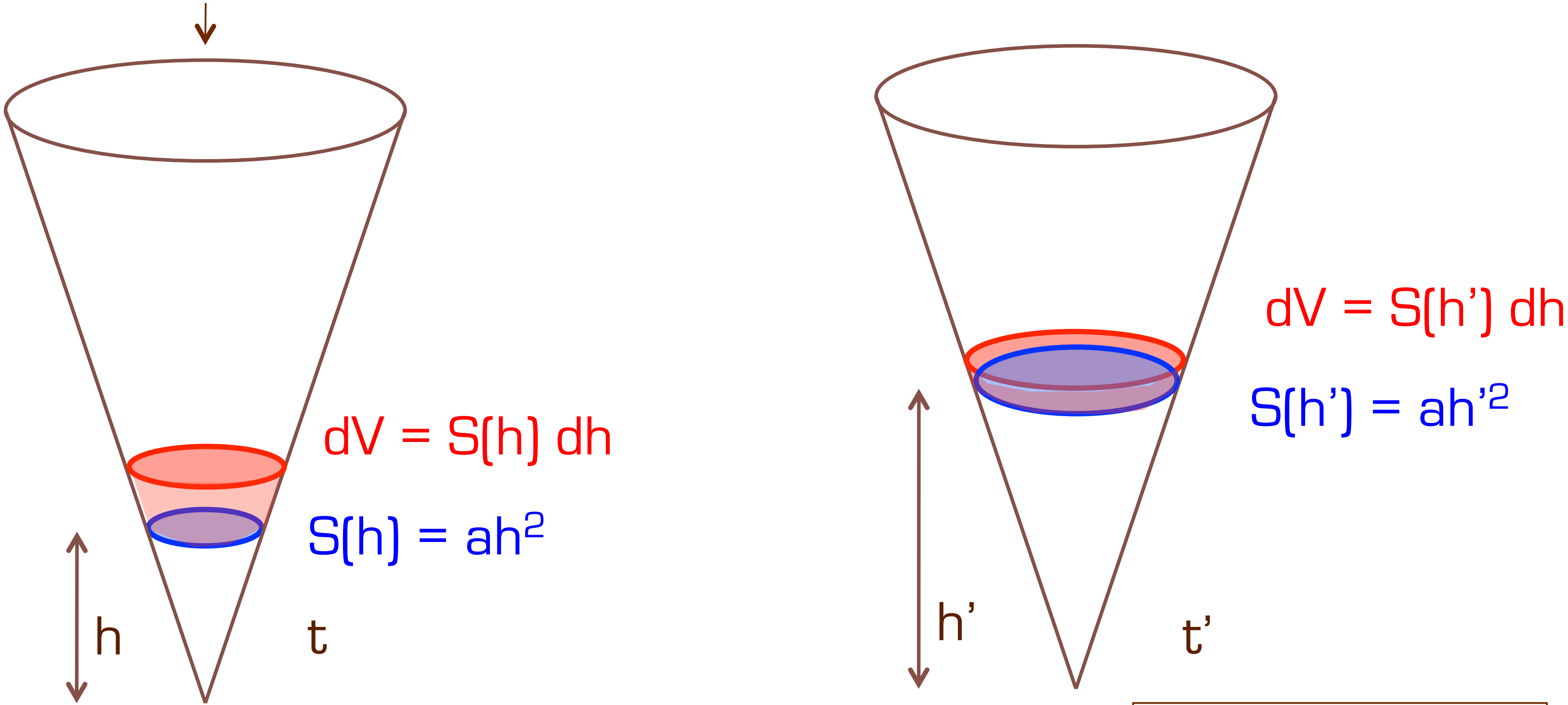
S t t+dt

$$\boxed{\frac{dh(t)}{dt} = \frac{D}{S} = k}$$

III. RAISONNEMENT DIFFERENTIEL

Exemple 2 : Remplissage d'un cône à débit constant

Débit D = constante → dV = D dt



$$\boxed{\frac{dh(t)}{dt} = \frac{D}{a\ h^2}}$$

équation différentielle non linéaire !

III. RAISONNEMENT DIFFERENTIEL

Principe :

- Identifier le système

- Identifier la quantité physique d'intérêt, qui varie au cours du temps Q(t)

- Identifier la **source de changement** de cette quantité

- Ecrire **l'incrément dQ = Q(t+dt) - Q(t)** de Q
entre un instant **t** et un instant successif, mais proche, **t+dt**

- dQ dépendra en général de Q et de dt : **en déduire une équation reliant Q et ses dérivées**.

III. RAISONNEMENT DIFFERENTIEL

Exemple 2 : Eau qui refroidit

- le système…
- Q(t)…
- la source…
- dQ…
- équation reliant Q et ses dérivées…

III. RAISONNEMENT DIFFERENTIEL

Exemple 2 : Eau qui refroidit

- le système… l'eau
- Q(t)… $(T(t) - T_{pièce})$
- la source…

  Flux d'énergie $F = dE/dt = -BS\,(T(t) - T_{pièce})$

  avec énergie $E = A\,V\,T$
- dQ…
- équation reliant Q et ses dérivées…

III. RAISONNEMENT DIFFERENTIEL

Exemple 2 : Eau qui refroidit

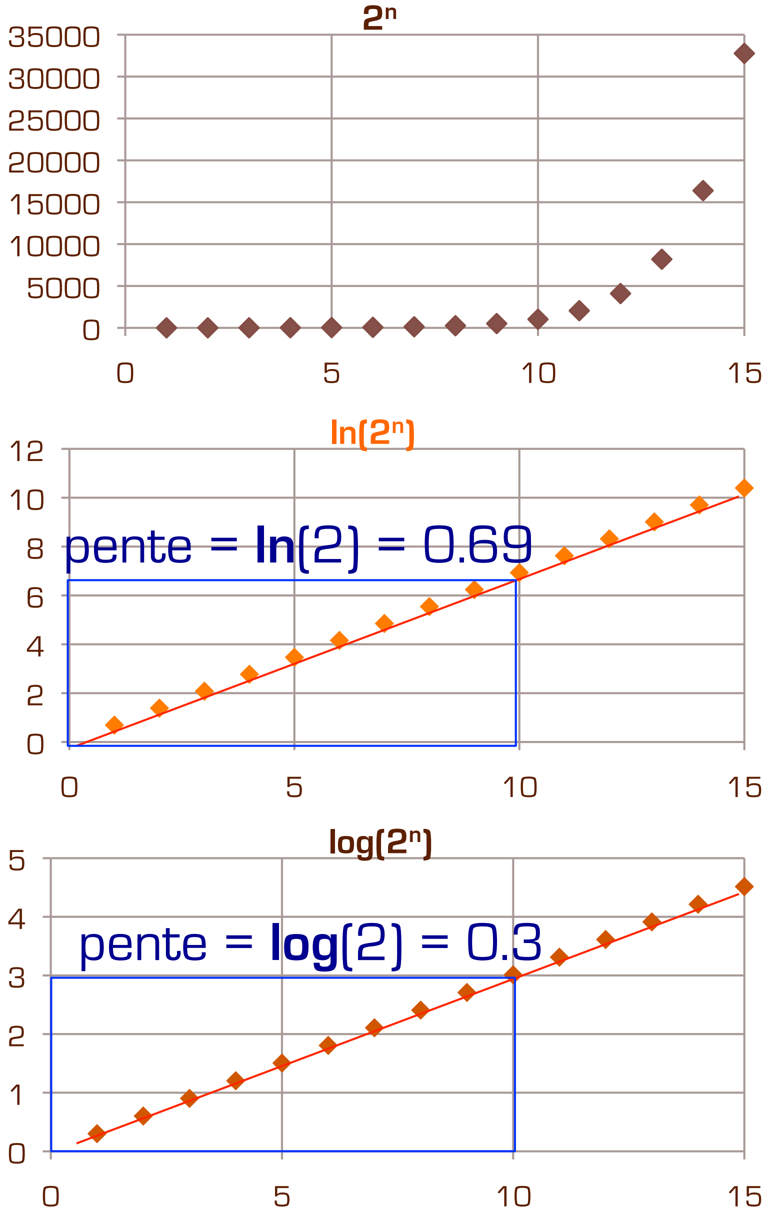
- le système… l’eau
- Q(t)… $(T(t) - T_{pièce})$
- la source…
  Flux d’énergie $F = dE/dt = -BS\,(T(t) - T_{pièce})$
  avec énergie $E = A\,V\,T$
- dQ… $d(T(t) - T_{pièce}) = dE/(AV) = F\,dt\,/(AV)$
- équation reliant Q et ses dérivées…

$$\boxed{\frac{d[T(t) - T_{pièce}]}{dt} = -\frac{BS}{AV}\,[T(t) - T_{pièce}]}$$

4. Echelle semi-logarithmique

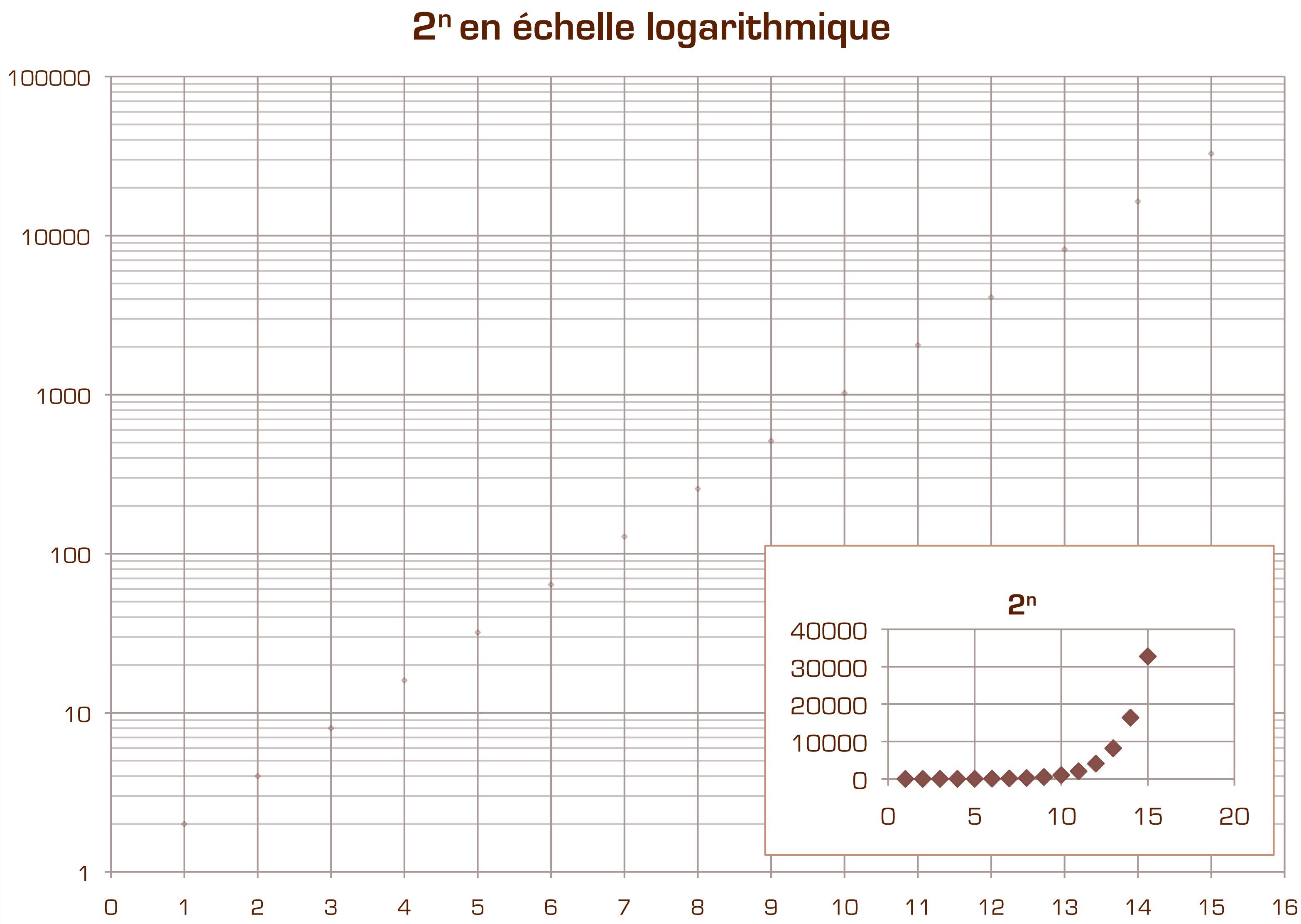
Exemple : fonction $2^t = e^{\ln 2\ t}$

n	2^n	$\ln(2^n)$	$\log(2^n)$
1	2	0,693147181	0,301029996
2	4	1,386294361	0,602059991
3	8	2,079441542	0,903089987
4	16	2,772588722	1,204119983
5	32	3,465735903	1,505149978
6	64	4,158883083	1,806179974
7	128	4,852030264	2,10720997
8	256	5,545177444	2,408239965
9	512	6,238324625	2,709269961
10	1024	6,931471806	3,010299957
11	2048	7,624618986	3,311329952
12	4096	8,317766167	3,612359948
13	8192	9,010913347	3,913389944
14	16384	9,704060528	4,214419939
15	32768	10,39720771	4,515449935



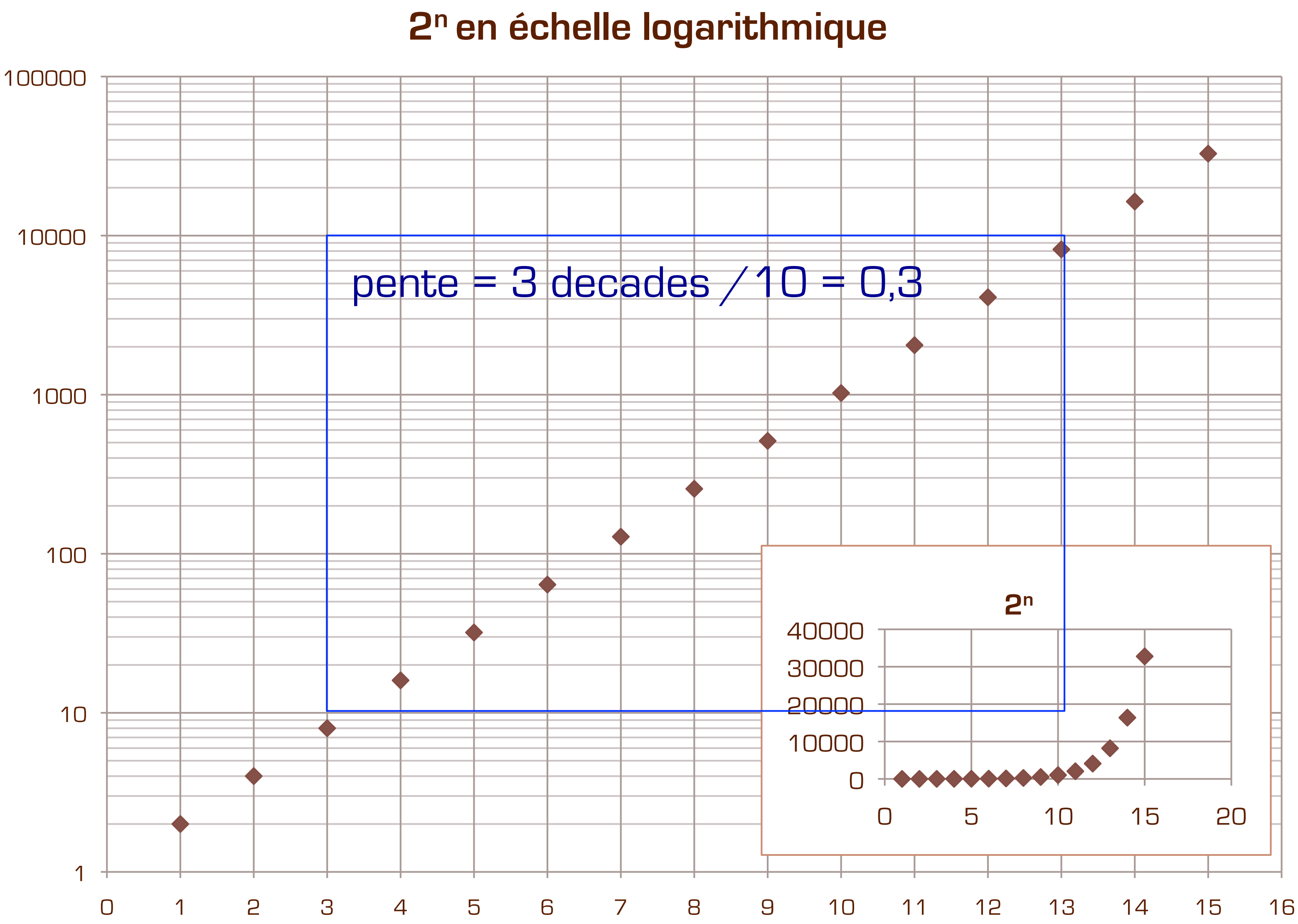
4. Echelle semi-logarithmique

n	2^n
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768



4. Echelle semi-logarithmique

n	2^n
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768



4. Echelle semi-logarithmique

Exercice pour la maison ;

Tracer en échelle semi-logarithmique

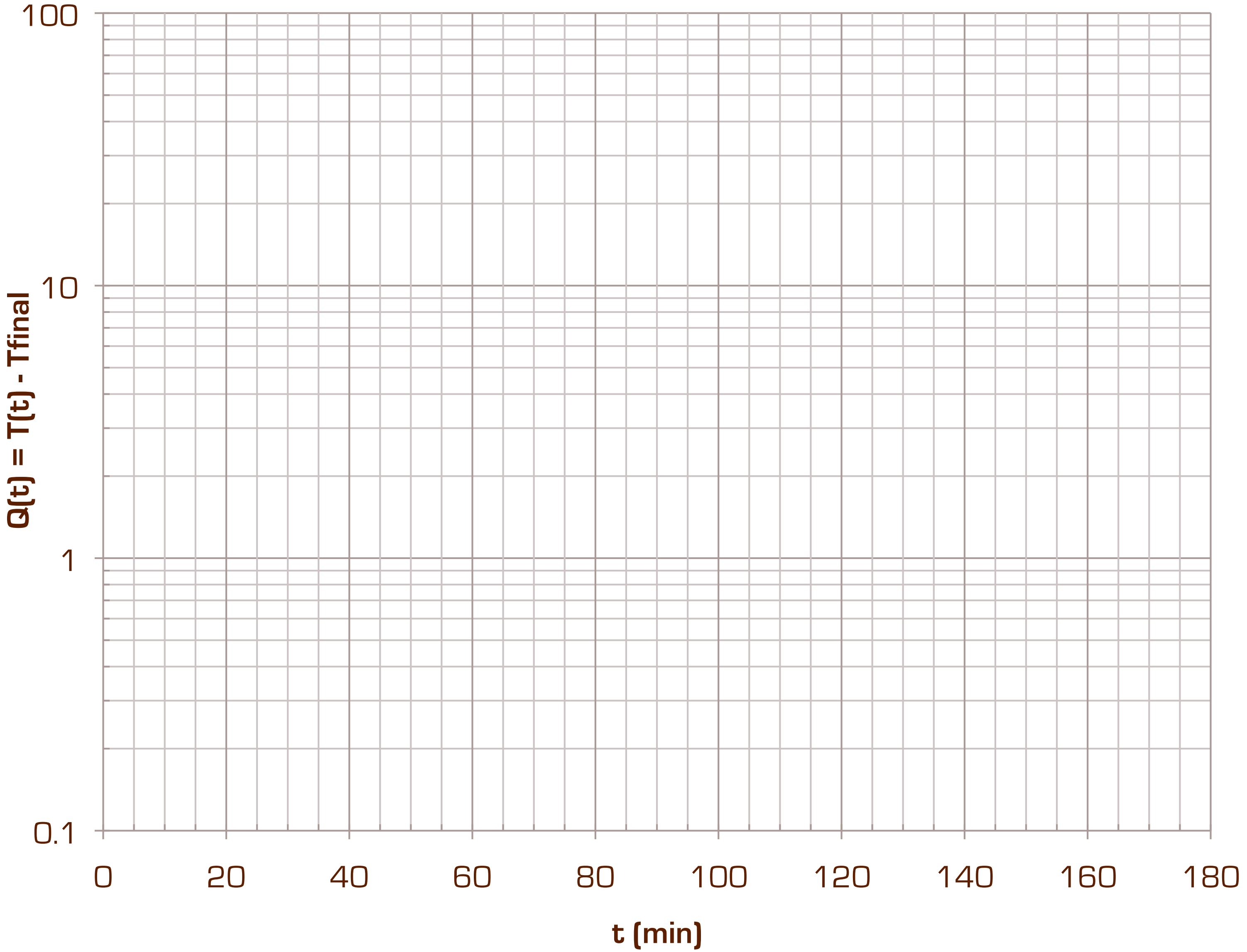
les données du refroidissement de l'eau

- sur la feuille de papier en échelle semi-log
- obtient-on une droite ?
- quelle est la pente de cette droite ?
- quelle est donc l'allure de la fonction Q(t) ?

4. Echelle logarithmique

Refroidissement de l’eau : tracer en échelle logarithmique

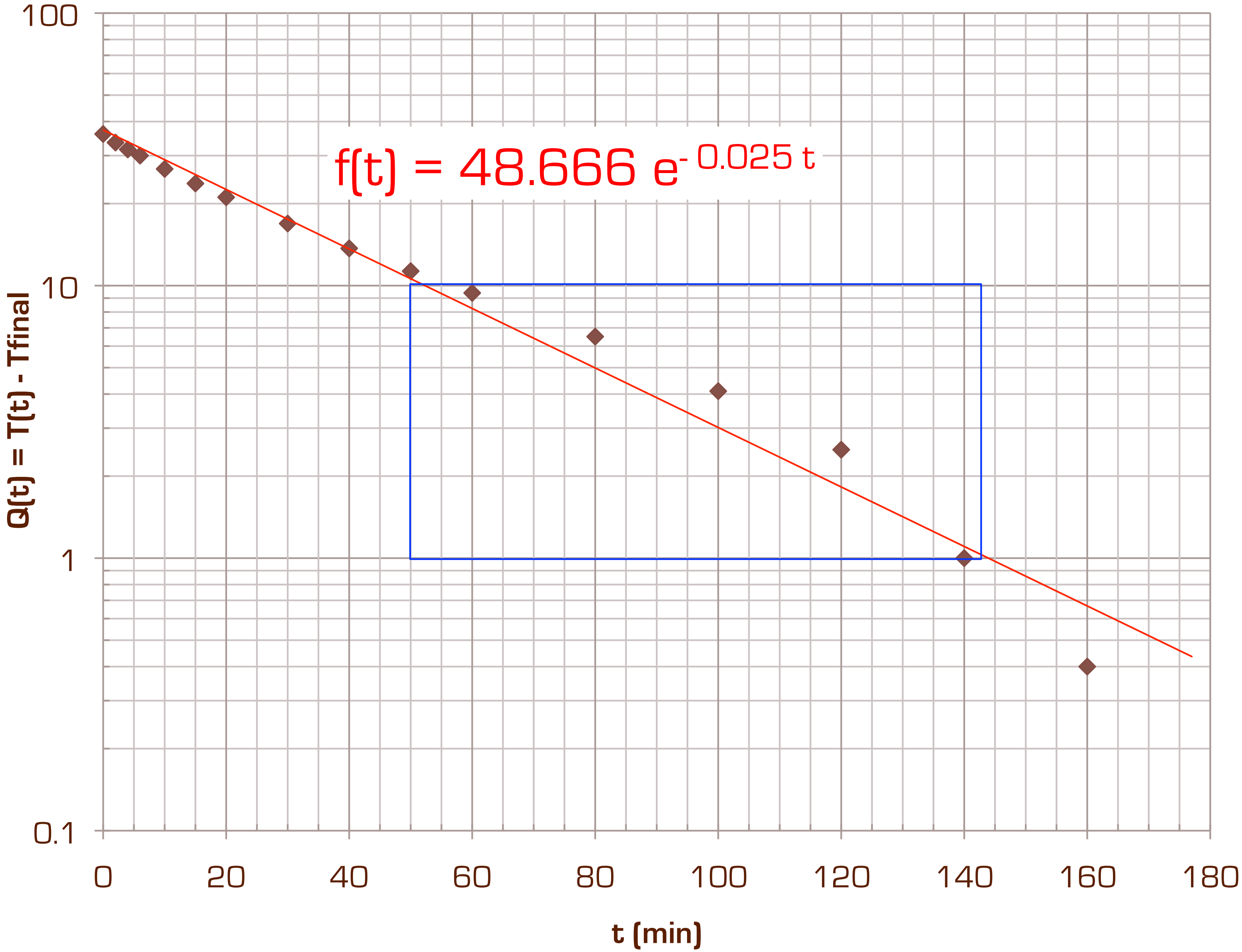
t (min)	T-T(3h) °C
0	36
2	33.5
4	31.6
6	30
10	26.8
15	23.7
20	21.1
30	16.9
40	13.7
50	11.3
60	9.4
80	6.5
100	4.1
120	2.5
140	1
160	0.4
180	0



4. Echelle logarithmique

Refroidissement de l'eau : tracer en échelle logarithmique

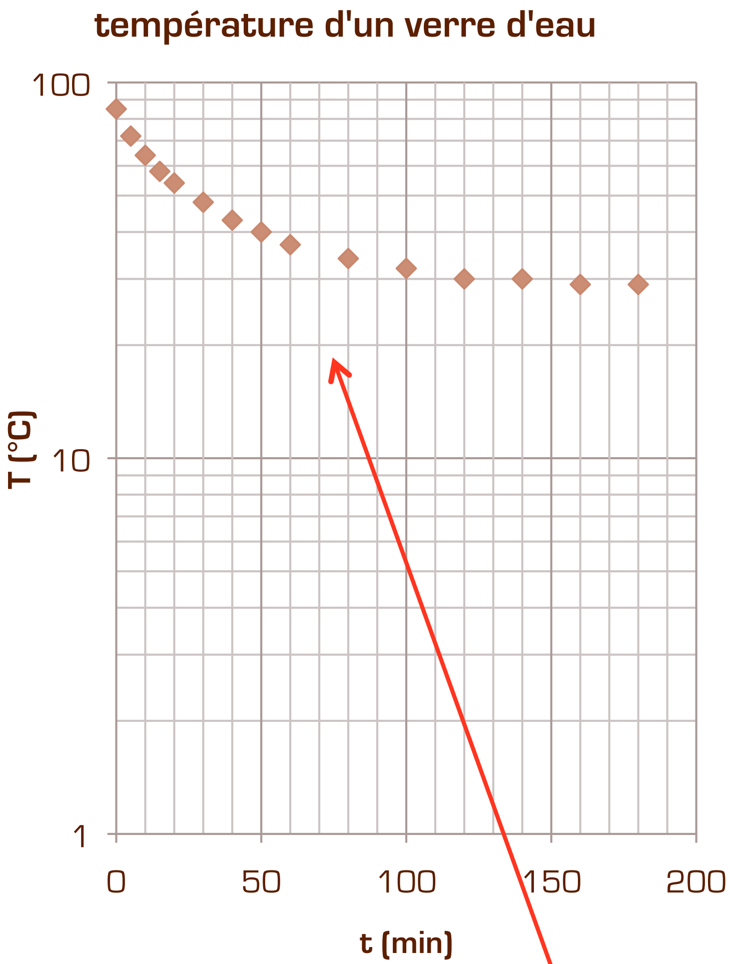
t (min)	T-T(3h) °C
0	55.3
2	50.3
4	46.1
6	42.7
10	37.1
15	31.7
20	27.5
30	21.1
40	16.6
50	13.3
60	10.7
80	7.1
100	4.8
120	2.4
140	1.9
160	0.8
180	0

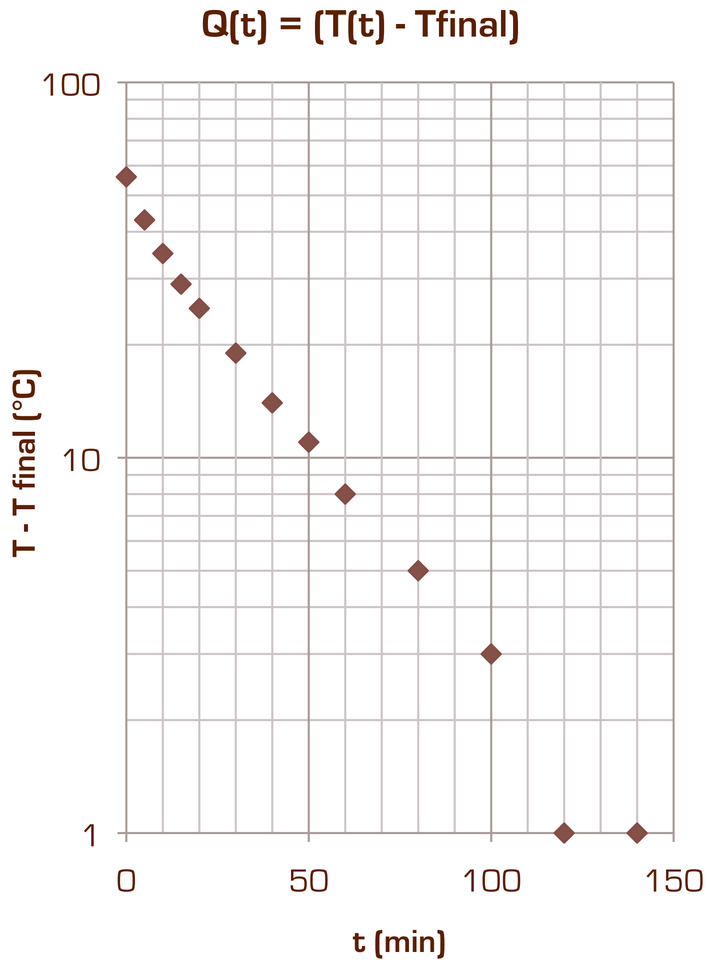


4. Echelle logarithmique

Refroidissement de l'eau : tracer en échelle logarithmique

t(min)	T (°C)	T-T(3h) (°C)
0	62.5	36
2	60	33.5
4	58.1	31.6
6	56.5	30
10	53.3	26.8
15	50.2	23.7
20	47.6	21.1
30	43.4	16.9
40	40.2	13.7
50	37.8	11.3
60	35.9	9.4
80	33	6.5
100	30.6	4.1
120	29	2.5
140	27.5	1





attention : pas pour $T(t) = T_{final} + Q_0\, e^{kt}$!