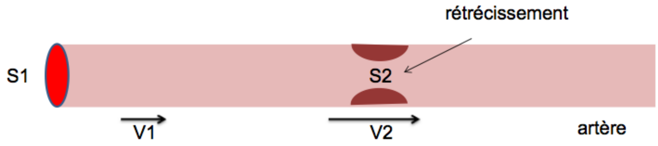
Contrôle continu – 6 novembre 2015 - corrigé

Durée : 2h. Documents interdits. Dans les exercices, pour chaque question, donner une formule littérale avant de faire l'application numérique. Toute grandeur physique doit être donnée avec ses unités.

1) EXERCICE : Rétrécissement d'une aorte.



Un examen écho-doppler permet de mesurer les vitesses V_1 et V_2 du sang le long d'une artère et en correspondance d'in rétrécissement (voir figure) :

V_1 = 1 m/s
V_2 = 4 m/s

Le diamètre de l'artère en S_1 est aussi mesuré par échographie :
d_1 = 20 mm.

1) Utiliser la conservation du débit pour calculer le diamètre d_2 au niveau du rétrécissement, puis le rapport des surfaces S_2/S_1.

Le débit Q s'écrit Q = ΔVol/Δt avec ΔVol le volume qui traverse une section donnée pendant un temps Δt.

En écrivant ΔVol = S Δx puis la longueur Δx = V Δt on peut récrire Q = S V.

La conservation du débit s'écrit alors $Q_1 = S_1V_1 = S_2V_2$, d'où

$S_2/S_1 = V_1/V_2 = ¼$

et puisque $S = \pi d^2/4$, on trouve $d_2^2/d_1^2 = ¼$, $d_2/d_1 = ½$ et finalement $d_2 = ½\, d_1$ = 10 mm.

2) En supposant que les effets de viscosité soient ici négligeables, le théorème de Bernoulli s'applique et permet d'écrire

$$\frac{1}{2}\rho\, V^2 + P = cte$$

le long de l'artère, avec $\rho \approx 1060$ kg/m^2 a masse volumique du sang, V sa vitesse et P sa pression. Appliquer le théorème pour calculer la pression P_1 en amont du rétrécissement (en S_1) si la pression P_2 est de 90 mmHg.

$½ \rho V_1^2 + P_1 = ½ \rho V_2^2 + P_2$

$P_1 - P_2 = ½ \rho (V_2^2 - V_1^2) = ½ \, 1060 \text{ kg m}^{-2} (16 - 1) \text{ m}^2 \text{s}^{-2} = 7950$ Pa

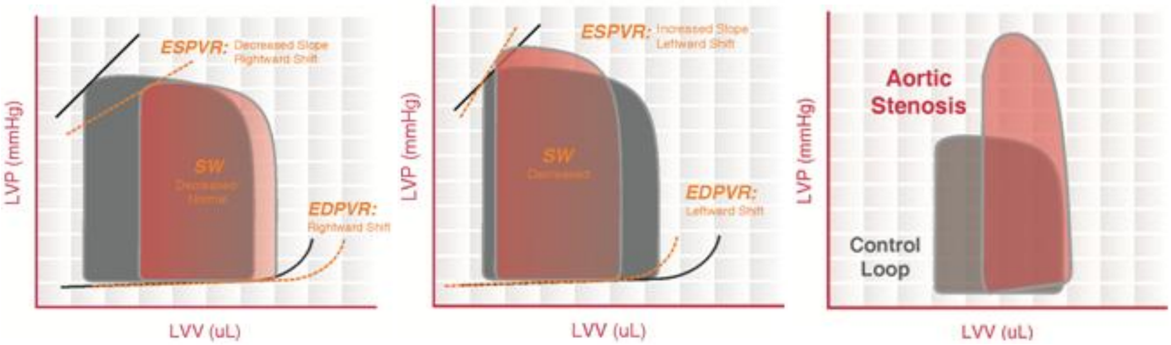
or 10^5 Pa = 760 mmHg : donc 7950 Pa = (7950 *760 / 10^5) mmHg = 60 mmHg.

Finalement, on a donc $P_1 = P_2$ + 60 mmHg = 150 mmHg.

3) Que vaut, dans les mêmes hypothèses, la pression en aval du rétrécissement ?

La pression en aval ou en amont est la même, car le théorème de Bernouilli s'applique de la même manière tout le long d'une ligne de flux du fluide en écoulement. On trouverait donc la même valeur que P_1.

2) ANALYSE : cycle cardiaque.



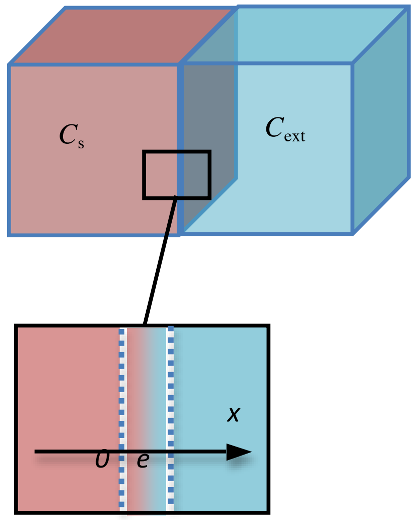
Dans les trois figures ci-dessous, un cycle pression-volume contrôle (en gris) est comparé à trois cycles caractéristiques de trois pathologies cardiaques différentes : une cardiomyopathie dilatée, une hypertrophie ventriculaire gauche et un rétrécissement aortique, respectivement. Dans les trois figures, on trace la pression ventriculaire gauche (LVP) en fonction du volume ventriculaire gauche (LVV).

A partir des figures, commentez le rôle diagnostic de ce genre de diagramme et, si vous le souhaitez, sur les effets des pathologies considérées.

Une page maximum.

Le diagramme pression-volume permet de décrire le comportement du cœur au cours d'un cycle, et notamment de visualiser le volume de sang expulsé (différence entre les valeurs maximale et minimale du volume LVV) et les pressions exercées. De plus, il permet d'avoir une mesure directe du travail fourni par le cœur, qui correspond à la surface contenue dans le cycle.
En cas de comportement pathologique, la comparaison entre le diagramme observé et le diagramme de référence pour un cœur sain donnent également des informations immédiates sur le type de défaillance. Par exemple, dans le cas de la cardiomyopathie dilatée, on observe une augmentation à la fois du volume minimal et du volume maximal du ventricule, sans une grande altération des pressions : on peut donc en conclure que le ventricule est plus grand que dans le cas normal, ce qui peut être dû à une relaxation du muscle cardiaque. Dans le cas de l'hypertrophie ventriculaire, on observe au contraire une réduction du volume total de sang éjecté, due à une réduction du volume maximal et une augmentation du volume minimal. En association avec ces modifications, on observe une augmentation de la pression maximale enregistrée dans le ventricule. Ces données sont compatibles avec l'hypothèse d'une hypertrophie du muscle cardiaque qui, gonflé, d'une part réduit son volume interne, d'autre part perd probablement en élasticité. L'augmentation de pression apparaît alors comme une conséquence de cette réduction du volume accessible, de cette « manque de place ». Dans le troisième cas présenté on parle de rétrécissement aortique : on imagine donc que l'expulsion du sang à la contraction ventriculaire est contrée par un conduit de sortie insuffisamment large. Les conséquences observées dans le diagramme semblent logiques car on observe une augmentation de la pression, d'une part, et une augmentation du volume ventriculaire minimal, d'autre part : on peut en déduire que le sang, empêché de sortir, ne vide pas complètement le ventricule, et exerce une pression augmentée car la contraction du muscle cardiaque est toujours aussi efficace que dans le cas d'un cœur sain.

3) EXERCICE : Rein artificiel.



Un dispositif de rein artificiel est constitué de deux compartiments séparés par une membrane d'épaisseur *e*, perméable à l'urée.

Dans un des compartiments circule le sang, dont la concentration en urée est C_s.

Dans l'autre compartiment un flux continu de solution permet de maintenir la concentration d'urée à une valeur négligeable, $C_{ext} = 0$.

La deuxième loi de Fick,

$$\frac{\partial C}{\partial t}(x,t) = -D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x,t)$$

permet de calculer la concentration en urée à travers la membrane en connaissant ses valeurs aux deux bords : $x = 0$ et $x = e$.

1) Simplifier la deuxième loi de Fick en considérant que le système est en régime stationnaire.

En régime stationnaire la concentration ne change pas au cours du temps, donc la dérivée est nulle : $\partial C / \partial t = 0$. Il en suit : $0 = \partial^2 C / \partial x^2$.

2) Montrer que la solution de l'équation de Fick obtenue en (1) est une loi linéaire, $C(x) = A\,x + B$

La dérivée seconde par rapport à x de $C(x) = Ax+B$ est nulle, donc on a bien $0 = \partial^2 C / \partial x^2$.

3) Ecrire explicitement les conditions aux bords : $C(0)$ et $C(e)$.

En suivant ce qui est expliqué dans le sujet on a $C(0) = C_S$, $C(e) = C_{ext} = 0$.

4) Déterminer les constantes A et B qui permettent de satisfaire les conditions aux bords.

En utilisant les conditions au bord, on peut écrire :

$C(0) = A \cdot 0+B = B = C_S$

$C(e) = A \cdot e+B = 0$

d'où $B = C_S$, et $A = - C_S / e$

5) Tracer la concentration $C(x)$ en fonction de x.

En remplacent, on a $C(x) = C_S (1 - x/e)$. On peut vérifier qu'on a bien $C(0) = C_S$ et $C(e) = 0$.

6) Que vaut le flux d'urée,

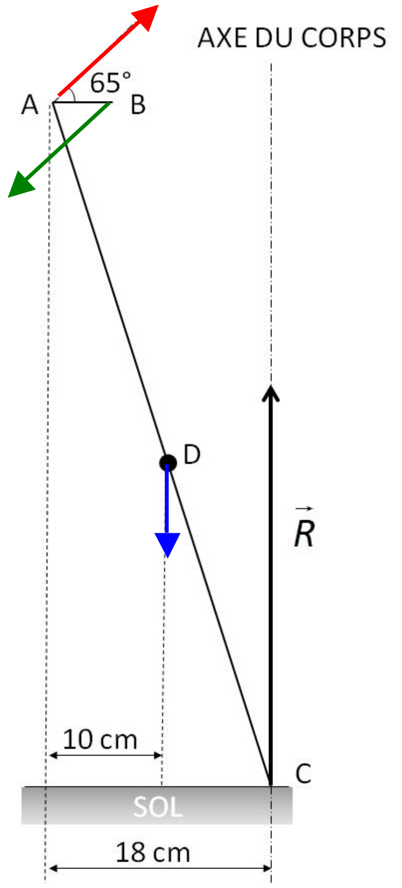
$$j(x,t) = -D\,\frac{\partial C}{\partial x}(x,t)\ ?$$

En dérivant $C(x)$ on a $\partial C(x) / \partial x = A = - C_S/e$, d'où

$j = D\, C_S / e$.

On peut vérifier que $j > 0$, ce qui est compatible avec une concentration en urée plus haute en $x>0$ que en $x>e$.

4) EXERCICE : Equilibre



Un homme se tient debout, sur une seule jambe. Il est soumis à deux forces : son poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$ du sol. La position de la jambe d'appui peut être schématisée comme sur la figure ci-dessous : le segment AB représentent l'épiphyse supérieure du fémur, d'une longueur de 8 cm ; C est le point d'appui sur le sol et D le centre de gravité de la jambe.

1. La masse de cet homme est de 70 kg. Que vaut R ?

La réaction du sol R doit équilibrer le poids pour que l'homme soit à l'équilibre : donc, R = mg ≅ 700 N.

2. La masse de la jambe est de 10 kg. Sur la figure, représentez son poids $\vec{P_j}$. Justifiez.

Le poids est $P_j = m_j g$ ≅ 100 N, vers le bas, et son point d'application est au centre de gravité de la jambe, point D (vecteur en bleu).

3. Tracez (et justifiez vos tracés soigneusement, notamment les normes des vecteurs) :
   – la force exercée par les muscles adducteurs sur le grand trochanteur du fémur, au point A. Elle fait une angle de 65° avec l'horizontale,

Vecteur en rouge

   – la force exercée par le bassin sur la tête du fémur, s'exerçant au point B.

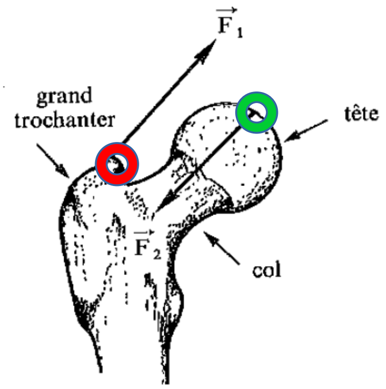
Vecteur en vert

$F1+F2+Pj+R=0$

Les projections verticales donnent donc F1h + F2h = 0 et F1v + F2v + Pj + R = 0

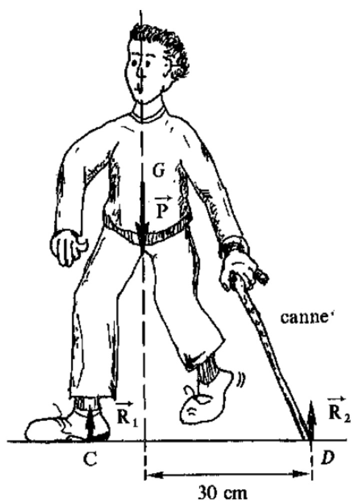
et de plus (AB)h.F1v + (BD)h.Pj + (BC)h.R = 0 i.e. 0,08 F1v + 0,02 Pj = 0,1R

Pour mémoire, une représentation schématique de la tête du fémur est donnée ci-dessous : →



Afin de soulager cette articulation, notre homme s'aide d'une canne utilisée su côté opposé à celui de la jambe d'appui. Cette position est représentée ci-dessous. Expliquez qualitativement pourquoi est-ce que les muscles adducteurs du bassin, comme la tête du fémur, sont grandement soulagés.

5. Tracez un schéma de forces équivalent à celui que vous avez complété pour le cas normal mais cette fois en tenant compte de l'effet de la canne.



La canne sert d'appuis, et une composante R2 de la réaction du sol est telle que $R1+R2+P=0$ (R2 ~20 % de poid du corps). Cela va bien au-delà d'une simple diminution du poid du corps exercé sur le pied. Le contact de la canne avec le sol (point D) est à ~30 cm de l'axe du corps et on a : $OC \wedge R1+OD \wedge R2=0$ce qui donne une répartition des forces très différente !

Figures correction : voir ci-dessous