Recherche Coopérative sur Programme nº 25

J. M. Maillard
A. Georges
D. Hansel
P. Le Doussal

Variétés algébriques en mécanique statistique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1987, tome 38
« Conférences de H. Grosse, M. Henneaux, J.M. Maillard, M. Rosso et W. Zimmermann »,
, exp. nº 3, p. 35-53

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1987__38__35_0>

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme nº 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

VARIETES ALGEBRIQUES EN MECANIQUE STATISTIQUE

J.M. Maillard

L P T H E Tour 16, 1er étage

4, place Jussieu

75 230 PARIS CEDEX 05

et A. Georges,

D. Hansel,

P. Le Doussal,

INTRODUCTION

La reconnaissance de la relation triangle-étoile (aussi appelée équation de Yang-Baxter, ou encore équations de factorisation) comme concept fondamental pour la compréhension des modèles integrables en mécanique statistique sur réseaux (ou en théorie quantique des champs) a de toute évidence été à l'origine des progrès indéniables réalisés sur ces modèles durant les dix dernières années [1].

Dans la pratique la recherche de nouveaux modèles intégrables s'est donc vu ramenée au problème (a priori) plus simple de la recherche de nouveaux modèles satisfaisant les équations dites de Yang-Baxter. Presque toutes les solutions connues à l'heure actuelle pour ces équations font intervenir une paramétrisation de celles-ci en termes de fonctions rationnelles ou elliptiques.

Les rares exemples qui donnaient quelques espoirs de sortir de cet " étau " semblent confirmer cet état de fait : des modèles bidimensionnels, où une uniformisation par des fonctions thétas de genre g intervenait, se sont avérés en définitive ne pas satisfaire les équations de Yang-Baxter [2] et le seul exemple non trivial de modèle soluble en dimension trois (qui satisfait une généralisation tridimensionnelle des équations de Yang-Baxter, la relation tétraèdre), le modèle de Zamolodchikov-Baxter, [3] [4], présente en fait un cousinage marqué (surtout en ce qui concerne la fonction de partition) avec le modèle de fermion libre de dimension deux de Fan et Wu [5].

Les efforts conjugués des spécialistes du domaine n'ont guère fait qu'augmenter " l'herbier " des modèles bidimensionnels ayant une uniformisation uniformisation rationnelle ou elliptique [6] [7].

Une telle situation, qui peut paraitre assez décevante, semble indiquer qu'il y a véritablement fort peu de modèles intégrables.

L'analyse de ces modèles, (voir même une recherche exhaustive de ceux-ci passe nécessairement par une meilleure compréhension des problèmes de paramétrisation de ces modèles. Nous allons montrer que tout modèle sur réseau, intégrable en mécanique statistique est naturellement paramétré par des variétés algébriques (dans l'espace des paramètres du modèle) qui possèdent en général des propriétés remarquables (existence d'un ensemble infini discret de transformations birationnelles laissant ces variétés invariantes.

Ces structures algébriques sont suffisamment contraignantes pour qu'une classification exhaustive des modèles solubles puisse être envisagée.

Nous montrons également (en nous appuyant sur l'exemple de l'analyse des zéros de la fonction de partition du modèle d'Ising bidimensionnel) comment un choix de " bonnes variables " algébriques (correspondant aux variétés algébriques précédentes) simplifie l'analyse des modèles solubles.

Nous étudierons enfin les relations existant entre ces variétés algébriques et d'autres variétés algébriques remarquables (dites variétés de désordre [8] intervenant dans les modèles de mécanique statistique.

1 PARAMETRISATION DES MODELES SOLUBLES PAR DES VARIETES ALGEBRIQUES DE TYPE " NON GENERAL "

Pour la clarté de l'exposé nous développons ces idées sur l'exemple peut être le plus représentatif des modèles solubles en mécanique statistique sur réseau, le modèle à huit vertex symétrique (encore appelé modèle de Baxter [9]

Cependant il doit être entendu que ces idées ne sont nullement restreintes à ce modèle précis mais s'appliquent à tous les modèles intégrables bidimensionnels (au sens par exemple de l'existence d'équations de Yang-Baxter) voir même aux modèles intégrables en dimension trois (ou plus).

1.1 Le modèle de Baxter.

Nous rappelons tout d'abord brièvement certaines données de base concernant l'intégrabilité du modèle de Baxter (sur réseau carré).

Les paramètres du modèle sont constitués par quatre paramètres homogènes notés d'ordinaire a, b, c, et d, ((a, b, c, d) $\in \mathbb{P}_3$).

La relation de factorisation de Yang-Baxter correspond à un système de six équations homogènes et trilinéaires dans trois jeux de ces quatre paramètres : (a, b, c, d), (a', b', c', d',) et (a", b", c", d",). Typiquement l'une de ces six équations s'écrit :

$$ad'd" + cb'b" = ac'c" + ca'a"$$

Ce système d'équations admet des solutions non trivialles si les relations algébriques suivantes sont satisfaites :

$$F_1(a, b, c, d) = F_1(a', b', c', d') = F_1(a", b", c", d")$$

$$F_2(a, b, c, d) = F_2(a', b', c', d') = F_2(a", b", c", d")$$

avec

$$F_1 (a, b, c, d) = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab}$$

$$F_2(a, b, c, d) = \frac{ab}{cd}$$

Les équations de Yang-Baxter assurent, quel que soit le nombre de colonnes du réseau carré N, la commutation des matrices de transfert T_N (ici ce sont matrices $2^N \times 2^N$) correspond à deux parmi les trois jeux précédents de paramètres :

$$\left[T_N(a, b, c, d), T_N(a', b', c', d') \right] = 0$$

Cette commutation est l'expression même de l'intégrabilité du modèle.

Réciproquement la commutation des deux matrices T_N et T'_N peut toujours s'écrire de façon algébrique $\phi_{I,N}(T_{N\alpha\beta}) = \phi_{I,N}(T'_{N\alpha\beta})$, les $\phi_{I,N}$ étant des expressions rationnelles homogènes à coefficients entiers des coefficients $T_{N\alpha,\beta}$ (resp $T'_{N\alpha,\beta}$) qui sont à leur tour des expressions polynomiales homogènes à coefficients entiers des paramètres (a,b,c,d)(resp(a',b',c',d')).

Ceci assure donc l'existence d'expressions algébriques telles que F_1 et F_2 .

En fait nous disposons a priori d'une infinité de telles expressions (correspondant aux différentes valeurs de N) : l'intégrabilité du modèle demande donc que cet ensemble infini d'équations soit redondant et se ramène à un nombre fini de celles-ci, ce nombre étant inférieur au nombre de paramètres du modèle. (Dans le cas contraire nous serions ramenés à la commutation triviale d'une matrice avec elle même). Dans le cas du modèle de Baxter nous sommes donc conduits de façon naturelle à un feuilletage de l'espace des paramètres $\mathbb{P}_3$ en courbes elliptiques :

$$F_1(a, b, c, d) = K_1(\text{constante})$$

$$F_2(a, b, c, d) = K_2(\text{constante})$$

C'est la représentation projective bien connue, due à Clebsch, d'une courbe elliptique comme intersection de deux quadriques dans P_3 (biquadratique de Clebsch). Appelons v un paramètre décrivant une telle courbe. Nous avons l'uniformisation suivante :

$a = \rho.sn(v+\eta,k)$, $\quad b = \rho.sn(v-\eta,k)$

$c = \rho.sn(2\eta,k)$

$d = \rho.k.sn(2\eta,k)sn(v-\eta,k)sn(v+\eta,k)$

$K_1 = 2cn(2\eta,k).dn(2\eta,k)$

$K_2 = k.sn^2(2\eta,k)$

(sn, cn, dn sont les fonctions elliptiques de Jacobi de module k).

Avec cette uniformisation les relations de Yang-Baxter reviennent à dire que le module k et le point de normalisation η sont les mêmes pour les trois jeux de paramètres et que l'on a de plus la relation sur les paramètres v :

$v + v' + v'' = \eta$

indiquant un lien manifeste (dans ce cas précis) entre ces relations et le caractère abélien de la variété algébrique.

Signalons également le fait que la fonction de partition (par site) du modèle satisfait des propriétés d'automorphie par rapport à deux transformations birationnelles qui sont chacune des involutions; ces relations dites relations "d'inverse" [10] [11] correspondant dans ce cas précis aux transformations:

$$I : a \to \frac{a}{a^2 - d^2}, \quad b \to \frac{b}{b^2 - c^2}, \quad c \to \frac{-c}{b^2 - c^2}, \quad d \to \frac{-d}{a^2 - d^2},$$

$$J : a \to \frac{a}{a^2 - c^2}, \quad b \to \frac{b}{b^2 - d^2}, \quad c \to \frac{-c}{a^2 - c^2}, \quad d \to \frac{-d}{b^2 - d^2},$$

On vérifie aisément que F_1 et F_2 (et donc k et η) sont invariants par I et J . Avec la paramétrisation précédemment introduite les deux involutions sont manifestement des réflections :

$$I : v \to 2\eta - v$$

$$J : v \to -2\eta - v$$

Ces deux involutions engendrent un groupe infini discret G isomorphe au au produit semi-direct $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$.

1.2 Cas général.

Dans le cas général de modèles intégrables de mécanique statistique sur réseau (avec un poids de Boltzmann local) la situation précédente se généralise de la manière suivante :

- l'espace des paramètres est constitué par n paramètres homogènes

$$(x_1, \ldots x_n) \in P_{n-1}$$

- il existe un ensemble de transformations birationnelles $I_1 \ldots I_r$ par rapport auxquelles la fonction de partition est automorphe

$$I_\alpha : x_i \longrightarrow I_\alpha (x_i) = \frac{P_{i,\alpha} (x_1 \ldots x_n)}{Q_{i,\alpha} (x_1 \ldots x_n)}$$

(P_α et Q_α sont des polynômes homogènes à coefficients entiers) [12]

- il existe un ensemble de fractions rationnelles homogènes à coefficients entiers) F_i (i=1....m) correspondants à la commutation des matrices de transfert associées à deux points de $\mathbb{P}_{n-1}$ [13] [14]

- il est possible de démontrer que si la relation de Yang-Baxter est satisfaite pour trois points dans $\mathbb{P}_{n-1}$, elle est automatiquement vérifiée pour trois autres points déduit des précédents par des actions des I_α [12] [13]

- de la remarque précédente on peut déduire que les expressions F_i doivent être invariantes par les transformations birationnelles I_α qui forment un groupe en général infini G [12]

Nous voyons donc que les modèles intégrables sont naturellement paramétrisés par des variétés algébriques (définies par l'intersection des équations F_i = constante) qui, dans le cas général, doivent admettre un ensemble infini d'automorphismes.

Ceci exclue les variétés algébriques dites "de type général" mais ne restreint pas nécessairement les variétés à être des variétés abéliennes (sauf lorsque la variété est de dimension un).

1.3 Courbes algébriques.

Lorsque la variété est de dimension un elle ne peut être qu'une courbe de genre 0 ou 1 [12] . Ce résultat peut être compris de façon heuristique : les courbes de type général (de genre $g > 1$ pour lesquelles il faudrait envisager une uniformisation par des fonctions automorphes et non des fonctions thétas de genre g, ne pas confondre la courbe et sa Jacobienne) se distinguent des courbes de genre 0 ou 1 par l'existence pour celles-ci de points particuliers en nombre fini, les points de Weierstrass.

On comprend qu'un groupe discret infini ait quelque difficulté à laisser invariant un tel ensemble fini de points.

Ayant obtenu une caractérisation aussi précise des courbes intervenant dans les modèles intégrables, on peut se poser en retour le problème de trouver toutes les représentations projectives (dans P_n) d'une courbe elliptique; les résultats sont les suivants : les seuls cas où la courbe elliptique est donnée comme intersection complète sont la cubique plane dans $\mathbb{P}_2$ et la biquadratique de Clebsch (intersection de deux quadriques dans $\mathbb{P}_3$).

Les autres représentations dans $\mathbb{P}_{n-1}$ ($n>4$) correspondent à des intersections non complètes. Elles peuvent toujours être paramétrées comme suit :

$$x_i = \sigma(v-a_{i1}) \ldots \sigma(v-a_{in}) ,$$

avec $\sum_j a_{ij}$ est indépendant de i, σ désignant la fonction sigma de Weierstrass. Le cas des intersections non complètes peut sembler à première vue assez académique pour la mécanique statistique; nous en avons pourtant un exemple avec le modèle dit " d'hexagones durs " pour laquelle la paramétrisation est assurée par une courbe elliptique donnée comme intersection d'une quadrique, d'une cubique et d'une quartique dans $\mathbb{P}_4/\mathbb{P}_1$.

nous avons les relations suivantes entre les F_i correspondants [15]:

$F_1 = 1 / F_2$ et $F_1 + F_2 = F_3$

$$F_1 = \frac{x_1^2 - x_4 x_5}{x_2 x_3}$$

$$F_2 = \frac{x_4 x_3^2 + x_5 x_2^2 - x_1 x_4 x_5}{x_1 x_2 x_3}$$

$$F_3 = \frac{x_1 x_2^2 x_5 + x_1 x_3^2 x_4 - x_4^2 x_5^2 - x_2^2 x_3^2}{x_2 x_3 x_4 x_5}$$

Sur ces expressions on vérifie immédiatement que l'intersection est incomplète (comme il se doit) car elle contient les variétés "parasites"

$x_1 = x_2 = x_4 = 0$ et $x_1 = x_3 = x_5 = 0$

1.4 Surfaces algébriques.

Pour une variété de dimension deux, la situation est plus compliquée [16] : il existe des invariants qui jouent en quelque sorte le rôle du genre pour les courbes (dimension de Kodeira...)

La classification des surfaces algébriques peut être schématisée comme suit : on peut définir des surfaces de type général qui n'admettent, là encore, qu'un nombre fini d'automorphismes et sont donc exclues lorsque G est infini.

Les surfaces qui ne sont pas de type général se répartissent selon plusieurs catégories : les surfaces rationnelles ($\mathbb{P}_2$), les surfaces réglées ($\Gamma \times \mathbb{P}_1$), les surfaces elliptiques (fibration dont la courbe de base est elliptique), les surfaces abéliennes, les surfaces K_3 (dont le diviseur canonique, ensemble des zéros d'une 2-forme, est trivial).

Toutes ces surfaces peuvent admettre un ensemble infini d'automorphismes. Si la surface est donnée comme intersection complète, nous sommes réduits aux surfaces rationnelles (cubique dans $\mathbb{P}_3$, intersection de deux quadriques dans $\mathbb{P}_4$) et aux surfaces K_3 (quartique dans $\mathbb{P}_3$, intersection d'une cubique

et d'une quadrique dans $\mathbb{P}_4$, intersection de trois quadriques dans $\mathbb{P}_5$).
La situation est donc quelque peu décevante pour les chercheurs de nouveaux modèles solubles : dans le cas simple d'une intersection complète nous n'avons pas exclu les surfaces K_3 pour lesquelles une paramétrisation explicite est plus que problématique; une paramétrisation explicite non rationnelle (fonction thêta de genre 2 pour certaines surfaces abéliennes par exemple) est, quant à elle, nécessairement associée à une intersection non complète ce qui complique singulièrement la mise en évidence des F_i. Fort peu de choses sont connues sur la classification des variétés de dimension > 2, cependant il est toujours possible de définir (et d'exclure) des variétés de type général; il est par ailleurs possible de construire de facon systématique des variétés algébriques invariantes par le groupe infini discret G, qui permettaient ainsi de se ramener (en prenant l'intersection avec celles-ci) à des variétés de dimension plus basses (dans le meilleur des cas les dimensions 1 et 2 évoquées précédemment).

Une remarque amusante : lorsque nous considérons des points x_i rationnels, leurs transformés par le groupe infini G sont également rationnels ainsi que les valeurs des constantes

$$K_\alpha = F_\alpha (x_1 \ldots . x_n)$$

La variété algébrique définie par les équations diophantiennes précédentes admet donc un ensemble infini de points rationnels (pour lesquels nous avons un procédé de construction parfaitement défini). Dans le cas où la variété est une courbe algébrique, le théorème de Faltings nous ramènerait là encore à conclure que le genre de cette courbe doit être nécessairement 0 ou 1 [17] . Dans le cas de variétés de dimension plus grande il n'existe que des conjectures (Lang, Votja...) : les modèles intégrables en mécanique statistique pourraient ainsi fournir des exemples de variétés de dimension $\geqslant 2$ admettant (si de tels modèles existent!) un nombre infini de points rationnels, invalidant certaines de ces conjectures.

1.5 Groupe fini.

Evidemment l'étude précédente repose sur le caractère infini du groupe G. Si le groupe est fini cela signifie que quelque soit $g \in G$ il existe un entier p tel que :

$$g^p (x_1,...x_n) = (x_1,...x_n) :$$

la finitude du groupe signifie donc que nous sommes restreints à des variérés algébriques très (trop) précises dans l'espace des paramètres du modèle : par exemple si nous considérons l'exemple du modèle de Potts scalaire à q états, nous devons alors nous restreindre à un ensemble de valeurs qui furent remarquées dans de nombreux contextes (nombre de Tutte-Behara [18] , covariance conforme [19] , exposants critiques rationnels [20] ...) :

$$q = 2 + 2\cos 2\pi \frac{m}{n}$$

$$(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

2.1 VARIETES ALGEBRIQUES ET ZEROS DES FONCTIONS DE PARTITION.

La résolution des modèles intégrables utilise de façon déterminante la paramétrisation de ces modèles ainsi qu'en témoigne la construction explicite de l'ansatz de Bethe [21] . Nous allons montrer dans ce paragraphe comment l'utilisation des variétés algébriques F_i précédemment définies simplifie considérablement l'analyse des zéros des fonctions de partition des modèles intégrables (en l'occurrence le modèle d'Ising bidimensionnel). Du fait des propriétés d'automorphie de la fonction de partition par rapport au groupe infini G, l'ensemble des zéros de la fonction de partition doit être un ensemble globalement invariant par un sous-groupe infini discret de G : il doit, a priori, être décrit plus simplement à l'aide des F_i qui sont les " bonnes " variables du modèle (et qui sont de plus invariants par ce sous-groupe).

2.1.1 Réseau carré

Considérons par exemple la fonction de partition par site, $\mathcal{Z}$, du modèle d'Ising anisotrope sur réseau carré, qui est donnée, dans la limite thermodynamique, par une double intégrale (ou de façon équivalente une

intégrale d'une intégrale elliptique de troisième espèce) :

$$\ln\left(\frac{Z}{2}\right) = \frac{1}{8\pi^2} \iint_0^{2\pi} dq_1\, dq_2\, \ln\left(ch2K_1 chK_2 - sh2K_1 cosq_1 - sh2K_2 cosq_2 \right)$$

où K_1 et K_2 sont les constantes de couplages horizontales et verticales du modèle.

L'ensemble des zéros du modèle correspond à l'annulation de l'argument du logarithme. Dans le cas du modèle isotrope ($K_1 = K_2 = K$), les zéros se placent sur un ensemble de deux cercles (cercles de Fisher, fig 1) dans le plan complexe $b=e^K$. Pour ce modèle, nous avons une seule expression algébrique F_i qui, en l'occurrence, s'identifie avec le module k de l'intégrale elliptique de troisième espèce précédente : $k = sh2K_1 sh2K_2$.

Les deux cercles de Fisher, de la limite isotrope ($k = sh^2 2K$),deviennent dans la " bonne " variable k, le cercle unité $|k| = 1$. Bien que l'ensemble des zéros (dans le plan complexe k) dépende de deux paramètres q_1 et q_2, cet ensemble est inclus dans le cercle unité, nous avons en effet :

$$1 - \frac{k_L}{2} (cosq_1 + cosq_2) = 1 - k_L \cos\omega_1 \cos\omega_2 = 0$$

$$\omega_1 = \frac{q_1 + q_2}{2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{q_1 - q_2}{2}, \quad k_L = \frac{2\sqrt{k}}{1 + k} \qquad (1)$$

qui conduit à $\sqrt{k} = e^{i\theta}$,

en posant $\cos\theta = \cos\omega_1 \cos\omega_2 = x$ (2)

Il est même possible d'exprimer très simplement, en utilisant ces " bonnes " variables, une quantité réputée complexe, la distribution des zéros (elle découle de l'uniformité de la distribution dans les variables q_1 et q_2 et du changement de variable (1,2)) :

en posant $u = \cos\omega_1$ $\qquad$ $v = \cos\omega_2$

nous avons $d\omega_1 = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$

la distribution sur la variable x est donc

$$\int \frac{du\,dv}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}} \cdot \delta(x-uv) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\frac{u^2}{x^2})}}$$

$$= x \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1-x^2w^2)(1-w^2)}}$$

Cette forme différentielle est bien connue dans le cadre de la théorie des courbes elliptiques et possède certaines propriétés remarquables. Ainsi si nous effectuons le changement de variables

$$w \rightarrow z : z^2\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2 \cdot (1-x_L \cdot w^2) - x_L^4 \cdot w^2(1-w^2) = 0$$

où $x_L = \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$

ce changement donne sur cette forme différentielle :

$$\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-x^2w^2)}} = \pm \frac{2}{1+x} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-x_L^2 \cdot z^2)}}$$

La distribution de zéros présente donc des propriétés de covariance relativement à une transformation (qui n'est autre que la transformation de Landen) portant sur le module des fonctions elliptiques intervenant dans cette distribution à savoir, $x = \mathrm{Re}(\sqrt{k})$, (et non plus k). Signalons que lorsque l'on se restreint à l'axe réel (et non plus le cercle unité) la transformation de Landen sur k, ($k \rightarrow \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}$) qui est une transformation d'ordre infini (à la différence de la transformation de Jacobi $k \rightarrow \sqrt{1-k}$ qui est une involution) a pour point fixe k=1, le point critique.
Il est donc possible d'identifier cette transformation (ainsi que d'autres isogénies de la courbe elliptique telles que la transformation de Legendre...) à un générateur du groupe de renormalisation. Notons cependant que l'action

du groupe de renormalisation est, en quelque sorte, " orthogonale " à celle du groupe G qui, lui, laisse le module k invariant.

2.1.2 Réseau nid d'abeille (ou triangulaire)

Une étude analogue sur le modèle d'Ising isotrope sur réseau nid d'abeille peut être conduite sur l'ensemble des zéros dans le plan complexe $z=e^{-2K}$ (voir figure 1); cet ensemble est donné par l'équation :

$$z^4 - (2\lambda + 2)z^3 + (6 + 4\lambda)z^2 - (2\lambda + 2)z + 1 = 0$$

avec $\lambda = \cos q_1 + \cos q_2 + \cos(q_1 + q_2)$

En posant $\alpha = z + \frac{1}{z}$

$$\alpha^2 - 2\mu\alpha + 4\mu = 0$$

avec $\mu = 2 + 2\lambda$ $\qquad -\frac{1}{2} < \mu < 4$

soit $\alpha = 2 + 2e^{i\theta}$ $\qquad$ et $\qquad -2 < \alpha < 1$

Le module k des fonctions elliptiques intervenant sur ce modèle isotrope est donné par :

$$k = \frac{16\,(1 - z + z^2)\,z^3}{(1 - z)^6\,(1 + z)^2} = \frac{16\,(\alpha - 1)}{(\alpha - 2)^2\,(\alpha^2 - 4)}$$

Dans cette nouvelle variable la courbe de la figure 2 devient la réunion du cercle unité et d'un intervalle de l'axe réel.

$$\alpha = 2 + 2e^{i\theta} \Longrightarrow k = e^{-4i\theta}\,\frac{1 + 2e^{i\theta}}{1 + 2e^{-i\theta}} \quad \text{de module 1 .}$$

2.2 VARIETES ALGEBRIQUES ET VARIETES DE DESORDRE.

Reprenons l'exemple du modèle de Baxter. Ce modèle se trivialise sur certains plans (dans $\mathbb{P}_3$) pour lesquels il subit une réduction dimensionnelle. Ainsi la fonction de partition par site se réduit-elle à celle d'un vertex isolé lorsque l'on se restreint à la variété algébrique

$$a + d = b + c \; (\Rightarrow Z(a, b, c, d) = a + d)$$

De telles solutions, et les variétés algébriques correspondantes, sont dites de " désordre " [22] .

Ces variétés correspondent évidemment à une trivialisation de la paramétrisation. Le module k des fonctions elliptiques intervenant pour ce modèle prend une valeur qui correspond à une trivialisation de la paramétrisation

$$a + d = b + c \Rightarrow k_L = \frac{2\sqrt{k}}{1 + k} \rightarrow \infty$$

Sur cet exemple précis nous pouvons vérifier facilement que l'ensemble des variétés de désordre sont invariantes par le groupe infini discret G engendré par les deux relations d'inverse I et J .

Cet exemple (parmi d'autres) est l'illustration du lien étroit qui existe nécessairement entre les variétés algébriques correspondant à la paramétrisation des modèles intégrables (les F_i), les variétés de désordre et aussi leur transformées par le groupe G.

Il est en fait relativement facile d'exhiber en dimension deux (voir trois) de nombreux exemples de telles solutions et variétés (algébriques) de désordre [23] .

L'analyse de leurs transformées par le groupe G fournit des informations précieuses sur la paramétrisation éventuelle du modèle : l'existence d'une infinité de telles transformées peut être vu comme un indice de non-intégrabilité du modèle.

L'analyse est cependant assez subtile ainsi qu'en témoigne l'exemple du modèle de Potts sur réseau damier [24] .

Les variétés de désordre correspondent à des variétés de l'espace des paramètres où la fonction de partition (dans certains cas également une infinité de fonctions de corrélation) peuvent être calculées exactement le modèle n'est cependant pas intégrable au sens de l'existence de familles de matrices de transfert commutantes (on peut néanmoins dire que les matrices commutent dans le sous-espace vectoriel de dimension un correspondant à la plus grande valeur propre).

3 CONCLUSION

Les variétés algébriques dans des espaces projectifs ainsi que certaines transformations birationnelles (associées aux relations dites d'inverse) jouent un rôle majeur dans tous les calculs exacts qui peuvent être menés sur les modèles de mécanique statistique sur réseau. Ces variétés fournissent des outils puissants pour analyser des problèmes complexes tels que ceux de la classification exhaustive des modèles intégrables, ou encore l'étude des modèles intégrables en dimension trois.

Références.

1 - R.J. Baxter. Exactly solved models in statistical mechanics.
Academic Press NY 1982 et Proceeding of the 1980 Enschede Summer School,
Fundamental Problems in Statistical Mechanics,North Holland; Amsterdam.

2 - I.V. Cherednik. Theor. Math. Phys. 43 (1980) 117, 356
H.C. Ottinger, J. Honerkamp, Phys. Lett. 88 A (1982) 339

3 - A.B. Zamolodchikov, Comm. Math. Phys. 79 (1981) 489

4 - R.J. Baxter, Comm. Math. Phys. 88 (1983) 185

5 - C. Fan et F.Y. Wu, Phys. Rev. B 2 723 - 733 (1970)

6 - M. Jimbo et T. Miwa "Classification of solutions to the star triangle
relation for a class 3 and 4 - state IRF models", NSF ITP 84 184 (1984)

7 - G.E. Andrews, R.J. Baxter, P.J. Forrester, J. Stat. Phys. 35, 193 (1984)

8 - M.T. Jaekel, J.M. Maillard, J. Phys. A 18, 1229 (1985)

9 - R.J. Baxter, Ann. Phys. 70 (1972) 193

10 - Y.G. Stroganov, Phys. Lett; 74 A (1979) 116

11 - J.M. Maillard, "The star-triangle relation and the inversion relation in
statistical mechanics"; Proceeding of the Brasov International Summer
School 1983, Birkhauser edit.

12 - J.M. Maillard, "Automorphisms of Algebraic varieties and Yang-Baxter equations"
equations", soumis à J.M.P.

13 - J.M. Maillard, T. Garel, J. Phys. A 17 (1984)

14 - P. Lochak, J.M. Maillard, Journ. Math. Phys. 27, 593 (1986)

15 - R.J. Baxter, J. Phys. A 13, L 61-70 (1980)

16 - A. Beauville, Surfaces algébriques complexes; Astérisque 54; Société
Mathématique de France, 1984 et Séminaire Bourbaki n° 609 1982/83

17 - L. Szpiro, Séminaire Bourbaki n° 619 1983/84

18 - S. Beraha, J. Kahane, N.J. Weiss, J. Comb. Theory B 28, 52 - 65 (1980)

19 - A.A. Belavin, A.M. Polyakov et A.B. Zamolodchikov; J. Stat. Phys. 36,775 (1984)

20 - M.P.M. den Nijs, J. Phys. A 12 1857-68 (1979)

21 - R.J. Baxter, Annal. Phys. 71, 1 (1973)

22 - M.T. Jaekel, J.M. Maillard, J. Phys. A 18 641 (1985)

23 - M.T. Jaekel, J.M. Maillard, J. Phys. A 18, 2271 (1985)

24 - M.T. Jaekel et J.M. Maillard, J. Phys. A 17 2079-2094 (1984)

Le lecteur pourra également se reporter à :

a- R. Hartshorne "Algebraic geometry"
Springer Verlag, New-York 1977

b- J. Griffiths et J. Harri "Principles of Algebraic Geometry"
John Whiley 1978

c- I.R. Shafarevich,"Basic Algebraic Geometry"
Springer Verlag 1977

d- M. Jimbo, "A q-analogue of U(gl(N+1)),Hecke algebra and the Yang-Baxter equation. (1985); RIMS n° 5A (1985)

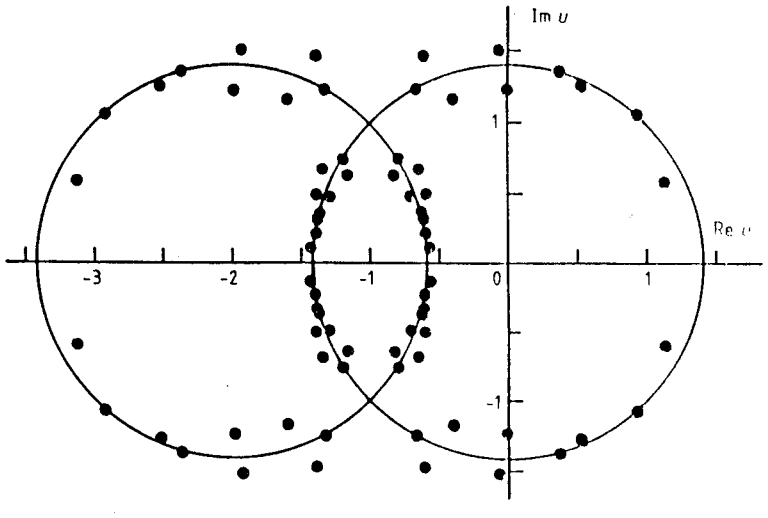

Figure 1. Location of the zeros in the complex plane b, for $q = 2$, on a square $N \times N$; $N = 6$ with periodic boundary conditions. We have drawn the Fisher circles $|b \pm 1| = \sqrt{2}$.

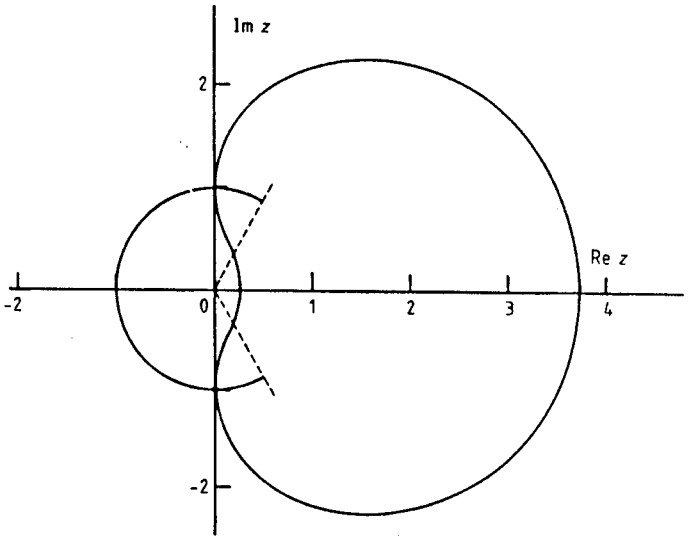

Figure 2. Zeros in the complex plane $\tanh K$ $(= z)$ for the triangular lattice for $q = 2$.