

Revue non exhaustive sur les modèles exactement solubles

J.M. Maillard

Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies
Tour 16, 4 place Jussieu, 75230 Paris, Cédex 05, France

LPTHE. 11/90

I - INTRODUCTION	1
II - NOTIONS ET CONCEPTS INTERVENANT DANS LES PROBLEMES COMPLETEMENT INTEGRABLES ET LEURS INTER-RELATIONS	2
1) Théorie de la déformation isospectrale les équations aux dérivées partielles non linéaires	2
1a) Rapports sur le problème inverse	2
1b) Nombre infini de lois de conservation ; algèbre d'opérateurs qui commutent avec un opérateur donné	3
1c) Transformations de Bäcklund	7
1d) Le point de vue de la géométrie différentielle	10
2) Les problèmes à n corps	11
2a) Les problèmes à n corps classiques et les E.D.P. non linéaires. Les problèmes à n corps quantiques	11
2b) Les espaces symétriques et les problèmes à n corps	14
3) Liens entre les déformations isospectrales et les déformations isomonodromiques	17
4) Modèles complètement intégrables en théorie des champs	19
4a) Quantum inverse scattering	19
4b) Les liens avec les problèmes à n corps quantiques	22
5) Modèles exacts en mécanique statistique	23
5a) Les modèles unidimensionnels	23
5b) Modèles exacts sur réseau bidimensionnel	24
6) La correspondance entre mécanique statistique et théorie des champs	26
7) Les structures en jeu dans les modèles solubles ; la relation triangle comme concept fondamental pour ces modèles	29
III - LES MODELES INTEGRABLES ET LEURS APPLICATIONS A LA PHYSIQUE	32
1) Polymorphisme des modèles intégrables : l'exemple du modèle à six vertex	32

- INTRODUCTION -

2) <u>Revue non exhaustive des applications des modèles intégrables en physique</u>	38
2a) <u>Quelques exemples</u>	38
2b) <u>Un point de vue général</u>	41
IV - <u>CONCLUSION</u>	43

---:-

Le domaine de recherche que constitue les problèmes dits "complètement intégrables" a connu ces dernières années un développement assez remarquable, développement qui est dû, d'une part à l'apparition de concepts puissants tel que le formalisme de Lax [1], mais également à un processus de convergence entre des domaines différents, conduisant ainsi à des rapprochements fructueux. On peut signaler par exemple, la totale identification formelle existant entre la transformation triangle-étoile en mécanique statistique et la propriété de factorisation de la matrice S dans les théories des champs bidimensionnels. Il est clair par ailleurs que la réunion des techniques utilisées en mécanique statistique et du formalisme de la méthode inverse classique (scattering inverse) a donné naissance à la théorie de la méthode inverse quantique ("quantum inverse scattering") [2].

Les notions de modèles complètement intégrables interviennent dans une grande diversité de domaines (théorie des champs, mécanique statistique, problèmes à n corps, physique du solide...) qui chacun, ont eu tendance à développer leur propre formalisme et critères d'intégrabilité. Des techniques et points de vue différents ont également eu tendance à venir se greffer sur un même problème (géométrie algébrique, géométrie différentielle, groupes de Lie...). Nous allons essayer de dénouer cet "écheveau" en nous appuyant sur des exemples simples. Nous indiquerons un certain nombre d'équivalences entre une variété de modèles et regarderons comment les formalismes et les critères de complétude d'intégrabilité peuvent se correspondre. Nous dégagerons parmi ces techniques et concepts ceux qui semblent les plus simples, les plus intrinsèques ; ceci nous amènera à prêter une attention toute particulière aux relations triangle-étoile. Nous discuterons des applications des modèles intégrables à la physique. Cette note doit être regardée comme un article de revue qui cherche à vulgariser un sujet réputé assez technique. Cependant cette revue ne rend que partiellement compte de la théorie de la méthode inverse et du "quantum inverse scattering" pour lesquels on peut trouver des exposés très complets [3][4]. Nous n'abordons que certains aspects de ces deux théories, et avons préféré nous attacher à d'autres points moins popularisés dans la littérature.

II - NOTIONS ET CONCEPTS INTERVENANT DANS LES PROBLEMES COMPLETEMENT INTEGRABLES ET LEURS INTER-RELATIONS

1) Théorie de la déformation isospectrale. Les équations aux dérivées partielles non-linéaires

1a) Rappels sur le problème inverse

Si les problèmes d'intégrabilité commencent à susciter un intérêt et des recherches approfondies ces dernières années, cela est dû au développement initial des travaux concernant les équations non linéaires classiques intégrables (dont les plus connues sont sans conteste l'équation de Sine-Gordon [5] et l'équation de Korteweg de Vries [6]), avec dans leur sillage la redécouverte de certaines notions, notamment la notion devenue maintenant bien connue de solitons [7][8]. Le nombre des équations non linéaires intégrables est devenu beaucoup trop important pour qu'il soit possible d'en donner une liste exhaustive : on pourra cependant recommander la lecture de l'article de revue de Scott et al. [3] sur ce sujet, ainsi que celle de deux livres : Bäcklund Transformations, dans "Lectures Notes in Mathematics" n° 515 [7] ainsi que "Solitons", Topics in Current Physics [8]. Les théories intégrables classiques sont maintenant analysées dans le cadre de ce que l'on appelle la méthode inverse (inverse scattering) [9]. Prenons pour la clarté de l'exposition l'exemple simple de l'équation KdV :

$$\phi_t = 6\phi \cdot \phi_x - \phi_{xxx}.$$

Il est possible de trouver deux opérateurs

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \phi \quad \text{et}$$

$B = -4i \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3i \left(\phi \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \phi \right)$ tels que l'équation non linéaire précédente s'écrit $L_t = [B, L]$. B étant auto-adjoint, l'équation précédente implique que les valeurs propres de L sont indépendantes du temps (d'où le nom de déformations isospectrales) : $L \cdot \psi = E \cdot \psi$. Les fonctions propres évoluent selon $i\psi_t = B \cdot \psi$, en effet l'équation $L_t = [B, L]$ peut être vue comme la relation de compatibilité entre $L\psi = E \cdot \psi$ et $i\psi_t = B \cdot \psi$; $-\psi_{xx} = E\psi$ est une équation de diffusion (équation de Schrödinger) dans un potentiel ϕ : son spectre sera composé d'une part d'une partie discrète (états liés) et d'une partie continue (états de diffusion). Pour ces états de diffusion nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \psi(x, k, t) &\sim a(k, t) e^{-ikx} + b(k, t) e^{ikx} & \text{pour } x \rightarrow +\infty \\ \psi(x, k, t) &\sim T(k, t) e^{-ikx} & \text{pour } x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Du comportement pour $x \rightarrow +\infty$, conjointement à l'équation $i\psi_t = B \cdot \psi$, nous tirons

$$\frac{\partial b}{\partial t} = 4ik^3 \cdot b, \quad \frac{\partial a}{\partial t} = -4ik^3 \cdot a$$

c'est-à-dire $b(k, t) = e^{4ik^3 t} \cdot b(k, 0)$ et $a(k, t) = e^{-4ik^3 t} \cdot a(k, 0)$.

Les données de diffusion évoluent donc de façon très simple et l'on doit maintenant chercher à construire le potentiel $\phi(x, t)$ correspondant. Ceci est réalisé grâce à l'équation intégrale de Gel'fand-Levitan [10] :

$$g(x, y, t) + K(x+y, t) + \int_x^\infty K(y+y', t) g(x, y', t) dy' = 0$$

où $K(x, t)$ est la transformée de Fourier des données de diffusion $\left(\frac{b}{a}\right)(k, t)$ et son équivalent discret), le potentiel étant donné par $\phi(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} g(x, x, t)$; c'est l'ensemble de ces étapes (association au problème non linéaire d'un problème linéaire de diffusion, calcul d'évolution sur le problème linéaire, retour au problème non-linéaire) qui constitue la méthode inverse.

Zakharov et Faddeev établirent la complète intégrabilité de l'équation KdV en indiquant [11] que de nouvelles variables dépendant des données de diffusion définissaient un jeu de variables canoniques : en l'occurrence $P(k, t) = -k/\pi \ln(1 - |b/a|^2)$ et $Q(k, t) = \arg b(k, t)$ (et leur analogues discrets). Ces variables sont du type action-angle : $P(k, t) = P(k, 0)$, $Q(k, t) = 8k^3 t$ (les variables action-angle décrivant les tores dans l'espace des phases).

1b) Nombre infini de lois de conservation ; algèbre d'opérateurs qui commutent avec un opérateur donné.

Une propriété importante de ces équations intégrables est l'existence, pour celles-ci, d'un nombre infini de lois de conservation : dans l'exemple de l'équation KdV nous avons ainsi une infinité de quantités conservées I_n .

$$I_{-1} = \int u \, dx \quad I_0 = \int u^2 \, dx,$$

$$I_1 = \int \left(\frac{u^2}{2} + u^3 \right) \cdot dx \dots \text{et } I_n = \int X(u, u_x, \dots, u^{(n-1)}) \cdot dx$$

où X est une expression polynomiale de ces divers arguments. Cette propriété peut être comprise à partir de l'existence de la paire de Lax précédente en

effet :

$$iL_t = [B, L] \Rightarrow L(t) = e^{iBt} \cdot L(0) \cdot e^{-iBt}$$

En prenant les "traces" (nous sommes en dimension infinie) $\text{Tr} L^n$, on constate immédiatement que $\text{Tr} L^n(t) = \text{Tr} L^n(0)$. Si l'on note Q_n la quantité $Q_n(u, u_x, \dots) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta I_n}{\delta u(x)}$, les équations $u_t = Q_n(u, u_x, \dots)$ forment un ensemble d'équations, elles aussi complètement intégrables, et sont appelées équations KdV d'ordre supérieur. Toutes ces équations admettent une paire de Lax : elles s'écrivent toutes $L_t = [A_n, L]$. Par exemple (en enlevant le facteur i)

$$A_1 = -4 \frac{d^3}{dx^3} + 3 \left(u \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} u \right),$$

$$A_2 = 16 \frac{d^5}{dx^5} - 20 \left(u \frac{d^3}{dx^3} + \frac{d^3}{dx^3} u \right) + 30u \frac{d}{dx} u + 5 \left(u_{xx} \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} u_{xx} \right) \dots$$

Il est possible de donner une procédure pour obtenir par récurrence toute cette famille $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$

En effet posons $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u$ et $A_n = \sum_{\ell=0}^{2n+1} v_\ell \frac{d^\ell}{dx^\ell}$ où v_ℓ est un polynôme en u et ses dérivées $u', u'', \dots$ et nous choisirons de plus $v_{2n+1} = \text{cte}$ et $v_n = 0$. Posons de plus $\alpha_n = [A_n, L]$. L'équation KdV d'ordre n s'écrit $u_t = \alpha_n$. Considérons la relation suivante définissant partiellement la suite A_n :

$$A_{n+1} = 4A_n \cdot L + p_n \cdot A_0 + q_n$$

$$[A_{n+1}, L] = [4A_n L + p_n A_0 + q_n, L]$$

$$= 4\alpha_n L + [p_n, L] \cdot \frac{d}{dx} + p_n [A_0, L] + [q_n, L]$$

$$= 4\alpha_n \left(-\frac{d^2}{dx^2} + u \right) + 2p_n \cdot \frac{d^2}{dx^2} + p_n' \cdot \frac{d}{dx} + p_n u'$$

$$+ 2q_n' \cdot \frac{d}{dx} + q_n'' = (-4\alpha_n + 2p_n') \frac{d^2}{dx^2} + (p_n'' + 2q_n') \frac{d}{dx} + (4u\alpha_n + u' p_n + q_n'')$$

Nous voyons que si nous imposons les deux conditions

$$2p_n' - 4\alpha_n = 0 \quad \text{et} \quad 2q_n' + p_n'' = 0$$

alors le commutateur $[A_{n+1}, L]$ est un nombre pur, fonction de u et de ses dérivées (pas d'opérateur $\frac{d^m}{dx^m}$), qui s'identifiera à α_{n+1} à condition de

poser $\alpha_{n+1} = 2u' \int \alpha_n \cdot dx + 4u\alpha_n - \alpha_n''$.

Ainsi avec les conditions initiales

$$A_0 = \frac{d}{dx}, \quad \alpha_0 = u'$$

obtient-on successivement :

$$\alpha_1 = 6uu' - u''' \Rightarrow \int \alpha_1 dx = 3u^2 - u''$$

$$\alpha_2 = 2u' (3u^2 - u'') + 4u(6uu' - u''')$$

$$= u^{(5)} - 10uu'' - 20u' u'' + 30u^2 u'^2$$

$$\Rightarrow \int \alpha_2 dx = u^{(4)} - 10uu' - 5u'^2 + 10u^3$$

$$\alpha_3 = 2u' (u^{(4)} - 10uu' - 5u'^2 + 10u^3)$$

$$+ 4u(u^{(5)} - 10uu'' - 20u' u'' + 30u^2 u'^2)$$

$$- (u^{(7)} - 10uu^{(5)} - 20u' u^{(4)} - 10u'' u''')$$

$$- 20u' u^{(4)} - 20u'' u'' - 40u' u'' + 30u'' u'^2$$

$$+ 60uu' u'' + 60u'^2 + 120u' u''')$$

$$= -u^{(7)} + 14uu^{(5)} + 42u' u^{(4)} + 70u'' u'' - 70u'^2 u''$$

$$- 280uu' u'' - 70u'^3 + 6' \partial u' u^3$$

$$\Rightarrow \int \alpha_3 dx = -u^{(6)} + 14uu^{(4)} + 28u' u''' + 21u''^2$$

$$- 70u' u'' - 70uu'^2 + 35u^4$$

et parallèlement

$$A_1 = 4A_0 L + 2 \int \alpha_0 dx \cdot \frac{d}{dx} - \alpha_0 = -4 \frac{d^3}{dx^3} + 6u \frac{d}{dx} + 3u'$$

$$A_2 = 4A_1 L + 2 \int \alpha_1 dx \cdot \frac{d}{dx} - \alpha_1$$

$$= 4 \left(-4 \frac{d^3}{dx^3} + 6u \frac{d}{dx} + 3u' \right) \left(-\frac{d^2}{dx^2} + u \right) + 2(3u^2 - u'') \frac{d}{dx}$$

$$- 6uu' + u''' = 16 \frac{d^5}{dx^5} - 40u \frac{d^3}{dx^3} - 60u' \frac{d^2}{dx^2} + (30u^2 - 50u'') \frac{d}{dx}$$

$$+ 30uu' - 15u'''$$

$$A_3 = -64 \frac{d^7}{dx^7} + 224 u \frac{d^5}{dx^5} + 560 u^2 \frac{d^4}{dx^4} + (820u'' - 280u^2) \frac{d^3}{dx^3} + (700u''' - 840uu'') \frac{d^2}{dx^2} + (322u^{(4)} - 700uu'' - 490u'^2 + 140u^3) \frac{d}{dx} + (63u^{(5)} - 210uu''' - 420u'u'' + 210u^2u')$$

Au côté de l'équation KdV existe une équation complètement intégrable assez semblable appelée équation KdV modifiée.

Intéressons-nous aux équations KdV-modifiée, d'ordre n quelconque, et leurs récurrences éventuelles associées. En fait on passe des équations KdV aux équations KdV modifiées en faisant le changement $u \rightarrow \chi$ défini par $u = \chi' + \chi^2$. (typiquement on passe de cette manière du KdV d'ordre 1, $u_t = 6uu' - u''$, au KdV modifié d'ordre 1, $\chi_t = 3\chi^2 \cdot \chi' - \chi''$).

Introduisons $\gamma_n = 2 \int \alpha_n dx \cdot \chi - \alpha_n$ et calculons $\gamma_n'' + 2\chi \cdot \gamma_n'$:

$$\begin{aligned} \gamma_n'' + 2\chi \cdot \gamma_n' &= \left(2 \int \alpha_n dx \cdot \chi + 2\alpha_n \cdot \chi - \alpha_n^2 \right)' + 2\chi \left(2 \int \alpha_n dx \cdot \chi' + 2\alpha_n \cdot \chi - \alpha_n^2 \right) \\ &= -\alpha_n'' + 4\alpha_n \cdot \chi' + 2 \int \alpha_n dx \cdot \chi'' + 4\alpha_n^2 \cdot \chi' + 4 \int \alpha_n dx \cdot \chi \chi' \end{aligned}$$

Comparons cette expression à α_{n+1} :

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= 2u' \int \alpha_n dx + 4u \cdot \alpha_n - \alpha_n'' \\ &= 2(\chi'' + 2\chi \chi') \cdot \int \alpha_n dx + 4(\chi' + \chi^2) \alpha_n - \alpha_n'' \end{aligned}$$

nous voyons que nous obtenons l'égalité

$$\alpha_{n+1} = \gamma_n'' + 2\chi \cdot \gamma_n'$$

Ecrire $u_t = \chi_t' + 2\chi \cdot \chi_t' = \alpha_{n+1}$ revient donc à écrire : $\chi_t = \gamma_n'$; ceci résout donc le problème de la récurrence sur les équations KdV modifiées d'ordre n quelconque à partir de la récurrence sur les KdV d'ordre n quelconque.

Cette méthode, pour obtenir la suite des A_n est très liée à la notion d'algèbre d'opérateurs qui commutent avec un opérateur donné : en effet si nous recherchons les A_n sous la forme

$$A_n = \sum_{\lambda=0}^{2n+1} v_\lambda \cdot \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}, \quad \text{tel que (équations KdV statiques)}$$

$[A_n, L] = 0$, nous obtenons les relations suivantes sur les v_λ (relations qui les déterminent) :

$$2v_{\lambda-1}' + v_\lambda'' + \sum_{k=1}^{2n+1-\lambda} C_{\lambda+k}^\lambda u^{(k)} \cdot v_{\lambda+k} = 0$$

$$\lambda = 1, \dots, 2n$$

Cet ensemble d'équations, comme l'on peut s'en convaincre, est équivalent aux récurrences précédentes auxquelles on ajoute la condition $\alpha_n = 0$.

Ces notions de récurrences, et d'algèbre d'opérateurs qui commutent, s'appliquent également aux transformations par self-similarité [43] des équations KdV et KdV modifiées d'ordre n (voir Appendice).

1c) Transformations de Bäcklund

Une propriété tout-à-fait remarquable sur les équations complètement intégrables est l'existence d'une transformation appelée transformation de Bäcklund [12]. Si nous prenons (toujours pour des raisons de simplicité) l'équation de Sine-Gordon, $\phi_{xt} = \sin \phi$, alors si ϕ est une solution de l'équation S-G, la solution ψ du système :

$$\begin{cases} \psi_x = \phi_x + 2a \cdot \sin \left(\frac{\psi + \phi}{2} \right) \\ \psi_t = -\phi_t + \frac{2}{a} \cdot \sin \left(\frac{\psi - \phi}{2} \right) \end{cases}$$

est encore solution de l'équation non-linéaire. On introduit aussi ce que l'on appelle une transformation de Bäcklund infinitésimale [13] en supposant a petit et en développant ψ en série de Taylor :

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x,t) \cdot a^n \quad (1)$$

On a alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_{n,t} \cdot a^n = -\phi_t + \frac{2}{a} \sin \left(\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n a^n - \phi \right)$$

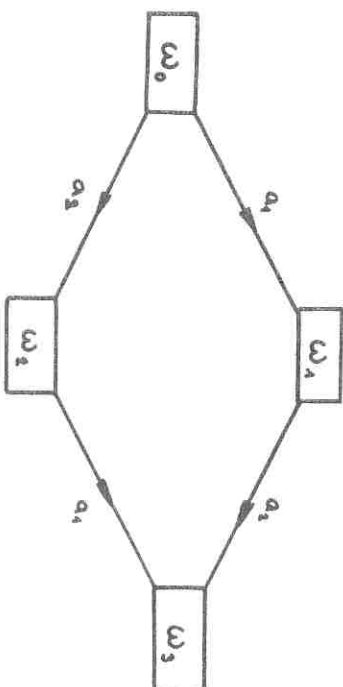
ce qui implique en développant selon les puissances de a : $\psi_0 = \phi$, $\psi_1 = 2\phi_t$, $\psi_2 = 2\phi_{tt}$, $\psi_3 = 2\phi_{t^2}$, ... A partir de la conservation de l'énergie

$$\left(\frac{1}{2}\psi_x^2\right)_t + (\cos\psi)_x = 0 \quad (2)$$

on peut en substituant l'expression (1) dans l'équation précédente (2) (les ψ_n étant connus) obtenir ainsi un nombre infini de lois de conservation :

$$I_0 = \frac{1}{2}\phi_x^2 \quad I_1 = 2\phi \text{ctrx} \cdot \phi_x + 4\phi^2 \text{ctrx} \cdot \phi_x^2 \text{ctrx} \cdot \phi_x \quad \text{etc...} \quad [3]$$

La notion de transformation de Bäcklund infinitésimale est donc reliée directement à l'existence d'un nombre infini de lois de conservation. La transformation de Bäcklund permet de trouver des solutions à N-solitons de l'équation de Sine-Gordon (Barnard [14]) conduisant ainsi aux formules bien connues d'Hirota [15], qui ont un caractère manifestement algébrique. Une propriété fondamentale de la transformation de Bäcklund est exprimée par le théorème de permutabilité qui est souvent schématisé par la figure suivante :



Ce théorème signifie que si l'on applique une transformation de Bäcklund de paramètre a_1 , puis une transformation de paramètre a_2 , le résultat est le même que si l'on applique d'abord celle de paramètre a_2 , puis celle de paramètre a_1 . De plus une transformation de Bäcklund demande, si l'on veut passer par exemple de la solution ω_0 à ω_1 , d'effectuer des quadratures, cependant entre les quatre solutions de la figure précédente, existe la relation suivante, purement algébrique :

$$\text{tg} \left(\frac{\omega_3 - \omega_0}{4} \right) = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \cdot \text{tg} \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{4} \right)$$

(Bianchi [16]) .

Une telle propriété permet de comprendre, très naïvement, la spécificité de ces modèles : ce sont des modèles pour lesquels, entre autres, existe une véritable notion d'"addition" des solutions (1 soliton + 1 soliton). Cette propriété fondamentale peut être vue dans un cadre plus systématique, faisant le lien entre l'équation KdV et les variétés abéliennes [17]. Cette description à l'aide des variétés abéliennes est particulièrement claire lorsque l'on compare les formules (2.3.11), (2.3.12) de [17] et les considérations qui seront développées dans le paragraphe II.2a) de cette note, où l'on verra également apparaître des aspects de géométrie algébrique au travers de relations fonctionnelles associées à des variétés abéliennes (Jacobienes). La transformation de Bäcklund peut être obtenue de façon simple comme indiqué par le diagramme suivant dans le cas de l'équation KdV :

$$\begin{array}{ccc} (\psi(x,t), \lambda) & \rightarrow & u(x,t) \\ + & & \uparrow \\ (\psi'(x,t), \lambda) & \rightarrow & u'(x,t) \end{array} \quad \text{transformation de Bäcklund}$$

avec $\frac{\psi'_x}{\psi} = -\frac{\psi'_x}{\psi}$

Ces remarques sont, en fait, générales et la transformation de Bäcklund peut, sur toutes les équations non linéaires connues, être vue comme associée à une transformation simple sur la solution du problème de diffusion [7]. Enfin la transformation de Bäcklund possède des propriétés spectrales simples. Exprimée dans les variables de diffusion a et b , la transformation de Bäcklund donne : $a(k,t) \rightarrow a(k,t) \cdot \frac{ik+\eta}{ik-\eta}$, $b(k,t) \rightarrow -b(k,t)$. La composition de transformation de Bäcklund correspond à une multiplication de facteurs tel que $ik+\eta/ik-\eta$, par exemple :

$$a(k,t) = a(k,t) \prod_{n=1}^N \frac{k - i\chi_n}{k + i\chi_n}$$

où $a(k,t)$ correspond aux états de diffusion et le produit aux états liés. La transformation de Bäcklund revient donc à rajouter un état lié. D'autre part, comme $\ln a(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_n \cdot k^{-n} [18]$, où Γ_n sont les constantes de mouvements, on peut réécrire $\ln a$ comme la somme d'un terme provenant des états de diffusion et d'un terme provenant des états liés : $-\sum_{m=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} (i\chi_m)^n$. Les quantités conservées I_n ont donc des expressions très simples en fonction des impulsions des solitons.

1d) Le point de vue de la géométrie différentielle

Les équations non linéaires intégrables, comme par exemple l'équation de Sine-Gordon, étaient apparues il y a déjà fort longtemps dans le cadre de la géométrie différentielle à propos de la recherche de surfaces de courbure constante.

Sasaki a reformulé [19] ces propriétés de courbure constante des

équations intégrables, dans un langage plus moderne, en termes de connection: par exemple, dans le cas de l'équation de Sine-Gordon, il introduit la connection suivante :

$$d \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \Omega = \begin{pmatrix} \eta dx + \frac{1}{4\eta} \cos u dt - \frac{u}{2} dx + \frac{1}{4\eta} \sin u dt \\ \frac{u}{2} dx + \frac{1}{4\eta} \sin u dt - \eta dx - \frac{1}{4\eta} \cos u dt \end{pmatrix}$$

l'équation de Sine-Gordon revient alors simplement à écrire $d^2=0=d\Omega+\Omega\Omega$. En fait ceci revient à une réécriture du système A.K.N.S. [20] (η est un paramètre spectral)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos u}{4\eta} & \frac{\sin u}{4\eta} \\ \frac{\sin u}{4\eta} & -\frac{\cos u}{4\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & -\frac{u}{2} \\ \frac{u}{2} & -\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

La condition $d\Omega+\Omega\Omega=0$ n'est rien d'autre que la cohérence entre ces deux systèmes d'équations (paire de Lax). Cette nouvelle formulation sert, entre autres, à mettre en évidence sur ces problèmes, le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ comme groupe d'invariance de l'équation. En effet on remarque que comme $\text{Tr } \Omega = 0$, Ω ne dépend que de trois 1-formes e^0, e^1, e^2 et la condition $d\Omega+\Omega\Omega=0$ s'écrit

$$de^C = \frac{1}{2} C_{ab}^C e^a \wedge e^b$$

où l'on reconnaît dans C_{ab}^C les constantes de structures correspondant à $SL(2, \mathbb{R})$,

$$([T_a, T_b] = C_{ab}^C T_c)$$

Divers auteurs [21] ont utilisé le langage des formes différentielles extérieures et des transformations de Lie généralisées, pour analyser différents aspects des systèmes intégrables notamment les lois de conservation de ces modèles, ou encore les transformations de Bäcklund. Ceci les a amenés à introduire les notions de structure de prolongation et de pseudo-potentiel.

Nous ne rentrerons pas dans les détails de cette approche et de ces connexions avec toutes les idées et structures précédentes, ceci serait beaucoup trop fastidieux. Toujours de ce point de vue des transformations de Lie généralisées, il faut signaler l'article de Kumei qui fait le lien avec les idées de Lax [22].

2) Les problèmes à n corps

2a) Les problèmes à n corps classiques et les équations aux dérivées partielles non linéaires : les problèmes à n corps quantiques

Les solutions de type soliton de l'équation KdV ont un pôle double.

Kruskal [23] fut le premier à étudier le mouvement de ces pôles. Le caractère de pôle double motivait l'étude de solutions rationnelles de l'équation KdV sous la forme :

$$u(x,t) = 2 \sum_{j=1}^N (x-x_j(t))^{-2}$$

Une substitution dans l'équation KdV conduit au système d'équations :

$$\dot{x}_j = 6 \sum_{k \neq j} (x_j - x_k)^{-2}$$

$$\text{et } \sum_{k \neq j} (x_j - x_k)^{-3} = 0 \quad \text{où } j, k=1, \dots, N.$$

Dans le cas plus simple de l'équation de Burgers Hopf ($u_t - 2u u_x - u_{xx} = 0$, autre équation intégrable réductible à l'équation de la chaleur) les solutions rationnelles,

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^N (x-x_j(t))^{-1}$$

conduisent, par substitution, aux équations

$$\dot{x}_j = -2 \sum_{k \neq j} (x_j - x_k)^{-1}$$

et

$$\ddot{x}_j = -8 \sum_{k \neq j} (x_j - x_k)^{-3}$$

La seconde équation correspond au problème unidimensionnel à n corps, d'hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2} \sum_j p_j^2 + g \sum_{j \neq k} (x_j - x_k)^{-2}$$

Du fait qu'il est possible de rendre compatible la première et la seconde équation, on ne s'étonnera pas que ces problèmes admettent [24] eux aussi un formalisme de Lax, mais L et A sont, maintenant, des matrices $N \times N$:

$$L_{jk} = \delta_{jk} \cdot p_j + i \sqrt{g} (1 - \delta_{jk}) \cdot (x_j - x_k)^{-1}$$

$$B_{jk} = -i \sqrt{g} \sum_{l \neq j} \sum_{l \neq k} (x_j - x_l)^{-2} + i \sqrt{g} (1 - \delta_{jk}) (x_j - x_k)^{-2}$$

$$A = \frac{1}{2} (B - B^T) \quad .$$

Le système est un système hamiltonien complètement intégrable ayant $2N$ degrés de liberté.

En fait on peut placer ce problème dans un contexte plus large, et se demander quelles sont les fonctions impaires ϕ et ψ , tel que le système,

$$\dot{x}_i = \sum_{j \neq i} \phi(x_i - x_j), \text{ soit compatible avec le système d'équations,}$$

$$\dot{x}_i = \sum_{j \neq i} \psi(x_i - x_j) \quad .$$

Ceci se produit, si et seulement si, ψ satisfait l'équation fonctionnelle :

$$0 = -\psi'(x)\psi(z) - \psi'(x)\psi(y) + \psi'(z)\psi(x) + \psi'(z)\psi(y)$$

$$\text{pour } x+y+z=0 \text{ et si } \phi(z) = 2\psi(z)\psi'(z) \quad .$$

La solution de cette équation est la fonction P de Weierstrass. On a également comme solution les dégénérescences de cette fonction P :

$$x^{-2}, \text{ sh } x \text{ et } \sin^{-2} x \quad .$$

Restons dans le domaine des problèmes à n corps, mais quantiques maintenant. Nous considérons l'hamiltonien usuel :

$$H = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i \neq j} V(x_i - x_j)$$

et nous nous posons le problème de trouver V telle que la fonction d'onde du fondamental ait une forme de fonction d'onde de Bijl-Dingle-Jastrow [25] [26] :

$$\psi = \prod_{i>j} \psi(x_i - x_j) \quad ; \quad \text{notons } \phi = \frac{\psi'}{\psi} \quad ,$$

$$\phi' = \frac{\psi''}{\psi} - \left(\frac{\psi'}{\psi} \right)^2 \quad . \quad \text{La partie d'énergie cinétique opérant sur cette}$$

fonction d'onde donne :

$$- \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \psi = \left\{ -2 \sum_{i>j} (\phi'(x_i - x_j) + \phi^2(x_i - x_j)) \right\} \psi$$

$$2 \cdot \sum_{\substack{\text{permut} \\ \text{de } i,j,k}} \phi(x_i - x_j) \phi(x_j - x_k) \Big\} \psi$$

Pour i, j, k fixés, la contribution dans la seconde somme est typiquement de la forme :

$$\phi(x) \phi(y) \phi(z) + \phi(z) \phi(x) \quad \text{pour } x+y+z=0$$

et l'on aimerait qu'elle s'écrive,

$$f(x)+f(y)+f(z), \text{ pour avoir effectivement une expression qui puisse s'écrire au total } \sum_{i \neq j} V(x_i - x_j) \quad . \text{ On peut là encore chercher } \phi \text{ et } f \text{ vérifiant}$$

cette équation fonctionnelle, et l'on retrouve finalement :

$$V(x) = \omega^2 x^2 + g/x^2$$

$$V(x) = g \frac{\pi^2}{L^2} (\sin \frac{\pi}{L} x)^{-2}$$

mais également la fonction P de Weierstrass, et ses dégénérescences et aussi $V(x) = -2C_0(x)$, le fameux modèle de particules en interactions δ [27][27] que l'on peut résoudre par l'ansatz de Bethe. Une généralisation de ces idées, basée sur la méthode de séparation des variables (variables de Jacobi),

impose des restrictions sur le potentiel pour des problèmes en dimension supérieure. C'est ainsi que P.J. Gambardella [29] a pu pour, les exemples suivants,

$$V_1 = \lambda \sum_{i \neq j} \frac{1}{(\vec{r}_{ij}^+)^2}, \quad V_2 = \lambda \sum_k \sum_{i \neq j} \frac{\vec{r}_{ki}^+ \cdot \vec{r}_{kj}^+}{(\vec{r}_{ki}^+)^2 \cdot (\vec{r}_{kj}^+)^2},$$

$$V_3 = \lambda \sum_{i \neq k} \sum_{j \neq l} \frac{\vec{r}_{ik}^+ \cdot \vec{r}_{jl}^+}{(\vec{r}_{ik}^+)^2 \cdot (\vec{r}_{jl}^+)^2},$$

exprimer certaines fonctions propres à l'aide d'opérateurs a et a^+ tout-à-fait analogues à ceux de l'oscillateur harmonique.

En fait le rôle joué par l'oscillateur harmonique peut encore être renforcé si l'on considère le point de vue et les démonstrations de P. Deift, Lund et E. Trubowitz [30][31] : les problèmes intégrables dont le système linéaire associé est un opérateur du second ordre (ceci inclue KdV, Schrödinger non linéaire, Sine Gordon, la chaîne d'Heisenberg, les équations de Thirring massif...) sont tous (en un sens à préciser) le même modèle, des oscillateurs harmoniques avec un nombre fini de contraintes quadratiques. Nous ne citerons que deux exemples : tout d'abord l'équation de Schrödinger non linéaire à laquelle on peut associer [31] les équations des oscillateurs harmoniques contraintes suivantes :

$$\dot{X}_k = -i k \cdot X_k - (\sum_{l=1}^n l \cdot X_l^2) \cdot X_k$$

$$\dot{Y}_k = i k \cdot Y_k + (\sum_{l=1}^n l \cdot Y_l^2) \cdot X_k$$

D'autre part, les équations plus simples,

$$\ddot{X}_1 = \lambda_1 X_1 - X_1 \left(\sum_{j=1}^n X_j^2 \right),$$

sont reliés aux équations KdV : si $x_1, \dots, x_n$ sont solutions de l'équation précédente, alors, $u = - \sum_{i=1}^n x_i^2 + C$ est solution de l'équation stationnaire KdV d'ordre n [32].

2b) Les espaces symétriques et les problèmes à n corps

Ces problèmes unidimensionnels (classiques ou quantiques) à n corps, dont l'hamiltonien est $H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i \neq j} V(x_i - x_j)$ ont été étudiés par

Olshansky et Perelomov [33] en ramenant ces problèmes à des mouvements le long de géodésiques dans des espaces symétriques de courbure constante, positive ou négative. Les espaces symétriques demandent pour pouvoir être définis rigoureusement d'introduire diverses notions préalables telles que sous-algèbre de Cartan, chambre de Weyl.... Il sortirait du cadre de cette note de définir toutes ces notions (on pourra se reporter par exemple au livre d'Helgason [34]). Illustrons dans un premier temps de façon très simple les mécanismes mis en cause.

Considérons un élément du groupe $GL(n, \mathbb{R})$, noté A , (les éléments de cette matrice sont notés a_{ij}) et considérons sa représentation polaire (O et O' sont dans le groupe orthogonal) : $A = O \cdot X \cdot O'$ (les éléments de la matrice diagonale X sont notés x_i). La métrique $ds^2 = \sum_{i,j} da_{ij}^2$ peut être réécrite (pour plus de détails consulter le livre de L.K. Hua Harmonic Analysis several complex variables in the classical domain, Rhodes Island 19) :

$$ds^2 = \sum_{i,j} da_{ij}^2 = \sum_i dx_i^2 + \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 \cdot \delta h_{ij}^2$$

où h_{ij} sont des paramètres ("angles") associés à O . Si l'on écrit l'opérateur de Laplace-Berttrami, on a :

$$\Delta = \sum_{\partial a_{ij}} \frac{\partial^2}{\partial a_{ij}^2} = + \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum \frac{L_{ij}^2}{(x_i - x_j)^2}$$

(où les L_{ij} sont des éléments correspondant à ceux du groupe orthogonal). Nous voyons que le fait de ne retenir que la partie X dans la matrice A fait prendre à l'opérateur de Laplace une forme plus compliquée (on reconnaît facilement le problème à N corps quantique associé au potentiel en $1/x^2$). Cependant cet opérateur, un peu compliqué, n'est jamais que le reflet d'un laplacien très simple. On comprend que le problème à n corps qui en découle ait des propriétés très particulières. Revenons maintenant un peu plus dans les détails.

Pour fixer les idées prenons l'exemple simple suivant : soit $\hat{G}$ l'algèbre de $SL(n, \mathbb{C}) = G$ (matrice $n \times n$ de trace nulle) ; c'est une algèbre de Lie semi-simple, $\hat{K}$ sa sous-algèbre maximale compacte est l'algèbre des matrices anti-hermitiennes (le groupe K est l'ensemble des matrices unitaires) ; $\hat{L}$ est le complément orthogonal de $\hat{K}$ dans $\hat{G}$, en l'occurrence $\hat{L}$ est l'ensemble des matrices hermitiennes. H , la sous-algèbre commutative maximale (sous-algèbre

de Cartan) de $\hat{L}$, est la sous-algèbre des matrices diagonales.

Si l'on introduit les matrices e_{ij} dont les éléments sont δ_{ij} (tous les éléments e_{kl} sont nuls sauf $k=i, j=1$), on a les relations pour $h \in \hat{H}$:

$$\begin{aligned} [h, e_{ij}] &= \lambda_{ij}(h) \cdot e_{ij} \\ [e_{ij}, e_{ji}] &= e_{ii} - e_{jj} \\ [e_{ij}, e_{jk}] &= N_{ik} \cdot e_{ik} \end{aligned}$$

L'espace homogène $X = G/K = \text{SL}(n, \mathbb{R})/\text{SU}(n)$ est un espace symétrique. On définit également Λ un sous ensemble de $\hat{H}$ (Λ est la chambre de Weil positive relativement au système de racines). Si on désigne par "exp" la transformation canonique de l'algèbre au groupe, tout élément de X peut se décomposer sous la forme :

$$x = u h u^{-1} \quad \text{où } u \in K \text{ et } h \in \exp \Lambda$$

(De façon imagée on peut dire que h est la partie radiale et u la partie angulaire).

Oshanesky et Perelomov ont pu montrer [33] que la condition pour qu'un chemin $x(t)$ dans X soit une géodésique, qui est $\frac{d}{dt} (x^{-1} \dot{x} + \dot{x} x^{-1}) = 0$, est équivalente à l'existence d'une paire de Lax , $\dot{L} = [L, M]$, où $M = u^{-1} \cdot u \in \hat{K}$, et L , dont la forme est plus compliquée, ne sera pas donnée ici appartient à $\hat{L}$. Oshanesky et Perelomov remarquent [33] que les potentiels $1/x^2, 1/\sin^2 x$ et $1/\sin^2 x$ sont associés à des métriques de trois espaces de Riemann symétriques, de courbure nulle, négative et positive. De plus les quantités $I_K = \text{Tr } L^K$ coïncident pour les potentiels précédents avec les parties radiales d'opérateur de Laplace sur ces mêmes espaces.

Ces idées sont évidemment à rapprocher des idées de géométrie

Footnote

L'algèbre de Lie est appelée simple (respectivement semi-simple) si elle ne contient pas d'idéaux non triviaux (respectivement d'idéaux non triviaux commutatifs). Un sous-espace M de l'algèbre de Lie L est appelé idéal idéal si $[L, M] \subset M$. La structure des algèbres de Lie semi-simples s'avère liée à une notion géométrique fort remarquable : les systèmes de racine dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. (diagrammes de Dynkin).

différentielle auxquelles nous avons déjà fait allusion précédemment (les équations aux dérivées partielles non linéaires intégrables étant associées à des surfaces de courbure négative constante). Les espaces de courbure constante sont connus comme étant maximallement symétriques ; ils possèdent le nombre maximum d'isométries $\frac{N(N+1)}{2}$ pour une dimension de l'espace N .

Le rôle joué par les espaces symétriques dans les modèles complètement intégrables, a également été remarqué dans un domaine autre que les problèmes unidimensionnels classiques ou quantiques à n corps : la théorie des champs. Il a été montré par Eichenherr et Forger [35] qu'un ensemble infini de lois de conservation peut être obtenu pour des exemples qui correspondent à des structures géométriques d'espaces symétriques.

3) Liens entre les déformations isospectrales et isomonodromiques

A côté de la notion de déformation isospectrale est apparue, assez récemment (pour la physique), la notion de déformation isomonodromique ou de systèmes holonomes, pour l'essentiel grâce aux travaux de Mc Coy, T.T.Wu [36] et surtout de Sato, Miwa, Jimbo [37]. Ces notions interviennent dans les trois domaines des équations non linéaires, de la théorie des champs et de la mécanique statistique. Initialement ces idées naissent à la fin du siècle dernier, à une époque où l'intégration des équations différentielles était l'un des problèmes principaux de l'analyse [38][39]. Il était naturel d'étudier les équations différentielles à points critiques fixes, c'est-à-dire indépendants des constantes d'intégration, ou, en d'autres termes, les équations telles que le domaine d'uniformité de leurs intégrales peut être fixé a priori. Les équations à points critiques fixes sont réductibles aux transcendentes classiques. Pour le second ordre, on voit surgir de profondes difficultés surmontées pour la première fois par M. Painlevé, qui donna une classification exhaustive de celles-ci (six équations types appelées actuellement Painlevé I, II, ..., VI). L'extension aux équations du troisième ordre a été esquissée [40] mais n'a pas aboutit même à l'heure actuelle. R.Fuchs et L.Schlesinger [41][42] rencontrèrent ces mêmes équations dans le cadre de recherches complètement différentes, portant sur le problème de Riemann qui peut être systématiquement de la manière suivante : soient dans le plan de la variables complexe x , $n+2$ points distincts, à distance finie, $t_1, \dots, t_{n+2}$; considérons l'équation matricielle d'ordre m :

$$\frac{dY}{dx} = A.Y, \quad A = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_i}{x-t_i} \quad \text{où les } A_i \text{ sont des matrices } m \times m.$$

On se propose de déterminer les A_i en fonction des t_i de manière que le groupe de monodromie (*) ne cesse de coïncider avec un groupe donné. Les A_i constituent alors une solution du système matriciel d'ordre $m^2(n+2)$:

$$(t_j - t_i) \frac{dA_i}{dt_i} = [A_i, A_j]$$

$$\sum_{j=1}^{n+2} \frac{dA_j}{dt_i} = 0$$

Ce système différentiel se ramène pour $m=2$, $n=1$ aux équations de Painlevé ; il admet comme intégrales particulières des fonctions hypergéométriques de $t_1 \dots t_n$.

Les équations de Painlevé ont été remarquées dans le modèle d'Ising bidimensionnel par Mc Coy et T.T.Wu [36]. Sato, Miwa et Jimbo ont pu rendre compte de ces propriétés pour le modèle d'Ising (dans la limite de scaling) dans le cadre d'un langage mélangeant les notions de fermions libres et de systèmes holonomes, et obtenir de précieuses informations sur les fonctions de corrélations à n points [37]. D'autre part, de très nombreuses relations ont été trouvées entre les déformations isospectrales et déformations isomonodromiques, ne serait-ce que la réduction des équations non linéaires intégrables bien connues (Sine-Gordon, KdV, KdV-modifiée,...) aux

(*) Remarque

Une équation matricielle d'ordre m admet m solutions $Y_i(x)$. Lorsque l'on tourne autour d'une singularité de l'équation (telle que l'une des t_i) on peut s'attendre à ce que $Y_i(x)$ ne reste pas stable, mais, l'équation étant linéaire, se transforme en une combinaison linéaire de $Y_1(x), \dots, Y_m(x)$. L'effet d'une rotation autour d'une singularité domépeut être symbolisée par la matrice correspondant à la transformation précédente. La composition des transformations associées à toutes les singularités engendre le groupe de monodromie.

transcendantes de Painlevé par transformation de self-similarité [43]. Les liens précis entre déformations isospectrales et isomonodromiques ne sont pas encore complètement éclaircis : le lecteur pourra cependant se reporter à l'article de Flashtka et Newell [44]. Les deux problèmes de Riemann ont certaines ressemblances (on pourra se reporter au livre de Plemej [45]). Une façon naïve pour comprendre ces liens consiste peut-être à reprendre la démonstration de L. Schlesinger [42]. Cette démonstration repose sur la remarque que la condition de déformation isomonodromique est équivalente à adjoindre à l'équation linéaire de départ, un ensemble d'équations linéaires

$$\frac{\partial Y}{\partial t_i} = B_i Y$$

La condition de déformation isomonodromique revient à écrire des conditions de compatibilité entre divers systèmes linéaires, propriété assez semblable à l'existence d'une paire de lax dans le formalisme isospectral.

En fait, il semble bien que la matrice de monodromie du formalisme isospectral (qui fait passer de $x = -\infty$ à $x = +\infty$) joue le même rôle que les matrices de monodromie précédemment décrites.

4) Modèles complètement intégrables en théorie des champs

4a) Quantum inverse scattering

Il existe de nombreux modèles de théorie des champs qui sont complètement intégrables, nous n'en citerons que quelques uns : le modèle de Schrödinger non linéaire quantique [46], le modèle de Sine-Gordon quantique [4], le modèle de Gross-Neveu [47]. Les deux premiers modèles ont été largement étudiés. Il est apparu que non seulement les propriétés caractéristiques des modèles intégrables classiques survivent à la quantification, mais qu'elles se simplifient dans bien des cas : une étude directe du problème quantique relatif à un modèle intégrable par la méthode inverse, est plus simple qu'une approche indirecte, fondée sur la résolution du problème classique et sa quantification subséquente.

Des développements remarquables ont conduit à ce que l'on appelle maintenant la théorie de la méthode inverse quantique (quantum inverse scattering). Nous ne saurions donner une vue exhaustive de ce qui constitue une véritable

théorie : nous conseillons au lecteur de se reporter aux articles suivants : Two-dimensional Integrable Models in Quantum Field Theory, L.D. Faddeev [2] ainsi que les références [4], [48].

Donnons un simple aperçu de cette théorie : il est nécessaire de définir les crochets de Poisson devant redonner les crochets classiques dans la limite $\hbar \rightarrow 0$, tout en ayant à l'esprit que l'essentiel est de préserver le caractère d'intégrabilité de la théorie. Un certain arbitraire existe donc, cependant dans les cas connus, il est possible de régler les problèmes usuels de renormalisation et, de surcroît, l'algèbre quantique devient plus simple que son correspondant classique. Ceci est réalisé par le passage sur réseau, en imposant une relation triangle (relation de Yang-Baxter) sur les éléments de la matrice de monodromie. (Nous reviendrons sur la relation triangle par la suite). Les commutateurs sont fixés par la relation triangle. L'hamiltonien n'est plus local, (les couplages décroissent exponentiellement avec la distance entre les champs [49]) mais cela n'a guère d'importance car il redonne l'hamiltonien voulu dans la limite du continu. (Cette procédure s'oppose à des passages sur réseaux naïfs car l'évolution n'est pas déterminée par une discrétisation de l'hamiltonien local, celle-ci donnerait une théorie sur réseau non intégrable). Dans l'exemple du modèle de Sine Gordon les éléments de la matrice de monodromie

$$T(\lambda) = \begin{bmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ -B^+(\lambda) & A^+(\lambda) \end{bmatrix}$$

doivent vérifier la relation triangle

$$R(\lambda, \mu) [T(\lambda) \otimes T(\mu)] = [T(\mu) \otimes T(\lambda)] R(\lambda, \mu)$$

$$\text{avec } R(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b(\lambda, \mu) = \frac{i \sinh \gamma}{\sinh(\alpha - \beta + i\gamma)}, \quad c(\lambda, \mu) = \frac{\sinh(\alpha - \beta)}{\sinh(\alpha - \beta + i\gamma)}$$

$$\alpha = \hbar n \lambda, \quad \beta = \hbar n \mu$$

On en déduit les relations de commutation

$$A(\lambda)B(\mu) = \frac{1}{c(\mu, \lambda)} B(\mu)A(\lambda) - \frac{b(\mu, \lambda)}{c(\mu, \lambda)} B(\lambda)A(\mu)$$

$$A^+(\lambda)B(\mu) = \frac{1}{c(\lambda, \mu)} B(\mu)A^+(\lambda) - \frac{b(\lambda, \mu)}{c(\lambda, \mu)} B(\lambda)A^+(\mu)$$

$$[A(\lambda), A(\mu)] = [B(\lambda), B(\mu)] = 0 \quad \dots$$

qui généralisent les relations classiques

$$\{a(\lambda), a(\mu)\} = 0, \quad \{a(\lambda), b(\mu)\} = a(\lambda)b(\mu) \frac{2\gamma}{\lambda^2 - \mu^2} \dots$$

La relation triangle précédente sert essentiellement à assurer la propriété de commutation des traces des matrices de monodromie

$$[\text{Tr } T(\lambda), \text{Tr } T(\mu)] = 0.$$

Dans le cadre de ce nouveau formalisme on peut également exhiber des paires de Lax (quantiques). Le lecteur désireux de se rattacher plus étroitement à un formalisme lagrangien ou hamiltonien pourra se reporter à l'article [4] ainsi qu'à l'article de P.P. Kulish et E.K. Sklyanin ou, sur l'exemple du modèle à six vertex, on voit simultanément la relation triangle, les quantités en involution qui en découlent, dont l'hamiltonien du modèle XXZ, et une paire de Lax associée au problème [50].

De façon paradoxale on est amené à remarquer que, grâce au concept de relation triangle, l'intégrabilité des théories quantiques des champs apparaît presque comme plus simple que celle des champs classiques. Il existe, bien sûr, un pont entre ces théories (approches semi-classiques) et l'on peut voir quel est l'équivalent semi-classique de la relation triangle (relation F.B.R. [48]). Les modèles complètement intégrables connus en théorie des champs possèdent une propriété importante : la propriété de factorisation de la matrice S. Cette propriété remarquable et simple, bien qu'elle s'identifie formellement à la relation triangle, est en général peu reliée dans la littérature aux concepts précédents. Par exemple il n'est pas très facile de relier une théorie des champs intégrable donnée et la matrice S. On a pu A un niveau général par contre, de montrer que la matrice S est reliée à la factorisation de la matrice S. On a pu montrer que la matrice S est reliée à la factorisation de la matrice S. On a pu montrer que la matrice S est reliée à la factorisation de la matrice S.

opèrent sur les états entrant à n particules et d'impulsions données de la façon suivante :

$$Q_N | p_1 \dots p_n \rangle = \sum_{i=1}^n Q_N(p_i) | p_1 \dots p_n \rangle$$

(les particules sont largement séparées et n'interagissent pas).

On peut écrire une équation analogue pour les états sortants et, les Q_N étant conservés, on obtient, en appelant $p_1' \dots p_m'$ les m particules sortantes, l'équation :

$$\sum_{i=1}^n Q_N(p_i) = \sum_{j=1}^m Q_N(p_j')$$

L'infinité de ces équations ($N=1, 2, \dots, \infty$) contraint à avoir $n=m$, et également à ce que l'ensemble $\{p_1' \dots p_n'\}$ s'identifie à l'ensemble $\{p_1 \dots p_n\}$ (tout se réduit à des permutations des n particules). De cette propriété on tire enfin la propriété de factorisation de la matrice S en produit de matrice S à deux corps. En fait l'existence d'un nombre fini de quantités conservées suffit dans le raisonnement précédent pour démontrer la propriété de factorisation de la matrice S [51].

4b) Les liens avec les problèmes à n corps quantiques

Les théories quantiques des champs sont d'autre part reliées à des problèmes quantiques unidimensionnels à n corps. Ainsi dans le cas du modèle de Schrödinger non linéaire l'hamiltonien

$$H = \int dx \phi^*(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x) + g \phi^*(x) \phi(x) \phi(x)$$

préservant le nombre de particules, on peut se placer dans le sous-espace à N particules, N fixé, ce qui amène à écrire l'équation de Schrödinger correspondante :

$$\left[- \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2g \sum_{i < j} \delta(x_i - x_j) \right] \cdot \psi_N(x_1, \dots, x_N) = \lambda \psi_N(x_1, \dots, x_N)$$

Le même type de correspondance (seconde quantification + première quantification) peut être effectué sur les modèles de Thirring (massif), Gross-Neveu [52],

conduisant à des équations qui, tout comme la précédente, peuvent être résolues à l'aide de l'ansatz de Bethe [53]. Dans le cas du modèle de Thirring on peut écrire l'hamiltonien sous la forme :

$$H = \int dx \left[-i \left(\psi_1^+ \frac{\partial}{\partial x} \psi_1 - \psi_2^+ \frac{\partial}{\partial x} \psi_2 \right) + m_0 (\psi_1^+ \psi_2 + \psi_2^+ \psi_1) + g_0 \psi_1^+ \psi_2 \psi_1 \psi_2 \right]$$

nous voyons que le nombre N de particules 1 et M de particules 2 n'est pas conservé séparément dans le cas massif, par contre leur somme, elle, est conservée et l'on peut dans ce sous-espace écrire une équation de Schrödinger. Dans le cas non massif on obtient immédiatement l'équation

$$\left[-i \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial x_n} + i \sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial y_m} + g_0 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \delta(x_n - y_m) \right] \psi(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M) = \lambda \psi(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M)$$

(on reconnaît l'écriture en première quantification du modèle de Luttinger avec le potentiel particulier $V(x) = \delta(x)$ [54]).

Dans le cas du modèle de Sine-Gordon, la correspondance précédente disparaît, mais il est possible d'associer cependant, à la limite non relativiste de ce modèle, l'équation suivante :

$$\left[- \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^M \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} + \sum_{i < i'}^N 2V(x_i - x_{i'}) + \sum_{j < j'}^M 2V(y_j - y_{j'}) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M 2W(x_i - y_j) \right] \psi(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M) = \lambda \psi(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M)$$

$$\text{où } V(x) = \frac{A}{\sinh^2 \left(\frac{mV}{g} x \right)} \quad \text{et} \quad W(x) = \frac{-A}{\cosh^2 \left(\frac{mV}{g} x \right)}$$

5) Modèles exacts en mécanique statistique

5a) Les modèles unidimensionnels

La mécanique statistique offre une grande diversité de modèles intégrables, qu'il s'agisse de modèles sur réseau ou de modèles continus, de modèles unidimensionnels ou bidimensionnels. La spécificité de la dimension assure

souvent l'intégrabilité de nombreux modèles. On trouvera de bonnes revues de modèles unidimensionnels intégrables dans le livre de E.H. Lieb et D.C. Mattis, *Mathematical Physics in One dimension* [55], ainsi que dans le chapitre de C.J. Thompson dans le volume 1 de C. Domb et M.S. Green, *Phase transitions and critical phenomena* [56]. Nous ne citerons que l'exemple, intéressant de par ses généralisations multidimensionnelles, du gaz coulombien, discret ou continu, à une dimension, sur le cercle unité ou sur la droite réelle [57]. On calcule des quantités du genre

$$Z_n(\beta) = \int \dots \int dz_1 \dots dz_n \prod_{i < j} e^{\beta \ln |z_i - z_j|}$$

(dans le cas du cercle unité pour $\beta=1, 2, 4, Z_n$ peut être considéré comme la mesure du volume de certains espaces homogènes : ensembles de matrices orthogonales, unitaires, symplectiques). Ce calcul est équivalent à celui de la fonction de partition du modèle d'Ising en présence de champ d'hamiltonien :

$$H = \sum_{i,j} \sigma_i^x \sigma_j^x \ln |z_i - z_j| + h \sum_k \sigma_k^x$$

5b) Modèles exacts sur réseaux bidimensionnels

Considérons maintenant les modèles bidimensionnels en mécanique statique, et principalement les modèles sur réseau avec interactions locales et pour lesquels les spins peuvent prendre un nombre fini de valeurs. Il faut alors s'intéresser essentiellement à deux types de modèles : les modèles à spins et les modèles à vertex. Dans ces deux catégories on a coutume de distinguer les modèles complètement intégrables parce que se ramenant à des fermions libres, et les modèles que l'on peut résoudre du fait de l'ansatz de Bethe. Dans cette première catégorie (fermions libres) on trouve des modèles d'Ising bidimensionnels sur divers réseaux, avec plus ou moins de contraintes de couplage (Onsager [58], Miyama [59]), toute une variété de modèles de dimères (Green et Hurst [60]). Quelque soit le langage utilisé groupe de Clifford [61], fermions [62], Pfaffiens [63], variables de Grassmann [64] tout repose sur la nécessité d'avoir à un certain moment une exponentielle d'une forme quadratique (ce qui revient à dire des fermions libres). L'existence d'un terme quartique (comme dans le modèle à huit vertex symétrique par exemple) rend importante ces approches.

Une deuxième catégorie est constituée par les modèles que l'on peut

résoudre grâce à l'ansatz de Bethe (modèles ferroélectriques, problèmes des trois couleurs, modèles à six et huit vertex symétriques,...). On pourra se reporter à la revue de E.H. Lieb et F.Y. Wu [56].

C'est en 1970 que Sutherland s'est aperçu [65], pour ces deux catégories de modèles, de la relation de commutation entre la matrice de transfert pour ces modèles bidimensionnels et certains hamiltoniens quantiques associés à des modèles unidimensionnels. Ainsi la matrice de transfert du modèle à six vertex commute-t-elle avec l'hamiltonien du modèle XXZ (pour lequel l'ansatz de Bethe s'applique) :

$$H = \sum_n (J \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + J' \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + J'' \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z)$$

Ce n'est que plus tard que l'on a compris que cette propriété était la conséquence d'une relation triangle-étoile [66] sur ces modèles. Ceci indique que les modèles de fermions libres (bidimensionnels) ne sont qu'un cas particulier simple de la classe des modèles exacts (admettant une relation triangle). Cette inclusion est encore confirmée par le fait que l'on peut voir la méthode de Gel'fand-Levitan quantique comme une généralisation de la transformation de Jordan-Wigner [67]. De bonnes introductions à ces problèmes sont constituées par les revues de E.H. Lieb et F.Y. Wu [56], P.W. Kasteleyn [66] et plus récemment R.J. Baxter [68].

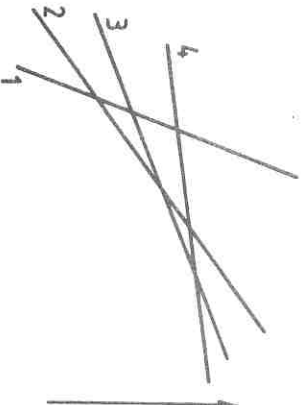
Le rôle de la relation triangle-étoile dans la solubilité exacte des modèles de mécanique statistique n'a été reconnu qu'assez tard ; la relation triangle-étoile était cantonnée au rôle de la transformation qu'il faut adjoindre à la dualité de Kramers-Wannier dans le cas des réseaux qui ne sont pas self-duals (typiquement le modèle d'Ising sur réseau nid d'abeille) [56]. M.J. Stephen et L. Mittag ont donné une solution du modèle d'Ising en utilisant la relation triangle-étoile bien connue du modèle d'Ising [69]. H.J. Hilhorst, M. Schick et J.M.J. Leeuwen ont, en utilisant uniquement la relation triangle-étoile, (dans le cadre d'une procédure de renormalisation dite "différentielle") calculé exactement des propriétés critiques du modèle d'Ising bidimensionnel [70], preuve que la relation triangle-étoile est bien reliée aux propriétés critiques de ces modèles. T. Baxter et I.G. Enting ont pu montrer [71] qu'en

on pouvait calculer complè-

remarquablement tiré parti de l'existence d'une transformation triangle-étoile généralisée [72]. Sa solution repose de façon cruciale sur cette propriété. On peut démontrer que cette relation assure automatiquement l'existence d'une famille, dépendant d'un ou plusieurs paramètres continus, de matrices de transfert qui commutent. En développant par rapport à ces paramètres on déduit facilement l'existence d'un nombre infini de grandeurs en involution (nombre infini de lois de conservation) ([73] pour un exposé élémentaire). En fait la recherche de nouveaux modèles exacts en mécanique statistique se focalise à l'heure actuelle sur la recherche de nouvelles relations triangles. Une fois obtenue une telle relation, les calculs se déroulent selon un schéma fixe et bien connu. R.J. Baxter dans la résolution du modèle hard-hexagon a , avant toute chose, recherché la relation triangle correspondant à ce modèle [74].

6) La correspondance entre mécanique statistique et théorie des champs

Les correspondances entre mécanique statistique sur réseau et théorie des champs appellent quelques remarques : il faut distinguer a priori deux types de correspondances ; d'une part la correspondance "naturelle" qui consiste à voir la théorie des champs comme une limite au continu d'un problème de mécanique statistique lorsque le pas du réseau tend vers zéro. L'exemple typique est la limite au continu de Luther [76] du modèle XYZ qui conduit au modèle de Thirring, ces deux problèmes étant tous deux exactement solubles. Le fait de considérer un réseau régularise le problème de théorie des champs et permet d'éviter bon nombre de problèmes difficiles de la théorie des champs. D'autre part, nous avons fait allusion dans le cadre des problèmes solubles à un autre type de correspondance illustrée par l'identification formelle entre la matrice S à deux corps du modèle de Sine-Gordon et le vertex du modèle à 6 vertex symétrique. Considérons le réseau des interactions du modèle de Sine-Gordon.



La particule 1 interagit avec la particule 2, puis avec la particule 3, ensuite la particule 2 interagit avec la particule 3... Un tel réseau s'identifie, pour l'exemple du modèle de Sine-Gordon, au réseau d'un modèle à 6 vertex Z -invariant [77]. Or ce réseau, du fait de la relation triangle, (Z invariance) (cette dernière propriété s'identifiant à la propriété de factorisation de la matrice S) peut se ramener au réseau régulier du modèle à six vertex. Le réseau du modèle à six vertex se situe dans l'espace direct, celui du modèle de Sine-Gordon se situe, lui, dans un espace abstrait. Le paramètre spectral qui sert à uniformiser le modèle à six vertex est un paramètre abstrait, et il lui correspond le paramètre de rapidité du modèle de Sine-Gordon qui a , lui, une signification physique précise. Cette dernière correspondance est donc une correspondance abstraite, qui est surtout une correspondance entre les structures particulières, reflétant la solubilité commune à ces deux modèles : la relation triangle et la factorisation de la matrice S . Cette correspondance est parfois plus intéressante que la précédente, (on peut "récupérer" toutes les matrices S calculées dans la littérature et les interpréter comme des fonctions de partition de modèles de mécanique statistique plus ou moins compliqués, souvent des modèles à "couleurs") mais par contre elle est, en dimension deux, limitée aux problèmes de théorie des champs admettant une propriété de factorisation de la matrice S . De ce point de vue, la situation est plus intéressante lorsque l'on se place sur le versant "mécanique statistique" : on peut toujours a priori considérer un modèle à vertex et rechercher une éventuelle relation triangle ; si l'on y arrive, on a obtenu un nouveau modèle soluble ; par contre, du point de vue de la théorie des champs, on aura simplement obtenu une relation de factorisation d'une matrice S qui ne correspond peut-être à aucune théorie des champs, ou bien encore qui correspond effectivement à une théorie des champs, mais sans savoir préciser laquelle. En dimension trois (ou plus) il n'y a plus correspondance entre le vertex du modèle de mécanique statistique et la matrice S à deux ou trois corps ; en effet, en dimension deux, stricto sensu, la matrice S à deux corps s'écrivait :



$$S(\theta_a, i_a, \theta_b, i_b, \theta_c, i_c, \theta_d, i_d) =$$

$$\delta(\theta_c - \theta_a) \cdot \delta(\theta_d - \theta_b) \cdot S(i_a, i_b, i_c, i_d, \theta_a - \theta_b)$$

où $\theta_a, \theta_b, \theta_c, \theta_d$ (resp. i_a, i_b, i_c, i_d) étaient les rapidités (resp. les "charges") des diverses particules et l'on oublait couramment les deux δ de Kronecker portant sur les variables continues θ pour ne s'occuper que du seul terme $S(i_a, i_b, i_c, i_d, \theta_a - \theta_b)$ et c'est ce terme qui s'identifiait au vertex du modèle de mécanique statistique ; en dimension trois les variables continues (variables de Mandelstam...) interviennent et l'on a plus d'objet ne dépendant que des charges $i_a, i_b, \dots$ qui pourrait s'identifier éventuellement au vertex du modèle de mécanique statistique en dimension trois ou plus. L'argument selon lequel il ne peut y avoir (moyennant des hypothèses assez générales que nous ne détaillons pas) de factorisation de la matrice S en dimension strictement supérieure à deux est souvent mis en avant pour mettre en doute la possibilité d'avoir une solubilité complète en dimension supérieure à deux. Du fait de l'absence de correspondance précédemment indiquée, on peut parfaitement imaginer un modèle de mécanique statistique possédant une relation tétrahédre et dont les modèles de théorie des champs associés par une limite ou continu (en supposant qu'elle existe) ne possèdent pas de propriété de factorisation de la matrice S ; les matrices S à deux ou trois corps (ou plus) ne semblent plus être, en dimensions supérieures ou égales à trois, les objets les plus simples et les plus intrinsèques pour décrire les propriétés d'intégrabilité des modèles. Il est donc clair que les équations triangulaires sont une des clefs de voûte de l'étude des différents problèmes de la physique mathématique bidimensionnelle. Nous consacrons toute une note CEA à l'étude des relations triangulaires et de ses généralisations [78], aussi allons-nous seulement donner ici, une liste (provisoire et non exhaustive) des modèles pour lesquels existe une relation triangle ou une relation de factorisation de la matrice S :

- les modèles de fermions libres [79][58][59]
- le modèle à 8 vertex symétrique [72]
- le modèle à 19 vertex [80]
- le modèle d'hexagones durs [74]
- les modèles à vertex à q couleurs [81]
- la matrice S du modèle $O(N)$ [82]
- la matrice S du modèle $U(N)$ [83]
- la matrice S de la chaîne de Toda quantique [84]
- la solution elliptique de Fateev [85]

- le modèle de Shabat-Mikhailov quantique [86]
- les solutions à symétrie S_n [87]
- les solutions de Cherednik et leurs généralisations par H.C. Ottinger, J. Honerkamp et surtout A.A. Belavin [88][99][90]
- les nouvelles solutions à symétrie S_n de V.V. Bazhanov et Y.G. Stroganov (une trentaine de solutions) [91]
- etc, etc...

Nous conseillons au lecteur désireux d'explorer cette "nébuleuse" de lire l'article de V.V. Bazhanov et Y.G. Stroganov [91], celui de A.A. Belavin [90] ainsi que l'article de revue de A.B. Zamolodchikov [92]. Il pourra lire également l'article de H.C. Ottinger et J. Honerkamp [89] ainsi que celui de C.L. Schultz [81].

7) Les structures en jeu dans les modèles solubles : la relation triangle comme concept fondamental pour ces modèles

En conclusion de cette première partie, il nous faut essayer de dégager les concepts les plus généraux et les plus simples expliquant l'exacte solubilité des modèles. Nous avons relié certains des concepts et techniques intervenant sur ce problème. Cependant au niveau des structures algébriques une certaine diversité demeure, ne serait-ce qu'entre les algèbres de Lie semi-simples (espaces symétriques, diagrammes de Dynkin...), les algèbres de Clifford, ou les algèbres de Heisenberg, que l'on peut rencontrer dans ces modèles solubles. Cette diversité semble le reflet de structures plus générales correspondant à des groupes de Lie de dimension infinie. On commence à reconnaître de telles structures dans les problèmes solubles. Ne disposant pas d'un recul suffisant par rapport à ces études qui se développent à l'heure actuelle nous allons seulement en citer certains exemples : en utilisant systématiquement certaines algèbres de Lie de dimension infinie généralisant les algèbres de Lie semi-simples (algèbres de Kac-Moody) Adler et van Moerbeke proposent [93] une approche de divers systèmes complètement intégrables qui leur permet d'utiliser à la fois les techniques d'algèbres de Lie et la description des florets hamiltoniens à l'aide des jacobiniennes de courbes algébriques [93]. Le formalisme des hamiltoniens de Kac-Moody apparaît comme une véritable machine à fabriquer des intégrales premières, et permet également de décrire les espaces définis par la constance des intégrales premières et les florets dont ils sont pourvus à l'aide de jacobiniennes de courbes algébriques [94].

Autre exemple, E. Dote, M. Kashiwara et T. Miwa [95] dans le cadre d'une théorie de Galois pour les équations aux dérivées partielles non linéaires étudient le groupe de transformation d'équations telles que KdV, Boussinesq, Kadomtsev-Petviashvili ... Ces groupes ne sont plus de dimension finie, mais sont en l'occurrence des groupes de Lie de dimension infinie ou les groupes associés à des algèbres de Kac-Moody. Dans la construction de la représentation d'une algèbre de Lie affine, Lepowsky et Wilson font jouer un rôle central à l'opérateur de vertex [96] :

$$X(p) = \exp \left(2 \sum_j x_j p^j \right) \exp \left(-2 \sum_j \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} p^j \right)$$

(j impair positif)

Ils remarquent que cet opérateur de vertex s'identifie complètement à la transformation de Bäcklund infinitésimale pour ces équations.

Ce même opérateur de vertex se rencontre également dans la théorie des modèles duaux où, récemment, Frenkel et Kac [97] ont pu reconnaître dans l'algèbre de Virasoro des représentations des algèbres de Kac-Moody. L'algèbre de Virasoro est une algèbre que l'on rencontre dans les modèles duaux, et qui est engendrée par une combinaison de créateurs et d'annihilateurs :

$$L_n = 1/2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{-m} \alpha_{n+m} :$$

$$(\alpha_n = i\sqrt{n} a_n, \alpha_{-n} = \alpha_n^\dagger)$$

$$[L_n, L_m] = (m-n) L_{m+n} + \frac{1}{3} m(m^2-1) \delta_{m,-n}$$

(Un problème des modèles duaux est l'existence d'une dimension critique ($d=26$), nécessaire pour obtenir l'élimination des états non physiques. Une nouvelle version, tenant compte de l'anomalie conforme due à Polyakov [98], semble porter remède à ce problème. Pour $d=26$ la dynamique des cordes est celle des oscillateurs harmoniques libres, par contre pour $d < 26$, elle est décrite par une théorie non linéaire intégrable (Liouville quantique bidimensionnelle).

L'extension supersymétrique de cette théorie qui à $d=3$ est équivalente au modèle d'Ising tridimensionnel se réduit à la théorie de Liouville supersymétrique [99]. Des algèbres de Lie graduées se rencontrent encore sur les équations d'Einstein à symétrie axiale [100] et aussi la théorie de Yang-Mills self-duale [101].

Enfin ces mêmes algèbres semblent être appelées à jouer un rôle important dans le cadre de la théorie du quantum inverse scattering [48] et pourrait permettre de classifier les théories des champs bidimensionnels intégrables. En effet le concept de relation triangle qui est véritablement à la base de la théorie du quantum inverse scattering semble pouvoir s'inscrire dans le cadre de ces structures algébriques de dimensions infinies (algèbres des courants [48]).

Ainsi les modèles solubles commencent à s'intégrer (en dimension deux pour l'instant) à l'intérieur d'une description générale utilisant des notions aux frontières actuelles de la théorie des algèbres de Lie. Cette description pourra peut-être permettre, à moyen ou à long terme, d'atteindre des objectifs ambitieux tels que la classification de tous les problèmes solubles d'un certain type. Cependant dans l'état actuel, il est aussi nécessaire d'utiliser une approche moins abstraite basée sur l'étude de la propriété simple et fondamentale pour les problèmes solubles que constitue l'existence d'une relation triangle.

Cette même propriété remarquée par R.J. Baxter, dans le cadre de mécanique statistique englobe, en dimension deux, les concepts de fermions libres et d'ansatz de Bethe couramment utilisés dans cette discipline. De plus on peut voir qu'elle s'identifie formellement avec la propriété de factorisation de la matrice S , en dimension deux. On retrouve également cette même propriété dans le cadre des problèmes à n -corps sous le vocable de relation de Yang [28], relation qui n'est autre que l'expression de l'ansatz de Bethe algébrique. On peut également signaler que cette même notion apparaît dans le cadre de la théorie des opérateurs d'entrelacement [102] (la propriété de factorisation des opérateurs d'entrelacement coïncide avec la relation de factorisation de Yang-Baxter). Il semble enfin que l'on puisse relier la relation triangle et les transformations de Bäcklund [103]. Cette propriété simple, l'existence d'une relation triangle, apparaît donc comme jouant un rôle fondamental dans le cadre des modèles solubles, rôle qui justifie amplement l'étude spécifique de la relation triangle.

III - LES MODELES INTEGRABLES ET LEURS APPLICATIONS A LA PHYSIQUE

1) Polymorphisme des modèles intégrables : l'exemple du modèle à six vertex

Nous allons essayer de montrer que le nombre, encore trop faible à l'heure actuelle des modèles intégrables, doit être mis en balance avec la grande variété des formes que peut revêtir un même modèle. Cette variété sera illustrée sur l'exemple du modèle à six vertex symétrique et de toute la circuiterie des modèles équivalents ou qui lui sont reliés, ce qui amènera à poser le problème de l'universalité de ce modèle dans le cadre de la physique bidimensionnelle.

Considérons comme point de départ le modèle bidimensionnel suivant : à chaque site i on associe un entier relatif n_i ; le poids de Boltzmann pour deux sites voisins est

$$W = e^{-K(n_i - n_j)^2}$$

De tels modèles peuvent, par exemple, espérer modéliser la transition rugueuse d'un modèle d'Ising tridimensionnel (en fait dans une hypothèse S.O.S. i.e. solid-on-solid stricte à la Miller-Hartmann-Zittartz [104] on considèrerait plutôt le poids $W = e^{-K|n_i - n_j|}$). Lorsqu'on effectue une dualité à partir de ce modèle, le dual de Z étant $[0, 2\pi]$, on passe à un modèle où une variable angulaire θ_i a remplacé la variable n_i et où le poids de Boltzmann pour deux sites plus proches voisins est

$$\tilde{W} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-Kn^2 + i(\theta_i - \theta_j + 2\pi n)}$$

où (i, j) est la liaison duale de la liaison (i, j) . On reconnaît là une fonction θ , donc une fonction périodique de période 2π . Villain a préféré remplacer ce poids par le poids

$$\tilde{W} = \sum_{m_i, j \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{1}{4K}(\theta_i - \theta_j + 2\pi m_i, j)^2}$$

où la variable $\theta_i - \theta_j$, est remplacée par elle même plus une variable de liaison $m_i, j \in \mathbb{Z}$ qui restaure la propriété de périodicité. Sous cette forme, la séparation en ondes de spin $(\theta_i - \theta_j)$ et excitations vortex (m_i, j) est particulièrement nette. Il est par ailleurs clair que ce modèle est semblable au modèle XY dont le poids est $W = e^{K \cos(\theta_i - \theta_j)}$.

Revenons au modèle de départ parfois appelé "discrete gaussian model" [105]. Les variables n_i sont des entiers, mais on peut tout aussi bien les voir comme des variables réelles, à condition d'insérer des fonctions δ afin de préserver le caractère discret :

$$Z = \int \prod_k dh_k \cdot \prod_k \left(\sum_{n_k \in \mathbb{Z}} \delta(h_k - n_k) \right) \cdot e^{-K \sum_{\langle i, j \rangle} (h_i - h_j)^2}$$

On peut choisir différentes représentations de la fonction δ . La plus naturelle utilise la formule de Poisson

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(h - n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i k \cdot h}$$

C'est ce que firent par exemple Chui et Weeks [105]. Le calcul de la fonction de partition se ramène à des intégrales gaussiennes qui, une fois effectuées, donnent (après transformation de Fourier pour profiter de l'invariance par translation du modèle) $Z = Z_G \cdot Z_C$

$$-K \sum_{\langle i, j \rangle} (h_i - h_j)^2$$

$$\text{où } Z_G = \int \prod_k dh_k \cdot e$$

est la fonction de partition du modèle

$$\text{gaussien et } Z_C = \sum_{\{n \in \mathbb{Z}\}} e^{i \sum_{i, j} n_i \cdot n_j \cdot U_{ij}}$$

où U_{ij} est approximativement proportionnel à $\ln d(i, j)$ où $d(i, j)$ désigne la distance entre les sites i et j . Autrement dit Z_G est la fonction de partition d'un gaz coulombien neutre. D'autre part Chui et Lee [106] ont réalisé l'équivalence entre le modèle de gaz de coulomb bidimensionnel et le modèle de Luttinger unidimensionnel généralisé pour inclure la diffusion en retour et d'hamiltonien

$$H = H_S + H_L$$

$$H_S = \sum_{k, s} \sum_{k, s} k(a_{k, s} \cdot a_{k, s}^+ - b_{k, s} \cdot b_{k, s}^+) + \frac{2V}{L} \sum_k \rho_1(k) \rho_2(-k)$$

$$H_L = \sum_{k, s} \int dx \psi_{1, s}^+(x) \psi_{2, s}^+(x) \psi_{1, s}(x) \psi_{2, s}(x) (U_{||} \cdot \delta_{s, s'} + U_{\perp} \cdot \delta_{s, -s'})$$

$$\text{ou } \rho_1(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p,s} a_{p+k,s} \cdot a_{p,s}^+ \quad , \quad \psi_{1,s}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{ikx} \cdot a_{k,s}$$

(et de même ρ_2 et $\psi_{2,s}$ avec $b_{k,s}$ et $b_{k,s}^+$)

L'hamiltonien H_S est celui de l'hamiltonien du modèle de Luther [54] on voit facilement qu'il s'identifie totalement au modèle de Thirring non massif. Luther a montré [107a)], que cet hamiltonien $H_S + H_L$ pouvait se réécrire comme une nouvelle somme $H_0 + H_1$ de deux hamiltoniens qui commentent. Le premier hamiltonien H_0 correspond à un nouveau modèle de Luther ; le second H_1 , est vu comme s'identifiant à un modèle $X-Y-Z$ dans une limite du continu. En fait, il correspond au modèle de Thirring massif, ou encore au modèle de Sine-Gordon. Le modèle de Thirring massif est équivalent au modèle de Sine-Gordon comme l'avait indiqué Coleman [108]. (On retrouve d'ailleurs les transformations qui permettent de passer des fermions de Thirring aux bosons de Sine-Gordon dans cette série d'article par Luther, notamment l'équation (4) de [107b]). Luther a également précisé le lien entre le modèle $X-Y-Z$ et le modèle de Thirring, en montrant qu'il était possible, en faisant une limite au continu du modèle $X-Y-Z$, d'aboutir au modèle de Thirring massif [76] (après avoir effectué une transformation de Jordan-Wigner, on distingue les sites pairs et impairs qui vont donner naissance aux deux composantes du champ Thirring ψ_1 et ψ_2 ; on notera l'utilisation de la transformation canonique $\psi_2 \rightarrow \psi_2^+$).

Pour une discussion plus complète des relations entre les problèmes de fermions unidimensionnels et la chaîne XYZ on pourra se reporter au chapitre de Luther dans [8]. Cet hamiltonien unidimensionnel XYZ commute, ainsi que nous l'avons déjà mentionné, avec la matrice de transfert du modèle à huit vertex symétrique [66]. L'expression de la fonction de partition du modèle à six vertex symétrique, un cas particulier du modèle précédent, s'identifie entièrement avec celle de la matrice S du modèle de Sine-Gordon (la matrice S à deux corps s'identifiant formellement avec le poids de Boltzmann associé au vertex du modèle de mécanique statistique [73][75]). Le modèle à six vertex symétrique est également équivalent au modèle de Potts bidimensionnel à la température critique (R.J. Baxter, H.N.V. Temperley, S.E. Ashley, Proc.Roy.Soc.Lon. A358, 535 (1978)).

Si nous revenons quelque peu en arrière, au modèle gaussien discret, en prenant une autre représentation des fonctions ϕ :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(h-n) = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{B}{\Gamma(1/2)} \cdot e^{-B^2 \sin^2 \pi h}$$

on réécrit la fonction de partition :

$$Z = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{B}{\Gamma(1/2)} \prod_k dh_k \cdot e^{-K \sum_{\langle i,j \rangle} (h_i - h_j)^2 - B^2 \sum_k \sin^2 \pi h_k}$$

Par une limite au continu, a désignant le pas du réseau dont on prend la limite $a \rightarrow 0$, on passe à :

$$Z = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{B}{\Gamma(1/2)} \int Dh \cdot e^{-\int dx dy \left\{ K (\nabla h)^2 + \left(\frac{B}{a} \right)^2 \sin^2 \pi h \right\}}$$

On retrouve une théorie du type Sine-Gordon mais avec une métrique euclidienne ici. Ces correspondances, ou équivalences, engendrent des égalités entre les paramètres de ces différents modèles. Ainsi entre le paramètre β du modèle de Sine-Gordon le paramètre g du modèle de Thirring, et le paramètre K du modèle gaussien discret nous avons les relations :

$$\frac{\beta^2}{4\pi} = \left(1 + \frac{g}{\pi}\right)^{-1} \quad , \quad g = \pi \left(\frac{4\pi}{\beta^2} - 1 \right) \quad , \quad \beta^2 = \frac{2}{K} \quad , \quad g = \pi \cdot (4\pi K - 1)$$

D'autre part au champ libre ϕ du modèle de Sine-Gordon on peut associer un champ dual $\tilde{\phi}$ [109] défini par

$$\partial_\mu \phi = \epsilon_{\mu\nu} \cdot \partial^\nu \tilde{\phi}$$

où $\epsilon_{\mu\nu}$ est le tenseur totalement antisymétrique usuel $\epsilon_{01} = -\epsilon_{10} = 1$ (cette transformation de dualité correspond à la transformation $\beta \rightarrow \frac{4\pi}{\beta}$). Au-delà des égalités entre paramètres, il existe de très nombreuses correspondances entre les opérateurs apparaissant dans ces problèmes : nous ne citerons que les correspondances suivantes entre les opérateurs des modèles de Sine-Gordon et du modèle de Baxter :

$$\sin \frac{\beta\phi}{2} \leftrightarrow \mu \quad (1) \quad , \quad \cos \frac{\beta\phi}{2} \leftrightarrow \sigma \quad (1) \quad (2)$$

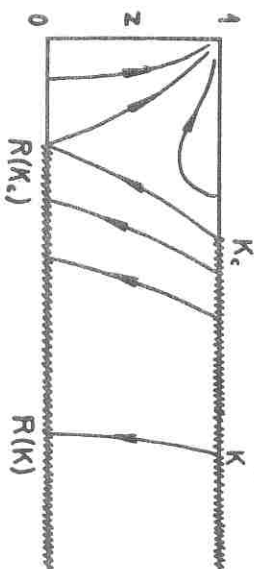
$$\sin \frac{2\pi}{\beta} \phi \leftrightarrow \sigma \quad (2) \quad (1) \quad ,$$

où σ, μ sont les variables ordre et désordre usuelles et l'indice 1,2 correspond à la désignation d'un des deux sous réseaux intervenant dans la formulation

du modèle de Baxter en terme de modèle à spin. Certaines de ces équivalences ont plus ou moins été reprises par Knops [110] dans le cadre du groupe de renormalisation, en prenant comme point de départ une généralisation suffisamment large du modèle de Villain :

$$Z = \sum_{\{m_{ij}, \{z_i\}\}} \int \prod_i d\theta_i \cdot e^{-K \sum_{\langle i,j \rangle} (\theta_i - \theta_j + 2\pi m_{ij})^2 + \lambda \sum_i z_i^2}$$

où η_0 est la somme des variables de liaisons entourant une plaquette. Lorsque $z=1$ on retrouve le modèle de Villain strict (dual du modèle gaussien discret) et lorsque $z=0$ nous voyons que, du fait du terme complémentaire, les m_{ij} doivent être des différences de variables de sites entières : $m_{ij} = \eta_i - \eta_j$. Ceci permet de définir la variable continue $X_i = \theta_i + 2\pi \eta_i$. La fonction de partition s'identifie alors avec celle du modèle gaussien pur. Le groupe de renormalisation agissant sur ce modèle (ou des modèles encore plus généraux où l'on a rajouté d'autres termes tels que par exemple des termes d'anisotropie $\sum_{\langle i,j \rangle} \cos(p\theta)$) réalise le passage continu de ces modèles particuliers les uns dans les autres : ainsi le modèle XY devient le modèle gaussien, le modèle gaussien discret se projette sur le modèle gaussien. D'autre part, les lignes critiques de ces modèles se correspondent : la région de basse température du modèle XY ($K > K_c$, ligne de Kosterlitz Thouless) est reliée à la ligne gaussienne de points fixes. Les bornes de ces lignes se correspondent : on peut voir notamment que K_c , le point critique du modèle XY, doit correspondre à la valeur critique du modèle gaussien $K = \frac{1}{\pi}$.



Le groupe de renormalisation fournit ainsi la valeur de l'exposant des fonctions de corrélation du modèle. Il varie continûment comme $\eta = 1/4\pi R(K)$. La fonction $R(K)$ n'est pas connue exactement, pas plus que K_c ; cependant la figure précédente implique que $R(K_c)$ doit être égal à la valeur connue pour le modèle gaussien $1/\pi$, ce qui conduit à la valeur $\eta_c = 1/4$, qui n'est

autre que la valeur connue pour le modèle d'Ising. Lorsqu'on introduit le modèle de Baxter dans les schémas précédents, on s'aperçoit qu'effectivement les points K_c et $R(K_c)$ correspondent également à l'extrémité de la Baxter-line où les deux sous-réseaux d'Ising, constituant le modèle, découplent. Cependant ce point particulier correspond également, au travers de toutes les correspondances précédentes, aux points $\beta_c^2 = 4\pi$ ou $g=0$ pour lesquels il est bien connu que les modèles de Sine-Gordon et de Thirring deviennent des théories libres. Ce type d'approche utilisant le groupe de renormalisation appliqué à des modèles de Villain généralisés ou, ce qui revient au même, à des modèles de gaz coulombiens bidimensionnels, eux aussi généralisés, a été repris par de nombreux auteurs. Kadanoff a notamment montré [111] qu'en considérant des gaz coulombiens faisant intervenir deux types de charges (électriques, magnétiques) on pouvait rendre compte d'une physique extrêmement large.

A l'appui de cette réduction de nombreux modèles à des gaz classiques neutres de particules en interaction avec un potentiel logarithmique, le lecteur pourra se reporter aussi aux articles de S.A. Bulgadaev [112] et S.G. Rajeev [113]. Considérons le modèle décrit par la grande fonction de partition suivante :

$$Z(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{N!} \sum_{\{\sigma_i\}} \int \prod_i d^d x_i \cdot e^{-\beta H_N}$$

où $H_N = - \sum_{i < j}^N \sigma_i \sigma_j \ln \left| \frac{x_i - x_j}{a} \right|$, et $\sum_i$ désigne la somme sur toutes les configurations contraintes par la condition de neutralité $\sum_i \sigma_i = 0$. (On reconnaît la version continue du modèle d'Ising à interaction avec un potentiel logarithmique qui était reliée au modèle de Sine-Gordon). Ce modèle présente les propriétés physiques déjà mentionnées suivantes : une transition au point $\beta_F = 2$, où le modèle se réduit à un modèle de fermion libre, pour lequel la théorie acquiert une invariance conforme supplémentaire, et à partir duquel on voit apparaître la formation de paires neutres. On note au passage la grande analogie entre la fonction de partition et les amplitudes intervenant dans les modèles duaux [114].

Rajeev a montré [113] que la gravité quantique euclidienne (avec une constante cosmologique nulle) en deux dimensions est équivalente au modèle

précédent^(*). Ceci lui permet de ramener la gravité quantique à deux dimensions à des modèles intégrables comme Sine-Gordon ou Thirring et, par exemple, d'obtenir la matrice S correspondante. On peut voir dans cet article coexister des descriptions et des résultats provenant de la description de Kosterlitz-Thouless (pour les fonctions de corrélation), des plasmas, et du modèle de Sine-Gordon (par exemple pour les états liés $m_n = 2m \sin \frac{n\gamma}{16}$). Comme dans tous les modèles figurant dans ce paragraphe, et dont nous avons souligné les liens, la physique de ce modèle est dominée par la topologie et la théorie des perturbations apparaît difficile à mettre en oeuvre.

Pour mettre un point final à ce réseau d'équivalences, ou simplement de relations allant par exemple du modèle XY bidimensionnel classique au modèle de Potts à la température critique, signalons les équivalences entre un modèle de spin classique à symétrie $O(n)$ d'hamiltonien $\sum_{\langle i,j \rangle} \ln(1 + x_i^T \cdot x_j^T)$ et le modèle à six vertex ou encore certains modèles SOS ou de Potts bidimensionnels [115].

2) Revue non exhaustive des applications des modèles intégrables en physique

2a) Quelques exemples

Dans quels domaines de la physique peut-on rencontrer de tels problèmes dits complètement intégrables ? En fait nous allons voir qu'ils interviennent dans presque tous les domaines de la physique : les ondes dans les fluides, les plasmas, la physique du solide (effet Kondo, effet Josephson), la physique des particules, le mouvement de solide rigide... Nous allons le montrer en ébauchant une liste (non exhaustive) de problèmes correspondant à divers domaines de la physique.

L'équation KdV décrit tout système d'onde plane faiblement non linéaire et faiblement dispersif. Dans l'onde solitaire la non-linéarité u_x est justement contre-balançée par la dispersion u_{xxx} . Une telle équation gouverne, par exemple, les ondes dans les canaux de largeur suffisante. (C'est la fameuse découverte de Russel en 1834). De même l'équation de Boussinesq $\phi_{xx} - \phi_{xt} = -[(\phi^2)_{xx} + 1/4 \phi_{xxxx}]$ peut prétendre modéliser des ondes de bas fond (dans des canaux par exemple) [116], ou des ondes dans les plasmas.

^(*) en passant par une expression intermédiaire due à Polyakov [98] qui fait intervenir le modèle de Liouville $\int D\phi \exp \left(-A \int \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \mu^2 e^\phi \right] d^2x - A \int \phi \frac{\partial\phi}{\partial t} dy \right)$

L'équation de Sine-Gordon $u_{xx} - u_{tt} = \sin u$, elle, apparaît en physique dans la théorie des dislocations dans les cristaux [117]. Elle décrit la propagation des fluxons dans les jonctions Josephson [118], ou la propagation de pulses optiques courts résonants [3], le phénomène de la superradiance [119], les ondes de densité de charge [120]. L'équation de Schrödinger non linéaire $i u_{xx} + 2u|u|^2 = 0$ gouverne l'évolution de toute onde presque monochromatique faiblement non linéaire mais fortement dispersive, comme par exemple l'évolution d'ondes en eaux profondes, la propagation des pulses de chaleur dans un solide [121], les ondes de Langmuir dans les plasmas [122] ; elle est également reliée à l'équation de Ginzburg-Landau en superconductivité [123].

Une équation aux différences, comme l'équation d'Hirota [124], s'applique aux filtres électriques non linéaires :

$$\frac{d^2}{dt^2} \log(1+V_n(t)) = V_{n+1}(t) - 2V_n(t) + V_{n-1}(t)$$

La chaîne continue de spin d'Heisenberg dont l'équation est (équation de Landau-Lifshitz) [125] :

$$\dot{\vec{S}}_i = \vec{S}_i \wedge \vec{S}_{i+1} + \vec{S}_i \wedge \vec{S}_{i-1}$$

s'applique, à la limite des grandes longueurs d'onde, à des ferromagnétiques idéalisés, traités par soucis de simplification comme des vecteurs classiques. Cette équation, en l'absence du champ magnétique $\vec{H}_0$, peut être mise en correspondance avec l'équation de Schrödinger non linéaire (transformation de jauge). De façon générale, les plasmas sous champs magnétiques externes sont des milieux très particuliers qui présentent de nombreuses formes d'oscillations dont les amplitudes atteignent facilement un niveau tel, que les effets non linéaires sont du même ordre, ou prévalent, dans la compétition avec les effets dispersifs ; on peut ainsi retrouver les équations KdV, KdV modifiées et Schrödinger non linéaire cubique.

L'équation $u_{xx} + 2[1 - |u|^2]u u_t = 0$ intervient en théorie des plasmas et dans les interactions de radiations avec les plasmas [126]. La connection de cette équation avec les équations de turbulence de Langmuir a été effectuée par Zakharov [127].

Il faut également mentionner l'application de ces notions d'intégrabilité aux problèmes de mécanique (mouvement de solides... [128]) et surtout aux

problèmes de relativité générale : Il a été trouvé une transformation de Bäcklund pour l'équation de Ernst $(Re(E) \cdot \nabla^2 E - (VE)^2)$ intervenant en relativité générale pour les champs à symétrie axiale [129]. Une paire de Lax a également été obtenue pour cette même équation [130].

Si nous quittons maintenant le domaine des équations non linéaires, on ne s'étonnera pas que les problèmes complètement intégrables trouvent de nombreuses applications dans une discipline riche en problèmes à n corps, la physique des solides : la thermodynamique du modèle d'échange $s-d$ avec des impuretés arbitraires (problème Kondo) a pu par exemple être résolue [131] grâce à l'ansatz de Bethe ; l'hamiltonien de ce problème s'écrit :

$$H_{s,d} = \sum_{\lambda, \sigma=\pm 1} \epsilon_{\lambda} c_{\lambda\sigma}^+ c_{\lambda\sigma} + 4J \sum_{\lambda, \lambda'; \sigma, \sigma'} c_{\lambda\sigma}^+ \bar{c}_{\sigma\sigma'} c_{\lambda'\sigma'} \bar{S}_{\lambda'}$$

(ce modèle décrit la diffusion d'un électron par un moment magnétique localisé $S=1/2$). Plus précisément c'est la généralisation de Sutherland de l'ansatz de Bethe où l'on a pas un jeu d'impulsion $k_1 \dots k_n$ qui intervient, mais un ensemble de tels jeux [132], qui est ici en cause. Un des intérêts de ce calcul exact sur l'effet Kondo est, entre autres, de permettre l'accession à des régions difficilement accessibles à la théorie des perturbations, telle que la région $H < T_K$ (température de Kondo ; H est le champ magnétique) ; notamment en ce qui concerne la susceptibilité magnétique une expression exacte peut être donnée ce qui permet d'évaluer celle-ci dans la région $H \ll T_K$ [131].

Un autre modèle important en Physique des Solides est le modèle de Peierls (parfois appelé modèle de Fröhlich). Un cas particulier de ce modèle s'avère être un modèle complètement intégrable [133]. Ce modèle est relié à divers problèmes comme la transition commensurable - incommensurable, les ondes de densité de charge [134], les transitions métal-isolant, le modèle de Frenkel-Kontorova, le modèle ANNI [135]. Une perturbation à partir du modèle de Peierls exactement intégrable, résolue par Dzyaloshinsky et al [136], montre l'apparition des deux régimes : stochastique et escalier du diable. Dans le cas complètement intégrable, on remarque l'absence d'accrochage (pinning). Une généralisation de ce problème de Peierls-Fröhlich est liée à l'équation KdV [137].

Il semble de façon générale que les modèles intégrables, à un nombre fini de gap, puissent jouer un rôle important dans tous les problèmes d'électrons dans les solides [137][138]. Toujours dans le cadre de l'intérêt des modèles intégrables pour la Physique, revenons au "circuit" de correspondance entre

différents modèles et le modèle de Sine-Gordon (modèles rugueux, gaz de coulomb, modèle XY bidimensionnel, classique, modèle de Luttinger, Sine-Gordon,...). Sur cette "circuiterie" l'interfertilisation entre ces différents modèles est particulièrement évidente, et ce, surtout au niveau de la physique profonde de ces modèles : ainsi se correspondent, par exemple, les solitons de Sine-Gordon et les magnons du modèle XYZ, le mécanisme de Higgs et le mécanisme de formation de paires de Cooper (B.C.S) ou de paires de vortex (XY). Nous conseillons au lecteur désireux d'approfondir toutes ces questions de lire les trois articles suivants :

- 1) Quantum Solitons in Statistical Physics par A.H. Luther [8]
- 2) Uses of Solid State Analogies in Elementary Particle Theory par P.W. Anderson [139]
- 3) Solitons in Condensed Matter Physics par R. Bishop [40].

Nous noterons à ce niveau le fait singulier de l'apparition des modèles intégrables comme prototypes pour de nombreuses classes de problèmes dans les sciences physiques.

2b) Un point de vue général

Au-delà de ces exemples ponctuels, on peut essayer de dégager de façon plus générale l'intérêt pour la physique de ces problèmes intégrables. La physique consiste souvent à penser et à calculer en terme de milieux homogènes, de développements, de modes normaux, d'excitations indépendantes ou faiblement couplées, le tout très souvent dans un cadre de techniques de champ moyen (milieu effectif...). S'écartant de cette physique dominante deux directions sont apparues : les études sur les milieux inhomogènes aléatoires, et les études sur les problèmes et effets non linéaires au sens large. On peut par exemple parler du concept de frustration (forces en compétition). Ce concept a un très large spectre d'application et conjugué à des idées topologiques, il forme une des pierres angulaires de beaucoup de physiques non linéaires. De nombreux autres problèmes de physique exhibent des interactions en compétition et ne peuvent pas toujours venir à bout de cette frustration de façon optimale en adoptant des solutions homogènes, mais dans certains cas en établissant des distorsions importantes (solitons, discommensurations...). Citons comme exemple l'épitaxie où deux périodicités s'affrontent, les ondes de densité de charge où des distorsions de charge électronique proviennent de leur périodicité incommensurable avec la périodicité du réseau sous-jacent.

Une des objections qui peut être faite à ces idées consiste à remarquer qu'après tout, dans une situation typique de matière condensée, la température du système peut être si basse comparée à l'énergie d'activation pour la création d'un soliton que si ils sont en très petit nombre, le système pourra être décrit par des excitations du type phonons et les solitons ne contribueront certainement que pour une fraction infime de toute propriété macroscopique du système. Une telle objection serait définitive s'il n'existait des situations où les solitons (ou assimilés), bien qu'en petit nombre, soient les seules sources d'un effet particulier. En ne citant qu'un seul exemple [14] dans les réseaux non linéaires l'énergie est essentiellement transportée par les solitons : ils jouent un rôle important dans la conduction de la chaleur dans les réseaux non linéaires désordonnés. Ceci est un phénomène assez général : dans un processus de diffusion il est préférable pour le système de transporter la grandeur extensive en question (torsion, charge topologique etc...) à l'aide de ces "solitons". Un point de vue raisonnable consiste à s'intéresser aux problèmes complètement intégrables pour y exhiber des effets spécifiques et nouveaux, cette démarche étant conduite sur les systèmes complètement intégrables au sens strict pour lesquels les effets précédents seront purs. Évidemment les propriétés idéales sont toujours mélangées jusqu'à un certain degré à des perturbations physiques dans les cas réels, cependant ils fourniront un point de départ pour une phénoménologie des configurations plus réalistes que ce que l'on peut obtenir par une théorie des perturbations conventionnelles (des solutions de type soliton ne peuvent être atteintes par des traitements perturbatifs d'ordre fini).

IV - CONCLUSION

Nous avons cherché, en nous appuyant pour ce faire, sur un nombre suffisant d'exemples (parmi les plus simples) à montrer la remarquable diversité des modèles exactement solubles (ou rattachés à ceux-ci) et des idées et concepts qui leur sont associés. Ils interviennent dans tous les domaines de la Physique et utilisent au passage les ressources des techniques mathématiques les plus diverses ; nous avons essayé de relier ces différents langages et techniques entre eux. Si il semble que ces problèmes s'inscrivent dans un cadre général que l'on qualifiera, pour simplifier, d'algèbres de Lie (notamment les notions d'algèbres de Kac-Moody qui généralisent les notions d'algèbre de Lie semi-simples) nous avons de façon plus spécifique souligné le rôle fondamental joué par une propriété locale très simple et que l'on retrouve dans tous ces problèmes de façon plus ou moins explicite : la relation triangle. Cette relation simple permet de rendre compte, avec infiniment plus de souplesse que d'autres techniques, de la solubilité de la plupart des modèles existant à l'heure actuelle. Ceci justifie l'étude spécifique de cette relation. Nous avons montré un éventail d'applications des modèles intégrables en physique, et avons discuté de l'intérêt de ces modèles pour la Physique, notamment la Physique des Solides. Nous avons indiqué, en prenant l'exemple du modèle de Sine-Gordon, comment un modèle intégrable pouvait, par le jeu d'équivalence entre modèles, être retrouvé dans une grande variété de problèmes de physique fort éloignés les uns des autres a priori. Ainsi le nombre, jugé trop faible aux yeux de certains, des modèles intégrables n'est sans doute pas l'indice d'un caractère pathologique, qui rendrait leur étude académique, mais au contraire l'indice d'une certaine universalité. Ces modèles ont le mérite de présenter des effets physiques originaux purs (solitons, lois de conservation, effets non linéaires particuliers...). On peut penser que ces théories intégrables pourraient remplacer le rôle joué par les théories libres en théories des champs. La théorie des champs est toujours une perturbation théories asymptotiquement libres : les modèles intégrables sont donc le rôle fondamental joué par l'oscillateur harmonique, ou le pendule simple.

Les modèles complètement intégrables permettent des axes de recherches très différents : un des axes consiste à élargir le champ des équivalences entre modèles, ainsi qu'entre les effets physiques particuliers qui y apparaissent (mécanisme de Higgs ↔ paires de Cooper) ; il faut aussi clarifier les correspondances entre les différents concepts et formalismes qui interviennent (les liens entre théories de déformations isospectrales et isomonodromiques sont loin d'être clairs). Un des autres axes consisterait à établir des classifications exhaustives de certains types de modèles intégrables ; il semble que des concepts tels que ceux d'algèbre de Kac-Moody [142] puissent peut-être permettre d'atteindre cet objectif [48]. Un objectif moins ambitieux, mais aux conséquences plus immédiates, consiste à élargir le nombre de modèles intégrables. Nous pensons que l'approche la plus efficace consiste à étudier les relations triangles et leurs généralisations multidimensionnelles et à se concentrer sur la recherche de nouvelles relations de ce type.

APPENDICE

Compte tenu du fait que l'on sait que les équations KdV et KdV modifiées se réduisent, lorsqu'on effectue une transformation de self-similarité, à une équation de Painlevé (type II) [43] et qu'il est vraisemblable que cette même transformation de self-similarité conduit, pour les KdV d'ordre supérieur, à des équations à points critiques fixes (comme les équations de Painlevé à des ordres supérieur), on peut se demander si ces mêmes idées d'algèbre d'opérateurs qui commutent avec un opérateur donné, et de récurrences, s'appliquent à cette nouvelle hiérarchie d'équations non linéaires. On vérifie en fait immédiatement que la transformation de self-similarité revient à écrire pour l'équation KdV modifiée d'ordre n ,

$$X = (\alpha t)^{-1/r} \cdot \eta(z), \quad \text{et pour l'équation KdV d'ordre } n, \quad u = (\alpha t)^{-2/r} \cdot \omega(z)$$

$$\alpha_n = (\alpha t)^{-\frac{2n+3}{r}} \cdot \beta_n(z)$$

où $z = x(\alpha t)^{-1/r}$, α est une constante arbitraire et r est un entier lié à n par la relation $r = 2n+1$.

La relation entre u et X devient

$$\omega = \eta^2 + \eta^2, \quad \text{les dérivées partielles } \frac{\partial}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial}{\partial x} \text{ deviennent :}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\alpha}{r} (\alpha t)^{-1/r} \cdot [p + z \frac{\partial}{\partial z}] \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} = (\alpha t)^{-1/r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{où } p \text{ est un poids qui vaut}$$

2 pour KdV et 1 pour KdV modifié.

Compte tenu de ces changements de variables les équations KdV et KdV modifiées deviennent respectivement :

$$-\frac{\alpha}{2n+1} (2\omega + z\omega') = \beta_n \quad (1)$$

$$-\frac{\alpha}{2n+1} [\eta + z\eta'] = [2 \int \beta_{n-1} dz \cdot \eta \cdot \beta_{n-1}]'$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2n+1} z \cdot \eta + 2\eta \cdot \int \beta_{n-1} dz \cdot \eta \cdot \beta_{n-1} = \text{Constante.} \quad (2)$$

Donnons les exemples de l'ordre 1 et de l'ordre 2 :

$$n=1 \quad \begin{cases} \frac{\alpha}{3} (2u+zu') + 6\alpha u' - u'' = 0 \\ \frac{\alpha}{3} z\eta + 2\eta^3 - \eta'' = \text{Cste} \end{cases} \quad (1'') \quad (2'')$$

(2) est équivalente à (1) lorsqu'on effectue le changement de variable $w = \eta^2 + \eta'^2$, à la solution dégénérée $w = -\frac{\alpha}{6} z$ près.

$$n=2 \quad \begin{cases} \frac{\alpha}{5} (2u+zu') - u^{(5)} + 10\alpha u'' + 20u' u'' - 30u' u'^2 = 0 \\ \frac{\alpha}{5} z\eta - \eta^{(4)} + 10\eta^2 \eta''' + 10\eta' \eta'^2 - 6\eta^5 = \text{Cste} \end{cases} \quad (1''') \quad (2''')$$

(2''') est équivalente à l'équation (1''') auxquelles on rajoute la solution

$$w'' - 3w^2 + \frac{\alpha}{10} z = \text{Cste}$$

On reconnaît dans cette dernière équation une équation de Painlevé du type (I).

De façon générale à tout ordre n , l'équation (2) est équivalente à l'équation

(1) auxquelles on associe les solutions $\beta_{n-1} = -\frac{\alpha \cdot z}{2(2n+1)}$. Ainsi les idées

d'algèbre d'opérateurs qui commentent avec un opérateur donné et de récurrences s'appliquent-elles à cette hiérarchie d'équations différentielles à points critiques fixes.

REFERENCES

- [1] P.D.Lax, Comm. Pure Appl. Math. 21, 467 (1968).
- [2] L.D.Faddeev, Physica Scripta 24, 832-835 (1981).
- [3] A.C.Scott, F.Y.F.Chu, D.W.McLaughlin, The Soliton : A new Concept in Applied Science, Proceedings of the IEEE, Octobre 1973, 1443-1483.
- [4] E.K.Sklyanin, L.A.Takhtadjan, L.D.Faddeev, Theor. Math. Phys. 40, 194 (1979).
- [5] A.Barone, F.Esposito, C.J.Magee, A.C.Scott, R.Nuovo Cimento 1, 227-267 (1971).
- [6] C.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruskal, R.M.Miura, Phys. Rev. Lett. 19, 1095 (1967).
- [7] Bäcklund Transformations, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 515, ed. A.Dold, B.Eckmann (1974).
- [8] Solitons Topics in Current Physics Springer Verlag ed. R.K.Bullough, P.J.Caudrey (1980).
- [9] V.E.Zakharov, A.B.Shabat, Soviet Phys. JETP 34, 62 (1972).
- [10] L.M.Gel'fand, B.M.Levitan, Amer. Math. Soc. Transl. 1, 253-304 (1955).
- [11] V.E.Zakharov, L.D.Faddeev, Funct. Anal. Appl. 5, 280-287 (1971).
- [12] M.Boiti, F.Pempinelli, Il Nuovo Cimento 51B, 70 (1979).
- [13] T.Gui-zhang, Il Nuovo Cimento 69B, 160 (1982).
- [14] T.Barnard, Phys. Rev. A 7, 373-376 (1973).
- [15] R.Hirota, J. Phys. Soc. Japan, 33, 1489 (1972).
- [16] L.Bianchi, lezioni di Geometria Differenziale, vol. II, Pisa, 1902, 418.
- [17] B.A.Dubrovin, V.B.Matveev, S.P.Novikov, Russian Math. Surveys 31, 59-146 (1976).
- [18] H.H.Chen, Phys. Rev. Lett. 33, 925-928 (1974).
- [19] R.Sasaki, Phys. Lett. 71A, 390 (1979) ; Nucl. Phys. B 154, 343 (1979) ; Phys. Lett. 73A, 77 (1979).
- [20] M.J.Ablowitz, D.J.Kaup, A.C.Newell, H.Segur, Stud. Appl. Math. 53, 249 (1974).
- [21] H.D.Wahlquist, F.B.Estabrook, J. Math. Phys. 16, 1-7 (1975).
- [22] S.Kumei, J. Math. Phys. 18, 256-264 (1977).
- [23] M.D.Kruskal, Lect. appl. Math. 15 ed. A.C.Newell, AMS Providence 1974.
- [24] J.Moser, Adv. Math. 16, 197 (1975).
- [25] E.Freenberg, Theory of Quantum Fluids (Academic, New-York, 1969).
- [26] B.Sutherland, Phys. Rev. A 4, 2019-2021 (1971).
- [27] E.Brezin, J.Zinn-Justin, C.R.A.S. 263, 670-673 (1966).
- [28] C.N.Yang, Phys. Rev. Lett. 19, 1312-1314 (1967).
- [29] P.J.Gambardella, J. Math. Phys. 16, 1172-87 (1975).
- [30] P.Deift, F.Lund, E.Trubowitz, Proc. Nat. Acad. Sci. USA (1980) 77, 716.

- [31] F. Lund, *Physica* 3D (1981) 350-362.
- [32] D.V. et G.V. Chudnovsky, Séminaire sur les équations non linéaires. Ecole Polytechnique 1977-1978.
- [33] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, *Inventiones math.* 37, 93-108 (1976) ; *Lettere al nuovo cimento* 17, 97-101 (1976) ; 16, 333-339 (1976).
- [34] S. Helgason, *Differential geometry and Symmetric Spaces* New-York (1962).
- [35] H. Eichenherr, M. Forger, *Nuclear Physics* B164, 528-535 (1980).
- [36] B. Mc Coy, C.A. Tracy, T.T. Wu, *J. Math. Phys.* 18, 1058 (1976).
- [37] M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo, 1978-1980 "Holonomic Quantum Fields" publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University 14, 223 ; 15, 201 ; 15, 577 ; 15, 871 ; 16, 531.
- [38] P. Painlevé, *C.R.A.S.* 143, 1111 (1906).
- [39] M.R. Garnier, *Annales Scient. de l'E.N.S.* XLIII (1926) 23.
- [40] M.R. Garnier, *Annales Scient. de l'E.N.S.* XXIX (1912) 1-107.
- [41] R. Fuchs, *Math. Ann.*, Bd. 63, 1906.
- [42] L. Schlesinger, *Journal für die reine Math.* 123 (1901) 138 ; (1912) 141.
- [43] P. Kallieppan, M. Lakshmanan, *J. Phys.* A12, L. 249 (1979).
- [44] H. Flaschka, A.C. Newell, *Physica* D3, 203-221 (1981).
- [45] J. Plemelj, *Problems in the sense of Riemann and Klein* N.Y. Interscience pub. 1964.
- [46] H.B. Thacker, D. Wilkinson, *Phys. Rev.* D19 (1979) 3660.
- [47] N. Andrei, J.H. Lowenstein, *Phys. Lett.* 90B, 106 (1980).
- [48] L.D. Faddeev, *Les Houches* 1982. *Integrable models in 1+1 dimensional QFT.*
- [49] V.E. Korepin, A.G. Izergin, 1981 "Lattice versions of quantum field theory models in two dimensions" preprint.
- [50] P.P. Kulish, E.K. Sklyanin, *Phys. Lett.* 70A, 461 (1979).
- [51] S. Parke, *Phys. Lett.* 88B, 287 (1979).
- [52] F.A. Berezin, V.N. Sushko, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 48, 1293 (1965).
- [53] A.A. Belavin, *Phys. Lett.* 87B, 117 (1979).
- [54] D.C. Mattis, E.H. Lieb, *J. Math. Phys.* 6, 375 (1965).
- [55] E.H. Lieb, D.C. Mattis, *Mathematical Physics in One dimension*, Academic Press N.Y. 1966.
- [56] C. Domb, M.S. Green, *Phase Transitions and Critical Phenomena* vol. 1 Academic Press 1972.
- [57] M. Gaudin, *Le Journal de Physique* 34, 511 (1973).
- [58] L. Onsager, *Phys. Rev.* 65 (1944) 117.
- [59] T. Utiyama, *Prog. Theor. Phys.* 6 (1951) 907.
- [60] H.S. Green, C.A. Hurst, "Order-disorder Phenomena Interscience Publishers", Inc. N.Y. (1964).

- [61] L. Onsager, B. Kaufman, *Phys. Rev.* 76, 1232 (1949).
- [62] E.H. Lieb, T.D. Schultz, D.C. Mattis, *Ann. Phys.* 16 (1961) 407.
- [63] C.A. Hurst, *J. Math. Phys.* 7, 305 (1966).
- [64] S. Samuel, *J. Math. Phys.* 21, 2806 (1980).
- [65] B. Sutherland, *J. Math. Phys.* 11, 3183 (1970).
- [66] P.W. Kasteleyn, *Fundamental Problems in Statistical Mechanics III*, Proceed. of the 1974 Wageningen Summer School E.G.D. Cohen ed. North-Holland pub.
- [67] D.B. Cremer, H.B. Thacker, D. Wilkinson, *Phys. Lett.* 92B, 144 (1980).
- [68] R.J. Baxter, *Fund. Problems in Stat. Mech. V* Proceed. of the 1980 Enschede Summer School E.G.D. Cohen ed. North-Holland pub.
- [69] M.J. Stephen, L. Mittag, *J. Math. Phys.* 13, 1944 (1972).
- [70] H.J. Hilhorst, M. Schick, J.M.J. van Leeuwen, *Phys. Rev. Lett.* 40, 1605 (1978) ; *Phys. Rev.* B19, 2749 (1979).
- [71] R.J. Baxter et L.G. Feting, *J. Phys.* A11, 2463-2473 (1978).
- [72] R.J. Baxter, *Annals of Physics* 70, 193 (1972).
- [73] M.T. Jaekel, J.M. Mailard, *Séminaire de l'ENS* 1979/1980.
- [74] R.J. Baxter, *J. Phys.* A13, L61 (1980).
- [75] A.B. Zamolodchikov, *Comm. Math. Phys.* 69, 165 (1979).
- [76] A. Luther, *Phys. Rev.* B14, 2153 (1976).
- [77] R.J. Baxter, *Proc. of the Roy. Soc. Lond.* A289, 25 (1978).
- [78] J.M. Mailard, *Note CEA S 82-77* (1983)
- [79] B.V. Felderhoff, *Physica* 66, 509 (1973).
- [80] A.B. Zamolodchikov, V.A. Fateev *Yad. Fiz.* 32, 581 (1980).
- [81] G.L. Schultz, *Phys. Rev. Lett.* 46, 629 (1981).
- [82] A.B. Zamolodchikov, A.B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* B133, 525 (1978).
- [83] B. Berg, M. Karowski, V. Kurak, P. Weiss, *Nucl. Phys.* B134, 125 (1975).
- [84] A.E. Arinhstein, V.A. Fateev, A.B. Zamolodchikov, *Phys. Lett.* 87B, 389 (1979).
- [85] V.A. Fateev, Preprint TH 2963-CERN (1980).
- [86] A.G. Izergin, V.E. Korepin, Preprint LOMI-E-3-80, Leningrad (1980).
- [87] V.V. Bazhanov, Y.G. Stroganov, *Phys. Lett.* 105B, 278 (1981).
- [88] I.V. Cherednik, *Teor. Mat. Fiz.* 43, 117 (1980).
- [89] H.C. Ottinger, J. Honerkamp, *Phys. Lett.* 88A, 339 (1982).
- [90] A.A. Belavin, *Nucl. Phys.* B180, 180 (1981).
- [91] V.V. Bazhanov, Y.G. Stroganov, *Nucl. Phys.* B205 (1982) 505-526.
- [92] A.B. Zamolodchikov, A.B. Zamolodchikov, *Annals of Physics* 120, 253-291 (1979).
- [93] M. Adler, P. van Moerbeke, *Adv. in Math.* 36, 1-44 (1980).
- [94] M. Adler, P. van Moerbeke, *Adv. in Math.* 38, 318-379 (1980).
- [95] E. Date, M. Kashiwara, T. Miwa, *Proceedings of the Japan Society*, 57A, 387 (1981).

- [96] J. Lepoweky, R.L. Wilson, *Comm. Math. Phys.* 62, 43 (1978).
- [97] T.B. Frenkel, V.G. Kac, *Inv. Math.* 62, 23 (1980).
- [98] A.M. Polyakov, *Phys. Lett.* 103B, 207 (1981).
- [99] A.M. Polyakov, *Phys. Lett.* 103B, 211 (1981).
- [100] W. Kinnersley, *J. Math. Phys.* 18, 1529 (1977) ;
W. Kinnersley, D.M. Chitre, *J. Math. Phys.* 18, 1538 (1977).
- [101] L. Dolan, *Phys. Rev. Lett.* 47, 1371 (1981)
H. Richenher, *Phys. Lett.* 115B, 385 (1982).
- [102] G. Schiffmann, *Bull. Soc. Math. France*, 99, 3-72 (1971).
- [103] D.G. et G.D. Chudnovsky, *Theta functions, completely X-sym., soumis à Annales*
[104] E. Müller-Hartmann, *J. Zittartz*, 2, *Physik* B27, 261 (1977).
of Phys. (1982).
- [105] S.T. Chui, J.D. Weeks, *Phys. Rev. B* 14, 4978 (1976).
- [106] S.T. Chui, P.A. Lee, *Phys. Rev. Lett.* 35, 315 (1975).
- [107a] A. Luther, *Phys. Rev. B* 15, 403 (1977).
- [107b] A. Luther, V.J. Emery, *Phys. Rev. Lett.* 33, 589 (1974).
- [108] S. Coleman, *Phys. Rev. D* 11, 2088 (1975).
- [109] P.B. Wiegmann, *J. Phys. C* 11, 1583 (1978).
- [110] H.J.F. Knops, *Fundamental Problems in Statistical Mechanics V*,
E.G.D. Cohen ed. North-Holland pub. (1980).
- [111] L.P. Kadanoff, "Lattice Coulomb gas Representation of two dimensional
Problems" preprint.
- [112] S.A. Bulgadaev, *Phys. Lett.* B7B, 47 (1979).
- [113] S.G. Rajeev, *Phys. Lett.* 113B, 146 (1982).
- [114] R.G. Brewer, P. Goddard, *Lett. Nuovo Cimento* 1 (1971) 1075.
- [115] I.G. Enting, F.Y. Wu, *Journal of Stat. Phys.* 28, 351 (1982)
B. Niembuis, *Phys. Rev. Lett.* 49, 1062 (1982).
- [116] F. Ursell, *Proc. Comb. Phil. Soc.* 49, 685-694 (1953).
- [117] J. Frenkel, T. Kontorova, "On the theory of plastic deformation and
twining", *J. Phys. (USSR)* vol. 1, 137 (1939).
- [118] A.C. Scott, F.Y.F. Chu, S.A. Reible, *J. Appl. Phys.* 47, 3272 (1976).
- [119] M. Gross "Contribution théorique et expérimentale à l'étude du phénomène
de super-radiance" Thèse d'Etat (1980).
- [120] W.L. Mc. Millan, *Phys. Rev. B* 14, 1496 (1976).
- [121] F. Trappert, C.M. Varma, *Phys. Rev. Lett.* 25, 1108 (1970).
- [122] B.D. Fried, V.H. Ichikawa, *J. Phys. Soc. Japan*, 34, 1073-1082 (1973).
- [123] P.G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys* (chapitre 6),
N.Y. Benjamin (1966).
- [124] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan*, 35, 286 (1973).

- [125] J. Tjon, J. Wright, *Phys. Rev. B* 15, 3470 (1977).
- [126] R.K. Bullough, "Solitons", *Phys. Bull.* 78-82 (1978).
- [127] R.K. Bullough, P.W. Kitchenside, P.M. Jack, R. Saunders, "Solitons in laser
physics", *Phys. Scr.* 20, 364 (1979).
- [128] A.M. Perelomov, *Phys. Lett.* 80A, 156 (1980).
- [129] B.K. Harrison, *Phys. Rev. Lett.* 41, 1197 (1978).
- [130] D. Maison, *Phys. Rev. Lett.* 41, 521 (1978).
- [131] V.A. Fateev, P.B. Wiegmann, *Phys. Lett.* 81A, 179 (1981).
- [132] B. Sutherland, *Phys. Rev. Lett.* 19, 1312 (1967).
- [133] S.A. Brazovsky, I.E. Dzyaloshinsky, I.M. Krichever, *Phys. Lett.* 91A, 40 (1982).
- [134] I.E. Dzyaloshinsky, *Sov. Phys. JETP* 20, 665 (1965).
- [135] M.E. Fisher, W. Selke, *Phil. Trans. Roy. Soc.* 302, 1 (1981).
- [136] I. Dzyaloshinsky, I.M. Krichever, "Pinning in a discrete Peierls model"
preprint soumis à JETP (1982).
- [137] E.D. Belokobos, *Theor. Math. Phys.* 60A (1982).
- [138] B.A. Dubrovinn, S.P. Novikov, *Sov. Phys. JETP*, 52, 511 (1980).
- [139] P.W. Anderson dans "Gauge theories and modern field theory", *Proc. of a
Conf. held at Northeastern, Univ. Boston*, R. Arnowitt, Pran Nath ed (1975).
- [140] R. Bishop, *Physica Scripta* 20, 409-423 (1979).
- [141] M. Toda, *Physica Scripta* 20, 424-430 (1979).
- [142] I.G. McDonald, Séminaire Bourbaki, 1980/1981 "Affine Lie Algebras and
modular forms".

AUTRES REFERENCES QUE VOUS POURREZ CONSULTER

Se rapportant aux paragraphes :

II.1) :

- V.E.Zakharov, A.V.Mikhailov, Sov.Phys. JETP, 47, 1017 (1978).
- N.Papanicolaou, J.Math.Phys. 20, 2069 (1979).
- R.K.Dodd, J.D.Gibson, Proc.Roy.Soc.Lond. A358, 287-296 (1977).
- G.Leibbrandt, Phys.Rev.Lett. 41, 435 (1978).

II.2) :

- F.Calogero, C.Marchiora, J.Math.Phys. 14, 182 (1973).
- J.B. McGuire, J.Math.Phys. 5, 622 (1964).
- J.Harnod, J.Tafel, S.Shnider, J.Math.Phys. 21, (1980).
- F. Calogero, J. Math. Phys. 12, 419 (1971).

II.3) :

- M.Sato, T.Miwa, M.Jimbo, Proc.Japan Acad. 53A, N°5, 6-10, 147-152, 153-158 (1977)
- 55A, N°9, 317-322, 405-410 (1979).
- M.J.Ablowitz, A.Ramoni, H.Segur, J.Math.Phys. 21, 715 (1980).

II.4) :

- A.B.Zamolodchikov, Phys.Lett. 97B, 63 (1980).
- P.H.Weisz, Nuclear Phys. B122, 1-14 (1977).
- P.P.Kulish, N.Y.Reshetikhin, E.K.Sklyanin, Letters in Math.Phys. 5, 393 (1981).
- P.P.Kulish, Physica 3D, 246-257 (1981).
- L.D.Faddeev, L.A.Takhtadjan, Phys.Lett. 85A, 375 (1981).
- A.A.Belavin, A.B.Zamolodchikov, Phys.Lett. 116B, 165 (1982).
- I.Peschel, F.Rys.Phys.Lett. 91A, 187 (1982).
- R.E.Shrock, Phys.Lett. 91A, 157 (1982).
- S.A.Tsypliyev, Theor.Math.Phys. 580 (1982).
- A.Legendijk, H.de Raedt, Phys.Rev.Lett. 49, 602 (1982).

II.5) :

- C.A.Hurst, J.Math.Phys. 5, 90-100 (1964).
- S.B.Kelland, Austr.J.Phys. 27, 813 (1974).
- R.J.Baxter, Proc. Comb.Phil.Soc. 59, 779 (1963).
- R.J.Baxter, F.Y.Wu, Austr.J.Phys. 27, 357 (1974).
- C.B.Thorn, Physics Reports 67, 171 (1980).

II.7) :

- R.Hermann, J.Math.Phys. 22, 1163 (1981).
- R.V.Moody, J.Alg. 10, 211 (1968).
- F.Looijenga, Inv.Math. 38, 17-32 (1976).
- J.L. Verdier, Séminaire Bourbaki n°566 Algèbre de Lie ... (1980).

III.2) :

- A.Libchaber, G.Toulouse, La Recherche, 73, 1027-1034 (1976).
- A.R.Bishop, J.A.Krumhansl, S.E.Trullinger, Physica 4D, 1-44 (1980).