

**- Note CEA-N-2327 -**

**Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay  
Institut de Recherche Fondamentale  
Département de Physique Générale  
Service de Physique du Solide et de Résonance Magnétique**

**RELATIONS D'INVERSE EN MECANIQUE STATISTIQUE**

**par**

**Jean-Marie MAILLARD**

**- Février 1983 -**

NOTE CEA-N-2327 - Jean-Marie MAILLARD

RELATIONS D'INVERSE EN MECANIQUE STATISTIQUE.

Sommaire. - Dans une précédente note CEA (N-2255) nous avons montré comment des relations locales très simples conduisaient à des relations et des contraintes sur des objets à caractère global comme la matrice de transfert ou la fonction de partition. Nous reprenons cette étude de façon plus complète sur l'unique relation dite d'inverse, et ce, de façon algébrique, géométrique et diagrammatique. Dans cette étude nous exhibons un large éventail de relations d'inverse sur des modèles uni, bi et tridimensionnels pour les fonctions de partition et aussi les fonctions de corrélations. Les problèmes posés par la relation d'inverse sont largement discutés ainsi que sont indiquées diverses perspectives associées à ces relations.

1983

Commissariat à l'Energie Atomique - France.

111 p.

NOTE CEA-N-2327 - Jean-Marie MAILLARD

INVERSE RELATIONS IN STATISTICAL MECHANICS.

Summary. - In a preceding note CEA (N-2255) we have shown how some simple local relations lead to relation and constraints on quantities with a global character like the transfer matrix or the partition function. We go back to this study on the only relation called "inverse relation", with an algebraic, geometric and diagrammatic approach. We exhibit a broad range of inverse relation on one, two and three dimensional models for partition functions and also correlation functions. The problems associated to the inverse relation are extensively discussed. We indicate some future prospects of these relations.

1983

Commissariat à l'Energie Atomique - France.

111 p.

Ecrire et ne pas publier, est un état  
bien agréable

H. de Montherlant

## SOMMAIRE

### INTRODUCTION

#### A. RELATION D'INVERSE SUR DIFFÉRENTS MODÈLES

|                                                                                                                                                      |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. RELATION D'INVERSE SUR LES MODELES UNIDIMENSIONNELS -----                                                                                         | 2  |
| 1.1 Modèle d'Ising unidimensionnel en champ -----                                                                                                    | 2  |
| 1.2 Modèles avec interactions entre seconds voisins ou plus -----                                                                                    | 4  |
| 1.3 Rubans : deux chaînes d'Ising couplées -----                                                                                                     | 5  |
| 1.4 Rubans sur le modèle de Potts -----                                                                                                              | 8  |
| 2. RELATION D'INVERSE SUR LES MODELES BI OU TRIDIMENSIONNELS -----                                                                                   | 16 |
| a) Les approches algébriques -----                                                                                                                   | 16 |
| b) Les approches géométriques -----                                                                                                                  | 18 |
| 2.b.1 Modèle de Potts sur réseau triangulaire -----                                                                                                  | 18 |
| 2.b.2 Modèle de Potts sur réseau carré avec second plus<br>proches voisins -----                                                                     | 21 |
| 2.b.3 Modèle à huit vertex symétrique -----                                                                                                          | 23 |
| 2.b.4 Modèle de Ashkin-Teller -----                                                                                                                  | 26 |
| 2.b.5 Modèles en champ magnétique : le modèle d'Ising<br>sur réseau carré ; discussion sur le théorème de<br>Lee et Yang et le réseau de Bethe ----- | 27 |
| 2.b.6 Modèles à vertex -----                                                                                                                         | 31 |
| 2.b.7 Modèle de Potts sur réseau cubique simple -----                                                                                                | 33 |
| 3. JUSTIFICATION DIAGRAMMATIQUE DE LA RELATION D'INVERSE DES MODELES<br>BI ET TRIDIMENSIONNELS -----                                                 | 35 |
| 3.1 Modèle d'Ising et de Potts sur réseau carré -----                                                                                                | 35 |
| 3.2 Modèle de Potts sur réseau triangulaire -----                                                                                                    | 36 |
| 3.3 Modèle de Potts sur réseau carré avec second plus proches<br>voisins -----                                                                       | 37 |
| 3.4 Modèle à huit vertex symétrique -----                                                                                                            | 38 |
| 3.5 Modèle de Potts sur réseau cubique simple -----                                                                                                  | 40 |
| 3.6 Modèle d'Ising sur champ sur réseau carré -----                                                                                                  | 41 |
| 3.7 Modèle d'Ising en champ sur réseau de Bethe -----                                                                                                | 42 |
| 3.8 Modèle d'Ising sur réseau carré avec motif périodique -----                                                                                      | 43 |
| 3.9 Modèle d'Utiyama -----                                                                                                                           | 46 |

|                                                                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4. APPROCHES ANALYTIQUES EXACTES -----                                                                        | 47  |
| 4.1 Les modèles de Potts -----                                                                                | 47  |
| 4.2 Les modèles à vertex notamment le modèle à huit vertex sy-<br>métrique -----                              | 50  |
| 4.3 Le modèle d'Ising et le modèle gaussien -----                                                             | 53  |
| <br>B. RELATIONS SUR LES FONCTIONS DE CORRÉLATIONS                                                            |     |
| 1. RELATIONS FONCTIONNELLES SUR LES FONCTIONS DE CORRELATIONS -----                                           | 58  |
| 2. RELATION D'INVERSE SUR LES FONCTIONS DE CORRELATIONS -----                                                 | 60  |
| 2.1 Exemples de relation d'inverse sur les fonctions de cor-<br>relations -----                               | 60  |
| 2.2 Discussion -----                                                                                          | 75  |
| 3. RELATIONS D'INVERSE SUR D'AUTRES GRANDEURS -----                                                           | 77  |
| <br>C. DISCUSSION : LES PROBLÈMES POSÉS PAR LA RELATION D'INVERSE                                             |     |
| a) Les liens entre la relation d'inverse et la dualité de<br>Kramers-Wannier -----                            | 80  |
| b) Les liens entre la relation d'inverse et le groupe de renor-<br>malization -----                           | 82  |
| c) La relation d'inverse et les problèmes aléatoires -----                                                    | 86  |
| d) Les conséquences et l'exploitation de la relation d'inverse :<br>la recherche des variétés critiques ----- | 87  |
| e) Les relations existant entre le groupe G et le théorème de Lee<br>et Yang -----                            | 92  |
| f) Les problèmes associés à la dégénérescence du groupe G : les<br>nombres de Beraha -----                    | 93  |
| g) Les équations d'inverse et les équations non linéaires : la<br>notion de déterminant généralisé -----      | 95  |
| h) Les problèmes posés par la recherche des équations d'inverse -----                                         | 98  |
| <br>CONCLUSION -----                                                                                          | 101 |
| RÉFÉRENCES -----                                                                                              | 103 |

## INTRODUCTION

-----

Dans deux précédents articles [1][2] nous avons montré le parti que l'on pouvait tirer de relations fonctionnelles quand elles sont associées à des méthodes diagrammatiques adaptées, sur deux exemples : le modèle de Potts bidimensionnel et le modèle d'Ising tridimensionnel. Nous indiquions la possibilité de trouver des relations fonctionnelles analogues sur un grand nombre d'autres modèles : des problèmes unidimensionnels, bidimensionnels éventuellement non planaires, des problèmes tri ou multidimensionnels éventuellement en champ. Cet article se propose d'explicitier ces différents exemples : en utilisant des démonstrations tantôt algébriques tantôt géométriques nous serons amenés à écrire les différentes équations fonctionnelles correspondantes. Celles-ci seront étayées par des méthodes diagrammatiques adaptées. Ce programme sera réalisé respectivement pour les modèles unidimensionnels puis bi ou tridimensionnels.

Nous aborderons d'autres problèmes tels que, entre autres, la détermination des températures critiques, les relations entre ces nouvelles symétries et le groupe de renormalisation ou la dualité et l'exploitation de ces relations en tant que telles ou pour déterminer d'autres relations. Nous déduirons notamment des équations simples portant sur des fonctions de corrélations assez générales dans le cas de modèles d'Ising ou de Potts. Elles seront confirmées diagrammatiquement.

## A. RELATION D'INVERSE SUR DIFFÉRENTS MODÈLES

### 1) RELATION D'INVERSE SUR LES MODELES UNIDIMENSIONNELS

#### 1.1) Modèle d'Ising unidimensionnel en champ

Considérons pour commencer un des modèles les plus simples qui soit : le modèle d'Ising unidimensionnel. Nous cherchons à calculer la fonction de partition :

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{\sum_i K \sigma_i \sigma_{i+1} + \sum_i H \sigma_i}$$

Sur une chaîne fermée on peut écrire

$$Z = \text{Tr}((T_1(K) T_2(H))^N)$$

où N figure le nombre de spins et où le produit  $T_1 T_2$  est la matrice de transfert pour ce problème.

$$T_1 = \begin{pmatrix} e^K & e^{-K} \\ e^{-K} & e^K \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_2 = \begin{pmatrix} e^H & 0 \\ 0 & e^{-H} \end{pmatrix}$$

Au lieu de  $T = T_1 T_2$  nous pouvons introduire  $\tilde{T} = T_2^{1/2} T_1 T_2^{1/2}$  on vérifie immédiatement que  $\tilde{T}(K+i\pi/2, -H)$  est la matrice inverse de  $\tilde{T}(K, H)$  à un facteur connu près :

$$\tilde{T}(K+i\pi/2, -H) \cdot \tilde{T}(K, H) = 2i \text{ sh } 2K. \mathbb{1} \quad (1)$$

où  $\mathbb{1}$  désigne la matrice identité  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Considérons le vecteur propre  $|\Omega\rangle$  correspondant à la plus grande valeur propre  $\lambda(K, H)$  de  $\tilde{T}(K, H)$  l'équation (1) devient :

$$\begin{aligned} \tilde{T}(K+i\pi/2, -H) \cdot \tilde{T}(K, H) |\Omega\rangle &= \lambda(K, H) \cdot \tilde{T}(K+i\pi/2) |\Omega\rangle \\ &= 2i \text{ sh } 2K \cdot |\Omega\rangle \end{aligned} \quad (2)$$

Dans un article précédent [2] nous avons discuté quel sens il convenait de donner au fait d'écrire que les divers termes dans (2) étaient égaux à  $\lambda(K, H) \lambda(K+i\pi/2, -H) |\Omega\rangle$  ce qui conduisait à l'équation suivante portant

sur la fonction de partition :

$$Z(K,H).Z(K+i\pi/2,-H) = 2i \operatorname{sh} 2K. \quad (3)$$

Le fait de considérer un exemple aussi simple présente l'avantage qu'il est possible de vérifier directement l'équation (3) puisque l'on connaît l'expression exacte de la fonction de partition :

$$Z(K,H) = e^K \operatorname{ch} H + \sqrt{e^{2K} \operatorname{sh}^2 H + e^{-2K}} \quad (4)$$

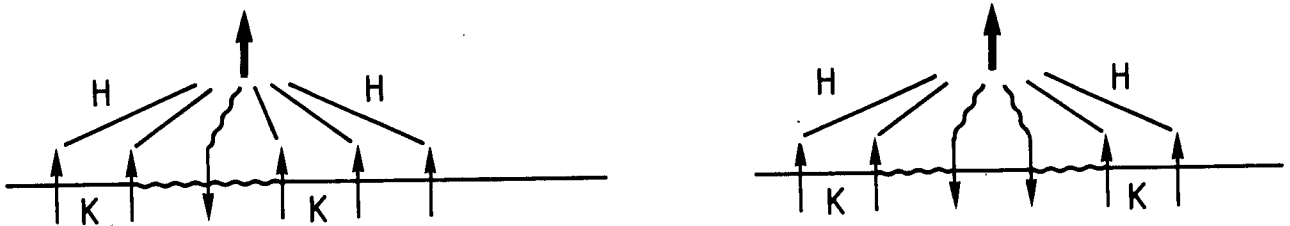
Nous voyons que l'identité (3) est effectivement vérifiée à condition d'écrire que

$$Z(K+i\pi/2,-H) = i.[e^K \operatorname{ch} H - \sqrt{e^{2K} \operatorname{sh}^2 H + e^{-2K}}]$$

Nous voyons dans ce cas précis que  $Z(K+i\pi/2,-H)$  est bien la continuation analytique de (4) (continuation analytique algébrique). Il peut être intéressant de comparer cette approche analytique globale à une vérification de (3) à partir de développements : par exemple si l'on développe (4) avec  $e^{-K}$  et  $e^{-H}$  petits :

$$Z(K,H) = e^{K+H} \cdot \left( 1 + \frac{e^{-4K}}{(1-e^{-2H})} - \frac{e^{-8K}}{(1-e^{-2H})^3} + \dots \right)$$

Un tel développement peut être obtenu comme un développement basse température.



Le terme  $e^{-4K} e^{-2H}$  correspond au renversement d'un spin,  $e^{-4H} e^{-4H}$  à deux spins voisins renversés, on voit ainsi apparaître la série géométrique  $\frac{e^{-4K}}{(1-e^{-2H})}$ . On peut vérifier l'équation (3) à l'aide du développement pré-



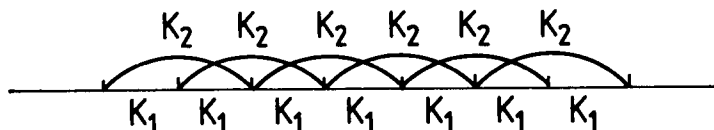
cèdent à l'ordre le plus bas :

$$\begin{aligned}
 & e^{K+H} \left( 1 + \frac{e^{-4K}}{(1-e^{-2H})} + \dots \right) \cdot e^{K+i\pi/2-H} \left( 1 + \frac{e^{-4K}}{(1-e^{-2H})} + \dots \right) \\
 &= i e^{2K} \cdot \left( 1 + e^{-4K} \left( \frac{1}{1-e^{-2H}} + \frac{1}{1-e^{2H}} + \dots \right) \right) \\
 &= i e^{2K} (1 - e^{-4K})
 \end{aligned}$$

Le modèle d'Ising unidimensionnel est un exemple simple qui possède par ailleurs de nombreuses propriétés notamment l'existence d'une self-dualité. De plus le groupe de renormalisation est exact pour ce modèle : la sommation d'un spin sur deux correspond à une transformation star-triangle qui nous envoie sur un nouveau problème d'Ising unidimensionnel en champ mais pour de nouveaux paramètres. On peut vérifier que ces deux propriétés sont bien compatibles avec la symétrie que nous exprimons par la relation (3).

## 1.2 Modèles avec interactions entre seconds voisins ou plus

Examinons maintenant le cas de problèmes unidimensionnels avec interactions entre plus proches voisins, seconds voisins et de façons générales interactions d'ordre quelconque éventuellement en champ. Il est possible d'introduire une méthode dite récursive due à Ezio Marchi et Jorge Vila [3] qui permet de considérer pour ces problèmes des matrices de transfert de taille raisonnable. Par exemple dans le cas du modèle d'Ising en champ avec interaction entre plus proche voisin et second voisin :



ils sont amenés à introduire la matrice suivante

$$A(H, K_1, K_2) = \begin{pmatrix} 1 & \text{th } H & \text{th } H \text{ th } K_1 & \text{th } K_1 \\ \text{th } H \text{ th } K_1 & \text{th } K_1 & 1 & \text{th } H \\ \text{th } H \text{ th } K_2 & \text{th } K_2 & \text{th } K_1 \text{ th } K_2 & \text{th } H \text{ th } K_1 \text{ th } K_2 \\ \text{th } K_1 \text{ th } K_2 & \text{th } H \text{ th } K_1 \text{ th } K_2 & \text{th } H \text{ th } K_2 & \text{th } K_2 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que  $A(-H, -K_1, K_2 + i\pi/2)$  n'est autre à un facteur connu près que l'inverse de la matrice  $A(H, K_1, K_2)$ .

Sous les réserves usuelles on peut avancer l'équation suivante

$$Z(H, K_1, K_2) \cdot Z(-H, -K_1, K_2 + i\pi/2) = 2i \operatorname{sh} 2K_2$$

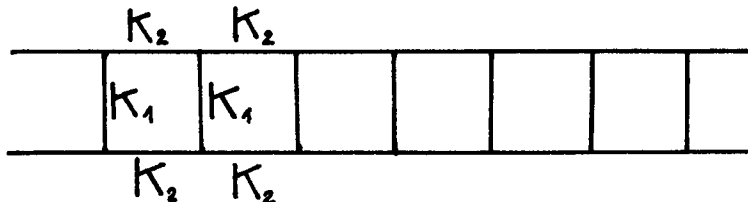
De façon générale pour le modèle d'Ising en champ avec interaction entre premier ( $K_1$ ), second ( $K_2$ ) et  $n^{\text{ième}}$  voisin ( $K_n$ ), il est possible de donner des arguments en faveur de l'équation

$$Z(H, K_1, K_2, \dots, K_n) \cdot Z(-H, -K_1, -K_2, \dots, -K_{n-1}, K_n + i\pi/2) = 2i \operatorname{sh} 2K_n$$

L'intérêt d'une telle relation est évidemment limité par le trop grand nombre de variables en présence.

### 1.3) Rubans : deux chaînes d'Ising couplées

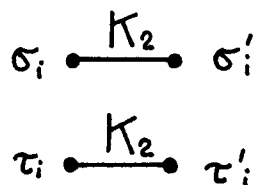
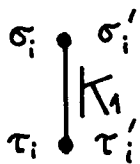
Abordons maintenant les problèmes dits de rubans à travers le plus simple d'entre eux : deux chaînes d'Ising couplées par une interaction  $K_1$



Les matrices de transfert naturelles sur ces problèmes sont des matrices  $2^2 \times 2^2$  et l'on peut écrire là également dans le cas de conditions périodiques appropriées

$$Z = \operatorname{Tr}(T_1(K_1) T_2(K_2))^N$$

Explicitons ces deux matrices  $2^2 \times 2^2$



$$T_1((\sigma_i, \tau_i); (\sigma'_i, \tau'_i)) = \delta_{\sigma_i, \sigma'_i} \cdot \delta_{\tau_i, \tau'_i} \cdot e^{K_1 \sigma_i \tau_i}$$

$$T_2((\sigma_i, \tau_i); (\sigma'_i, \tau'_i)) = e^{K_2 \sigma_i \sigma'_i} \cdot e^{K_2 \tau_i \tau'_i}$$

il est facile de vérifier que

$$T_1(-K_1) T_1(K_1) = \mathbb{1}$$

$$T_2(K_2 + i\pi/2) T_2(K_2) = (2i \operatorname{sh} 2K_2)^2.$$

où  $\mathbb{1}$  désigne la matrice identité  $2^2 \times 2^2$ . Nous pouvons là encore introduire

$$\tilde{T}(K_1, K_2) = T_1^{1/2} T_2 T_1^{1/2}$$

qui nous permet d'écrire

$$\tilde{T}(K_1, K_2) \cdot \tilde{T}(-K_1, K_2 + i\pi/2) = (2i \operatorname{sh} 2K_2)^2 \cdot \mathbb{1}$$

qui devrait conduire pour la fonction de partition par site à l'équation

$$Z(K_1, K_2) \cdot Z(-K_1, K_2 + i\pi/2) = 2i \operatorname{sh} 2K_2$$

On peut vérifier directement l'équation précédente en utilisant la symétrie  $(\sigma_i, \tau_i) \longrightarrow (-\sigma_i, -\tau_i)$  qui permet de ramener la matrice  $2^2 \times 2^2$  à un produit tensoriel de deux matrices  $2 \times 2$ .

Nous allons, sur ce cas simple, chercher à vérifier cette équation en utilisant la diagrammatique que nous avons été amenés à introduire dans deux articles précédents : en effet ce modèle de ruban supporte une telle diagrammatique. Si nous considérons les diagrammes associés à un développement haute température classique nous aurions

$$\square \operatorname{th}^2 K_1 \operatorname{th}^2 K_2, \quad \square \operatorname{th}^2 K_1 \operatorname{th}^4 K_2, \quad \square \operatorname{th}^2 K_1 \operatorname{th}^6 K_2 \dots$$

Nous resomons cette série géométrique pour obtenir  $\operatorname{th}^2 K_1 \cdot \frac{\operatorname{th}^2 K_2}{1 - \operatorname{th}^2 K_2}$  qui constitue la contribution de tous les termes en  $\operatorname{th}^2 K_1$ .

Pour les contributions en  $\text{th}^4 K_1$  il faut aller chercher les contributions disconnexes : on obtient en l'occurrence

$$- \sum_{p,q=1}^{\infty} [\text{th}^2 K_2]^{p+q} \cdot \left[ \frac{p+q+1}{2} \right] = \left( -\frac{1}{2} \right) \left[ \frac{\text{th}^4 K_2}{(1-\text{th}^2 K_2)^2} + \frac{2\text{th}^4 K_2}{(1-\text{th}^2 K_2)^3} \right]$$

La vérification de l'équation fonctionnelle conduit à écrire

$$Z(K_1, K_2) = \text{ch } K_1 \text{ ch}^2 K_2 \cdot \Lambda(K_1, K_2)$$

$$\ln \Lambda(K_1, K_2) + \ln \Lambda(-K_1, K_2 + i\pi/2) = \ln \frac{1}{\text{ch}^2 K_1} = \ln(1 - \text{th}^2 K_1)$$

$$\Leftrightarrow \text{th}^2 K_1 \frac{\text{th}^2 K_2}{1-\text{th}^2 K_2} + \left( -\frac{1}{2} \right) \left[ \frac{\text{th}^4 K_2}{(1-\text{th}^2 K_2)^2} + \frac{2\text{th}^4 K_2}{(1-\text{th}^2 K_2)^3} \right] \text{th}^4 K_1$$

$$+ \dots + \text{th}^2 K_1 \left( \frac{-1}{1-\text{th}^2 K_2} \right) \left( -\frac{1}{2} \right) \left[ \frac{1}{(1-\text{th}^2 K_2)^3} - \frac{2\text{th}^2 K_2}{(1-\text{th}^2 K_2)^3} \right] \text{th}^4 K_1 + \dots$$

$$= -\text{th}^2 K_1 - \frac{1}{2} \text{th}^4 K_1 + \dots$$

On vérifie donc jusqu'à l'ordre  $\text{th}^4 K_1$  l'équation fonctionnelle en question. On conçoit que cette diagrammatique basée sur l'idée de resommation sur une variable, tout en restant à un ordre fini sur les autres variables, soit bien adaptée à des problèmes de ruban pour lesquels justement la taille dans une des directions s'étend jusqu'à l'infini, les autres restant finies.

Ce qui vient d'être dit sur le problème de ruban le plus simple (largeur 2) peut être dit pour un problème de ruban de largeur  $N$  finie  $N$  quelconque. De manière analogue nous pouvons écrire en appelant  $Z_N$  la fonction de partition par site pour le problème de largeur  $N$

$$Z_N(K_1, K_2) \cdot Z_N(-K_1, K_2 + i\pi/2) = 2 \text{ish} 2K_2$$

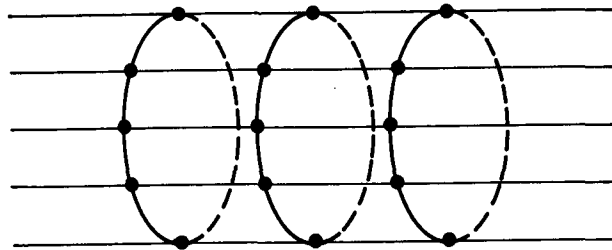
Ces fonctions de partition  $Z_N$  tendent lorsque  $N \rightarrow \infty$  vers la fonction de partition par site du modèle d'Ising bidimensionnel, comme il est très naturel de s'y attendre, mais nous voyons que chacune de ces fonctions de partition contente une équation fonctionnelle qui est satisfaite par la

limite bidimensionnelle :

$$Z(K_1, K_2) Z(-K_1, K_2 + i\pi/2) = 2 \operatorname{sh} 2K_2. \quad (5)$$

Cette simple remarque peut (peut-être) fournir des arguments pour expliquer pourquoi la méthode des rubans semble dans de nombreux cas si bien convenir.

Remarquons que la solution bidimensionnelle non seulement vérifie l'équation (5) mais également la symétrie  $Z(K_1, K_2) = Z(K_2, K_1)$  qui, elle, n'est pas vérifiée par  $Z_N(K_1, K_2)$ , les modèles de rubans brisant la symétrie  $K_1 \leftrightarrow K_2$ . Néanmoins si l'on place le ruban sur un cylindre, on bénéficie alors d'une

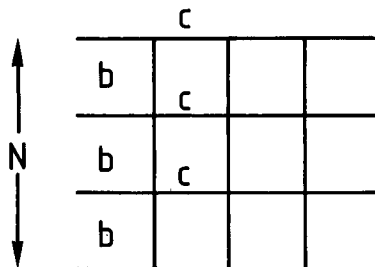


symétrie supplémentaire : la dualité de Kramers-Wannier [4] :

$$Z_N(K_1, K_2) = \frac{Z_N(K_2^*, K_1^*)}{\operatorname{sh} 2K_1 \operatorname{sh} 2K_2}$$

#### 1.4) Rubans sur le modèle de Potts

La plupart des observations faites dans le cas des rubans pour le modèle d'Ising tiennent dans le cas des rubans pour le modèle de Potts



Appelons là aussi  $Z_N$  la fonction de partition par site du modèle de ruban de largeur  $N$ .

Nous serons là aussi amenés à écrire

$$Z_N(b, c) \cdot Z_N\left(\frac{1}{b}, 2-q-q\right) = -(c-1)(c+q-1)$$

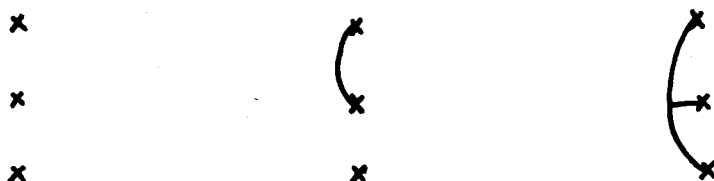
équation que nous pouvons vérifier diagrammatiquement dans les cas simples.

Algébriquement parlant, tout ce qui avait été dit sur la matrice de transfert pour le modèle de Potts bidimensionnel tient également dans ce cas plus simple : nous pouvons là aussi utiliser l'algèbre d'opérateurs de Temperley et Lieb [5].

Cette partie algébrique reste abstraite car l'on évite d'écrire les matrices de transfert dont la taille bien que finie croît avec la taille du ruban.

Ceci nous amène à considérer une méthode qui s'est développée relativement récemment grâce à Nightringale, et quelques autres [6]<sup>†</sup>. Cette méthode permet la recherche de la fonction de partition de ces modèles de ruban comme plus grande valeur propre d'une matrice de transfert de taille beaucoup plus petite : dans le cas du modèle de Potts la taille de la matrice croît avec  $N$  et  $N$  seulement (indépendante de  $q$ ). Nous ne détaillerons pas ici cette méthode qui est clairement expliquée par exemple dans l'article de B. Derrida et J. Vannimenus [7] dans le cas de la percolation (qui peut être vu comme un cas particulier de modèle de Potts :  $q \rightarrow 1$ ).

Disons simplement qu'au lieu de considérer la très large base des  $q^N$  états qui consistent à préciser l'état de chacun des  $N$  sites d'une colonne comme contrepartie de disposer de matrices de transfert possédant un très grand nombre de coefficients nuls, on utilise des bases d'états beaucoup plus restreintes qui consistent, dans le cas de la recherche de la plus grande valeur propre, à préciser les connexités des sites à l'intérieur d'une colonne et dans le cas de la recherche de la seconde plus grande valeur propre, les connexités avec une colonne de référence à l'infini. Par exemple dans le cas du ruban de largeur trois, avec conditions périodiques, nous avons comme base d'états dans le cas de la recherche de la plus grande valeur propre



(†) La première allusion à cette méthode semble être celle de HNV Temperley et EH Lieb [5]

La matrice de transfert, comme dans tous les exemples précédents, peut-être écrite comme un produit  $T_1 \cdot T_2$  où  $T_1$  (resp.  $T_2$ ) est une matrice ne dépendant que de la constante de couplage horizontale (resp. verticale)  $K_1$  (resp.  $K_2$ ) du modèle de Potts anisotrope sur ruban. Explicitons ces matrices pour l'exemple précédent où nous savons que les matrices sont des matrices  $3 \times 3$ . Si nous appelons  $e^{K_2-1} = u$  et  $e^{K_1-1} = u'$

$$T_2(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3u}{2} & 1+u & 0 \\ \frac{3u^2+u^3}{q^2} & \frac{(1+u)(2u+u^2)}{q} & (1+u)^3 \end{pmatrix}$$

$$T_1(u') = \begin{pmatrix} (1 + \frac{u'}{q})^3 & (1 + \frac{2u'}{q})(1 + \frac{u'}{q}) & 1 + \frac{3u'}{q} \\ 0 & (\frac{u'}{q})^2 (1 + \frac{u'}{q}) & 3 \frac{u'^2}{q^2} \\ 0 & 0 & \frac{u'^3}{q^3} \end{pmatrix}$$

Du fait de sa périodicité dans la direction verticale le problème de ruban est self-dual. Introduisons les variables du modèle dual :

$$u^* = \frac{q}{u}, u'^* = \frac{q}{u'}$$

Nous voyons sur les expressions explicites ci-dessus que  $T_1(u') = (1 + \frac{1}{u'^*})^3 \cdot \tilde{T}_2(u'^*)$  où  $\tilde{T}_2$  désigne la matrice transposée de  $T_2$ . Il y a donc une traduction algébrique très explicite de la dualité dans cette représentation du modèle.

De même nous pouvons profiter de cette représentation explicite pour regarder la relation d'inverse sur ce modèle.

Il est facile de voir que la transformation  $u \rightarrow \frac{-u}{1+u}$  (i.e  $K_2 \rightarrow -K_2$ ) est telle que la matrice  $T_2$  devient son propre inverse :

$$T_2\left(\frac{-u}{1+u}\right) = T_2^{-1}(u)$$

De même pour la transformation  $u' \rightarrow \frac{-u'}{1 + \frac{u'}{q}}$  (i.e.  $u'^* \rightarrow \frac{-u'^*}{1+u'^*}$  ou bien  $K_1^* \rightarrow -K_1^*$ ) nous avons

$$T_1\left(\frac{-u'}{1 + \frac{u'}{q}}\right) = T_1^{-1}(u')$$

Ces propriétés d'inverse et de correspondance entre  $T_1$  et  $T_2$  existaient déjà dans le cas du modèle de Potts ou bien du modèle d'Ising bidimensionnels. On peut s'en convaincre dans le cas du modèle d'Ising sur la représentation algébrique maintenant devenu classique de  $T_1$  et  $T_2$  en terme de matrices de Pauli :

$$T_1 = e^{K_1 \sum_j \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x}, \quad T_2 = e^{K_2^* \sum_j \sigma_j^z}$$

Les propriétés d'échange de  $T_1$  et  $T_2$  par dualité ( $\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x \leftrightarrow \sigma_j^z$ ,  $K_1 \leftrightarrow K_2^*$ ) et de passage à l'inverse ( $K_1 \rightarrow -K_1$ ,  $K_2^* \rightarrow -K_2^*$ ) y sont particulièrement clairs. De plus nous voyons que  $T_1$  et  $T_2$  ont une forme très particulière : elles sont des exponentielles d'une matrice finie multipliée par des variables simples ne dépendant que des constantes de couplage du modèle anisotrope : une propriété analogue existe-t-elle dans le cadre de la représentation précédente ? On pourra facilement vérifier que l'on a effectivement

$$T_2 = e^{K_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

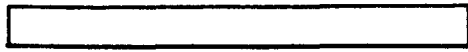
et aussi

$$T_1 = e^{K_1^* \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ce problème particulier du modèle de Potts sur ruban autorise une approche diagrammatique du problème, tout à fait analogue à celle que nous avons explicitée sur ce même modèle dans le cas bidimensionnel. Cette méthode rappelons-le est basée sur l'exploitation des caractères du groupe  $Z_q$  [2]. Les premiers termes du développement sont communs au modèle bidimensionnel et au modèle sur ruban.



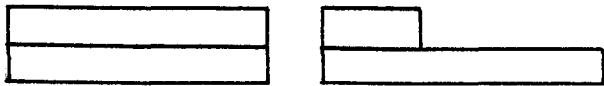
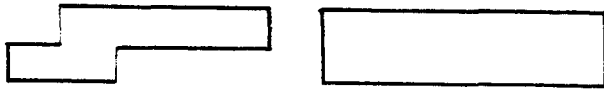
Ainsi on ne s'étonnera pas de retrouver les diagrammes suivants avec leur contributions respectives, pour le ruban de largeur  $N = 3$  :



$$(q-1) \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{b^2-1}$$

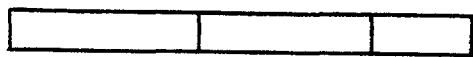


$$(q-1)(q-2) \frac{1}{c^3} \cdot \left( \frac{1}{b^2-1} \right)^2$$

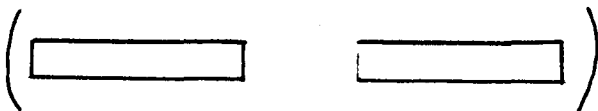


$$\frac{(q-1)}{c^4} \cdot \left( \frac{(b^2+1)^2}{(b^2-1)^3} \right)$$

$$\frac{(q-1)(q-2)}{c^4} \left( \frac{1}{b^3-1} \right) \left( \frac{b^2+1}{b^2-1} \right)^2$$

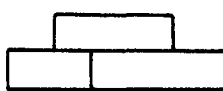
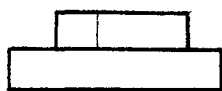


$$\frac{(q-1)(q-2)^2}{c^4} \cdot \left( \frac{1}{b^2-1} \right)^3$$



$$\frac{(q-1)^2}{c^4} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b^2-1} \right)^2 - 3 \frac{b^2}{(b^2-1)^3} \right]$$

Puis à l'ordre  $\frac{1}{5}$  de nouveau les mêmes diagrammes déjà rencontrés sur le modèle de Potts<sup>c</sup> bidimensionnels :



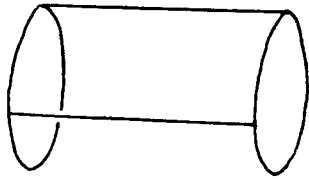
$$\frac{8(q-1)(q-2)(q-3)}{c^5 (b^3-1)^2 (b^2-1)^2}$$



$$\frac{(q-1)(q-2)^3}{c^5} \cdot \left( \frac{1}{b^2-1} \right)^4 \text{ etc...}$$

Nous voyons que la vérification de la relation d'inverse jusqu'à l'ordre  $1/c^5$  est commune au modèle bidimensionnel et au modèle sur ruban

de taille  $N=3$ . Dans le cas du ruban périodique de taille  $N=3$  le développement resommé précédent se distingue du développement bidimensionnel à l'ordre suivant  $(\frac{1}{6})$  avec des diagrammes tels que (entre autres) :



Ces considérations sont pour l'essentiel applicables pour des rubans de largeur quelconque et sont de plus applicables quelque soit  $q$  le nombre d'état du modèle de Potts même lorsque  $q$  n'est pas un nombre entier : on ne s'etonnera donc pas de les voir être valides dans le cas de la percolation sur ruban ( $q \rightarrow 1$ ). Néanmoins dans le cas de la percolation le problème se présente de façon quelque peu différente : la plus grande valeur propre est en quelque sorte triviale (elle vaut  $+1$ ), il faut donc examiner la seconde plus grande valeur propre. Pour ce problème la base des états est défini par les connexités avec une colonne de référence à l'infini. Dans le cas plus simple du ruban de largeur deux avec conditions périodiques, nous avons deux états à considérer :



Si l'on appelle  $p$  (resp  $q = 1-p$ ) la probabilité de présence (resp. d'absence) des liaisons verticales et  $p'$  (resp.  $q' = 1-p'$ ) la probabilité de présence (resp. d'absence) des liaisons horizontales, nous avons alors

$$T_2(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix} \text{ et } T_1(p') = \begin{pmatrix} p'^2 & 2p'q' \\ 0 & p' \end{pmatrix}$$

Nous pouvons voir sur cet exemple simple que

$$T_2(-\frac{p}{q}) = T_2^{-1}(p), \quad T_1(\frac{1}{p'}) = T_1^{-1}(p')$$

et où là encore on a pour  $T_1$  et  $T_2$  une forme exponentielle simple en posant  $p = e^K$   $q' = e^{K'}$

$$T_1 = e^{K \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \quad T_2 = e^{K' \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Si nous considérons  $G(p, p') = \lim_{N \rightarrow \infty} (\text{Tr}(T_1(p') T_2(p))^N)^{1/N}$  la fonction génératrice associée à ces problèmes de percolation anisotrope sur ruban. Nous sommes amenés à avancer l'équation d'inverse suivante valable quelque soit les largeurs du ruban.

$$G(p, p') G\left(-\frac{p}{q}, \frac{1}{p'}\right) = 1$$

Cette équation peut être justifiée en considérant la diagrammatique du modèle de Potts et en regardant la percolation comme une limite de ce modèle.

Nous pouvons clore cette énumération de relation d'inverse sur des modèles unidimensionnels par le problème de la percolation dirigée et ce sur, par exemple, un ruban de largeur deux, avec bords libres. Nous avons pour ce problème trois états à considérer



et nous avons donc à prendre en compte les matrices  $3 \times 3$  suivantes :

$$T_2(p') = \begin{pmatrix} q' & 0 & 0 \\ 0 & q' & 0 \\ p' & p' & 1 \end{pmatrix} \quad T_1(p) = \begin{pmatrix} p & 0 & pq \\ 0 & p & pq \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}$$

Nous remarquons que  $T_1\left(\frac{1}{p}\right) = T_1^{-1}(p)$   $T_2\left(\frac{-p'}{1-p'}\right) = T_2^{-1}(p')$  il n'y a donc pas de différence avec la relation d'inverse sur le problème de la percolation (non dirigée). Nous avons donc très vraisemblablement en introduisant là aussi  $G(p, p') = \lim_{N \rightarrow \infty} (\text{Tr}(T_1 T_2)^N)^{1/N}$ , l'équation d'inverse  $G(p, p') \cdot G\left(-\frac{p}{q}, \frac{1}{p'}\right) = 1$ . Il n'est malheureusement pas possible de justifier une telle équation (quelque soient les largeurs du ruban considéré) de manière diagrammatique, en effet à notre connaissance il n'existe pas à l'heure actuelle de diagrammatique associée à la percolation dirigée.

On s'aperçoit (au moins dans le cas du ruban de largeur deux) que  $T_1$  et  $T_2$  s'échangent par une transformation :

Posons

$$t_2(p') = \frac{1}{q'} \cdot T_2(p') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{p'}{1-p'} & \frac{p'}{1-p'} & \frac{1}{1-p'} \end{pmatrix} \text{ et } t_1(p) = \frac{1}{p} \cdot T_1(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-p \\ 0 & 1 & 1-p \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

On voit facilement que en posant  $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $t_2(p') = P \cdot t_1\left(\frac{1}{1-p'}\right) \cdot P$  où  $\tilde{t}_1$  désigne la transposée de  $t_1$ .

$$\text{Nous avons en posant } g(p, p') = \left( \text{Tr} \left( P \cdot t_1\left(\frac{1}{1-p'}\right) \cdot P \cdot t_1(p) \right)^N \right)^{1/N}$$

$$G(p, p') = pq' \cdot g(p, p')$$

Nous voyons que  $g$  possède une propriété d'invariance lorsque l'on échange  $p$  et  $\frac{1}{1-p}$  ce qui revient à faire la transformation suivante sur  $(p, p')$  :

$$(p, p') \xrightarrow{T} \left( \frac{1}{1-p'}, 1 - \frac{1}{p} \right)$$

On peut voir que  $T$  est une transformation d'ordre 2 :

$$(p, p') \xrightarrow{T} \left( \frac{1}{1-p'}, 1 - \frac{1}{p} \right) \xrightarrow{T} (p, p')$$

Si l'on admet que cette propriété est vraie quelque soit la taille du ruban et en particulier dans la limite du modèle bidimensionnel nous avons alors la symétrie d'échange entre l'horizontale et la verticale

$$S : (p, p') \rightarrow (p', p)$$

On peut alors composer  $T$  et  $S$  et obtenir ainsi une nouvelle symétrie du modèle

$$T' = TS : (p, p') \xrightarrow{T'} \left( 1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{1-p'} \right)$$

On vérifie que  $T'$  est une transformation d'ordre 3 :

$$(p, p') \xrightarrow{T'} \left( 1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{1-p'} \right) \xrightarrow{T'} \left( \frac{1}{1-p}, 1 - \frac{1}{p'} \right) \xrightarrow{T'} (p, p')$$

Signalons enfin que  $T_1$  et  $T_2$  s'écrivent là encore comme des exponentielles simples :

$$T_1 = e^{K \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad T_2 = e^{K' \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Pour rendre plus simple ces transformations portant sur la percolation on peut changer de variables sur le modèle de Potts et considérer le problème de la percolation comme la limite  $q \rightarrow 1$  du modèle de Potts : sur le modèle de Potts sur réseau carré on introduit les variables [2] :  $x = \frac{b-q_+}{b-q_-}$   $y = \frac{c-q_+}{c-q_-}$ . Dans le cas particulier de la percolation nous avons  $q_+ = -j$  (ou  $-j^2$ ) et la correspondance  $b-1 = \frac{p}{1-p}$ ,  $c-1 = \frac{p'}{1-p'}$  où  $p$  et  $p'$  sont les deux probabilités de présence de liaisons précédentes ; nous avons alors  $x = \frac{p+j}{1+jp}$   $y = \frac{p'+j}{1+jp'}$ .

La transformation d'inverse  $K(p,p') \rightarrow \left( \frac{-p}{1-p}, \frac{1}{p'} \right)$  s'écrit :  
 $(x,y) \rightarrow \left( \frac{j^2}{x}, \frac{1}{y} \right)$ .

La transformation  $T$  s'écrit, elle,  $(x,y) \rightarrow \left( j^2 y, \frac{x}{j^2} \right)$ .

On vérifie facilement sous ces formes simples (mais on aurait pu le vérifier directement) que  $T = ISI$  ; la transformation  $T' = TS$  est évidemment d'ordre 3 :  $(x,y) \rightarrow \left( \frac{x}{j^2}, j^2 y \right)$ . La transformation de dualité qui s'écrit  $(x,y) \rightarrow \left( \frac{j}{y}, \frac{j}{x} \right)$ , commute avec tous ces éléments.

## 2) RELATION D'INVERSE SUR LES MODELES BI OU TRIDIMENSIONNELS

### 2a) Les approches algébriques

Abordons maintenant des exemples de relation d'inverse sur des modèles bidimensionnels.

Considérons tout d'abord le modèle de Potts anisotrope sur réseau carré. Nous avons déjà considéré la relation d'inverse sur ce même modèle [2] ; nous pouvons donner une nouvelle démonstration algébrique de celle-ci, en considérant un formalisme algébrique introduit par Stephen et Mittag [8] différent du formalisme algébrique introduit par H.N.V. Temperley et E.H. Lieb. Nous ne chercherons pas à détailler ce formalisme. Disons simplement qu'il constitue une généralisation simple du formalisme introduit par Onsager reposant sur les matrices de Pauli : la matrice de transfert s'écrit comme pour le modèle d'Ising bidimensionnel comme un produit  $T_1 \cdot T_2$  où

$$T_1(H_1) = \exp(H_1^* \cdot A) \quad \text{et} \quad T_2(H_2) = \exp(H_2 \cdot B)$$

avec

$$A = \sum_{r=1}^q (M_r + M_r^+) \quad \text{et} \quad B = \sum_{r=1}^q (\Omega_r \Omega_{r+1}^+ + \Omega_r^+ \Omega_{r+1})$$

où  $H_1^*$  désigne la constante de couplage dual de  $H_1$ ,  $q$  désigne le nombre d'états du modèle de Potts et où  $\Omega_i$  et  $M_i$  sont des variables ordres-désordres qui vérifient l'algèbre  $\mathbb{Z}_q$  :

$$\begin{aligned} \Omega_i M_i &= \omega^{-1} M_i \Omega_i, \quad \Omega_i M_i = \omega M_i^+ \Omega_i \\ \Omega_i^Q &= M_i^Q = 1 \quad \text{avec} \quad \omega = e^{2\pi i/Q} \end{aligned}$$

(Des détails analogues peuvent être retrouvés dans l'article de C.J. Hamer [9]). Là encore nous avons

$$T_2(H_2) T_2(-H_2) = \mathbb{1}$$

$$T_1(H_1) \cdot T_1(H_1') = 1 \quad \text{où} \quad H_1' = (-H_1^*)^*$$

et  $\mathbb{1}$  désigne une matrice identité. D'où en posant  $\tilde{T}(H_1, H_2) = T_1^{1/2} \cdot T_2 \cdot T_1^{1/2}$

$$\tilde{T}(H_1, H_2) \cdot \tilde{T}(H_1', -H_2) = \mathbb{1}$$

Cette équation matricielle permet d'avancer l'équation fonctionnelle pour la fonction de partition par site :

$$Z(b, c) \cdot Z\left(\frac{1}{b}, 2-q-c\right) = (c-1) (1-q-c)$$

où  $b = e^{H_2}$ ,  $c = e^{H_1}$

$$Z(b, c) = \sum_{\{\tau\}} \prod_{\langle ij \rangle} c^{\delta\tau_i, \tau_j} \prod_{\langle jk \rangle} b^{\delta\tau_j, \tau_k}$$

où les produits doivent être pris sur toutes les liaisons horizontales et verticales et la somme doit être prise sur toutes les configurations de spin.

Des considérations tout à fait semblables s'appliquent au modèle dit de "Ashkin-Teller" [10]. Là encore on peut, suivant en cela Stephen et Mittag, écrire la matrice de transfert comme un produit  $T_1 \cdot T_2$  où  $T_1$  et  $T_2$  sont des exponentielles simples d'expression, qui dépendent d'une certaine algèbre.

Néanmoins le fait d'avoir un premier jeu de trois variables  $K_1, K_2, K_3$  associé à  $T_1$  et un deuxième  $K'_1, K'_2, K'_3$  associé à  $T_2$  fait que l'on n'obtient la relation d'inverse que pour un modèle d'Ashkin-Teller anisotrope plus général que le modèle usuel (dépendant de 6 paramètres au lieu de 3) ce qui réduit, en l'occurrence, l'intérêt d'une telle relation.

Ces approches que nous qualifierons d'algébriques sont assez peu faciles à utiliser dans la pratique, en effet elles impliquent avant même de s'intéresser à une quelconque relation d'inverse, d'établir et d'utiliser toute une algèbre, ce qui peut s'avérer passablement fastidieux. Tout au plus ces méthodes permettent-elles encore d'obtenir (en utilisant cette fois-ci l'algèbre de H.N.V. Temperley et E.H. Lieb) la relation d'inverse sur le réseau triangulaire.

Si  $K_1, K_2, K_3$  désignent les trois constantes de couplage du modèle triangulaire anisotrope, ou plutôt  $a = e^{K_1}, b = e^{K_2}, c = e^{K_3}$ , on démontre par une généralisation immédiate du raisonnement utilisant cette même algèbre de Temperley-Lieb que l'on a pour une certaine matrice de transfert :

$$T(a, b, c) \cdot T(2-q-a, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}) = (a-1)(1-q-a)$$

ce qui conduit à l'équation suivante sur la fonction de partition par site :

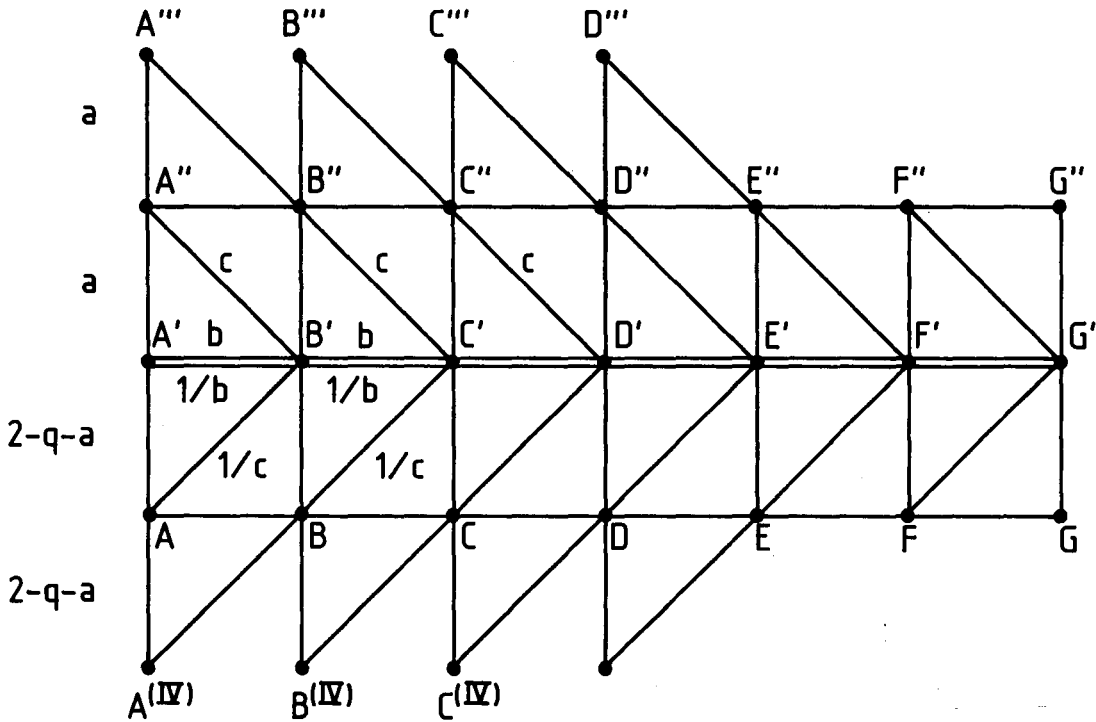
$$Z(a, b, c) \cdot Z(2-q-a, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}) = (a-1)(1-q-a)$$

## 2b) Approches géométriques

Devant les difficultés de mise en place de ces approches algébriques, nous allons considérer des démonstrations que nous qualifieront de "géométriques" sur les exemples suivants.

### 2.b.1) Modèle de Potts sur réseau triangulaire

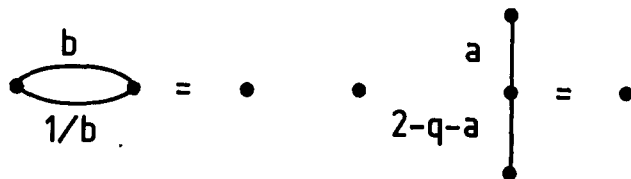
Reconsidérons tout d'abord le réseau triangulaire dans le cas du modèle de Potts anisotrope sur la figure suivante où deux réseaux triangulaires s'opposent avec des valeurs pour  $a, b$  et  $c$  (les exponentielles des constantes de couplage) respectivement de  $a, b, c$  pour le réseau supérieur et  $2-q-a, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$  pour le réseau inférieur :



On constate que les spins situés aux sites  $A'$  et  $B'$  n'interagissent pas, en effet la constante de couplage pour la liaison  $A'B'$  est  $\ln b + \ln \frac{1}{b} = 0$ . De même pour les liaisons  $B'C'$ ,  $C'D'$ , .... Effectuons la sommation sur le spin du site  $A'$  qui est maintenant relié aux deux seuls sites  $A$  et  $A''$ . En utilisant la relation

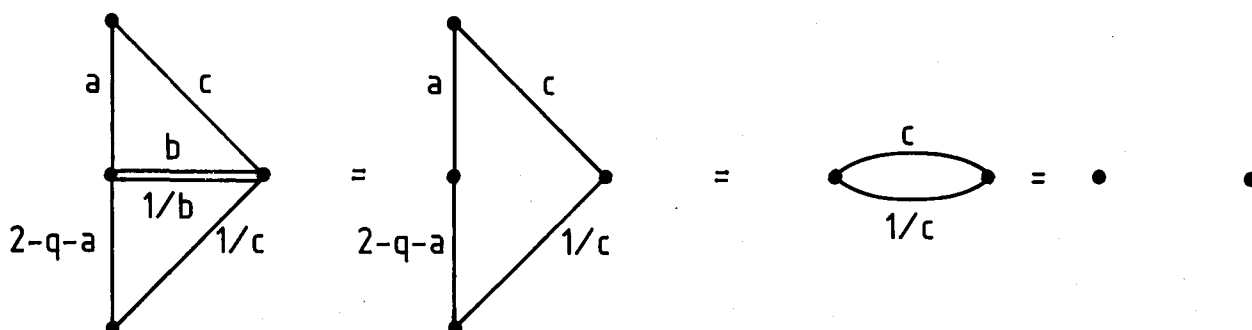
$$\sum_{\tau_{A'}} a^{\delta \tau_{A'} \tau_{A''}} \cdot (2-q-a)^{\delta \tau_{A'} \tau_{A'}} = (1-q-a)(a-1) \cdot \delta \tau_{A'} \tau_{A''}$$

Nous voyons que nous sommes amenés à identifier, à "pincer" les deux sites  $A$  et  $A''$  : les deux liaisons  $A''B'$  et  $AB'$  n'en forment plus qu'une seule, et la constante de couplage correspondante est donc  $\ln c + \ln \frac{1}{c} = 0$ . Nous résumerons ces quelques lignes par les dessins suivants

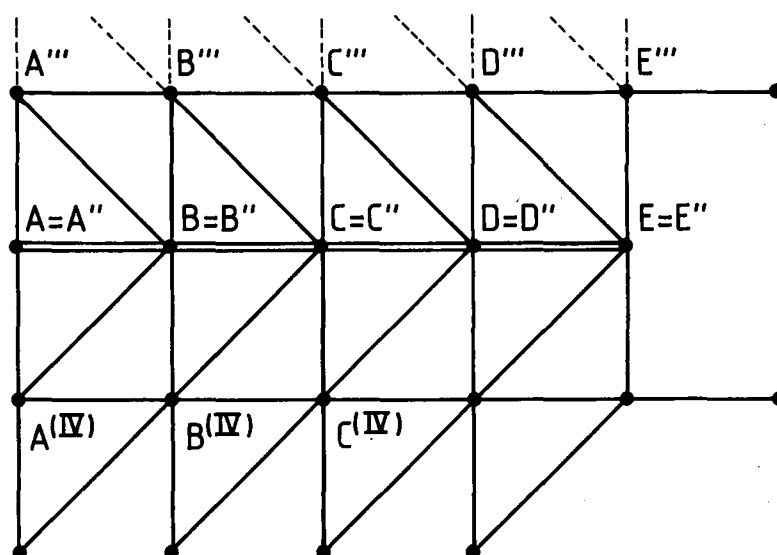


et aussi





Il est clair que ce raisonnement local se propage sur toute la ligne et l'on est conduit à la figure suivante :



qui est l'analogue exacte de la figure de départ. Il suffit donc d'itérer le raisonnement précédent autant de fois qu'il est nécessaire pour démontrer de cette manière la relation matricielle suivante :

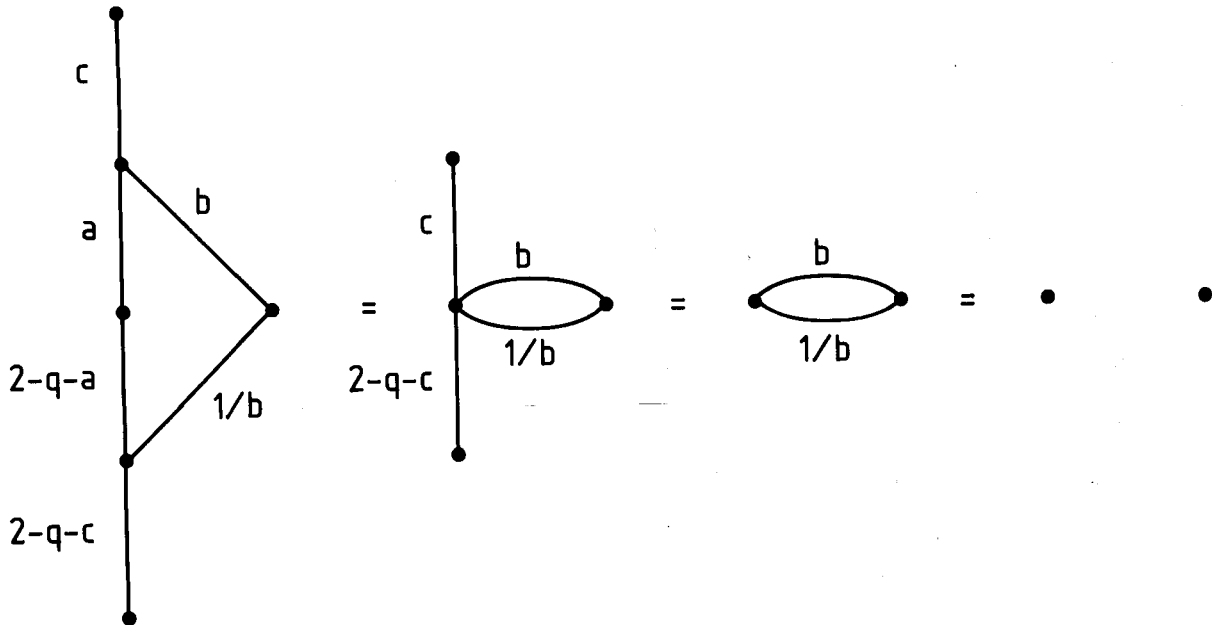
$$T(a,b,c) T(2-q-a,b,c) = (a-1)^N (1-q-a)^N$$

où  $N$  désigne le nombre de liaisons verticales du réseau supérieur. Par conséquent nous réobtenons l'équation fonctionnelle suivante sur la

fonction de partition par site :

$$Z(a,b,c) \cdot Z(2-q-a, 1/b, 1/c) = (a-1)(1-q-a)$$

Un raisonnement tout à fait analogue peut être tenu sur le modèle de Potts anisotrope sur réseau hexagonal ; il faut maintenant considérer les figures locales suivantes :



On en déduit une relation matricielle :

$$T(a,b,c) T(2-q-a, \frac{1}{b}, 2q-c) = [(a-1)(c-1)(1-q-a)(1-q-c)]^N$$

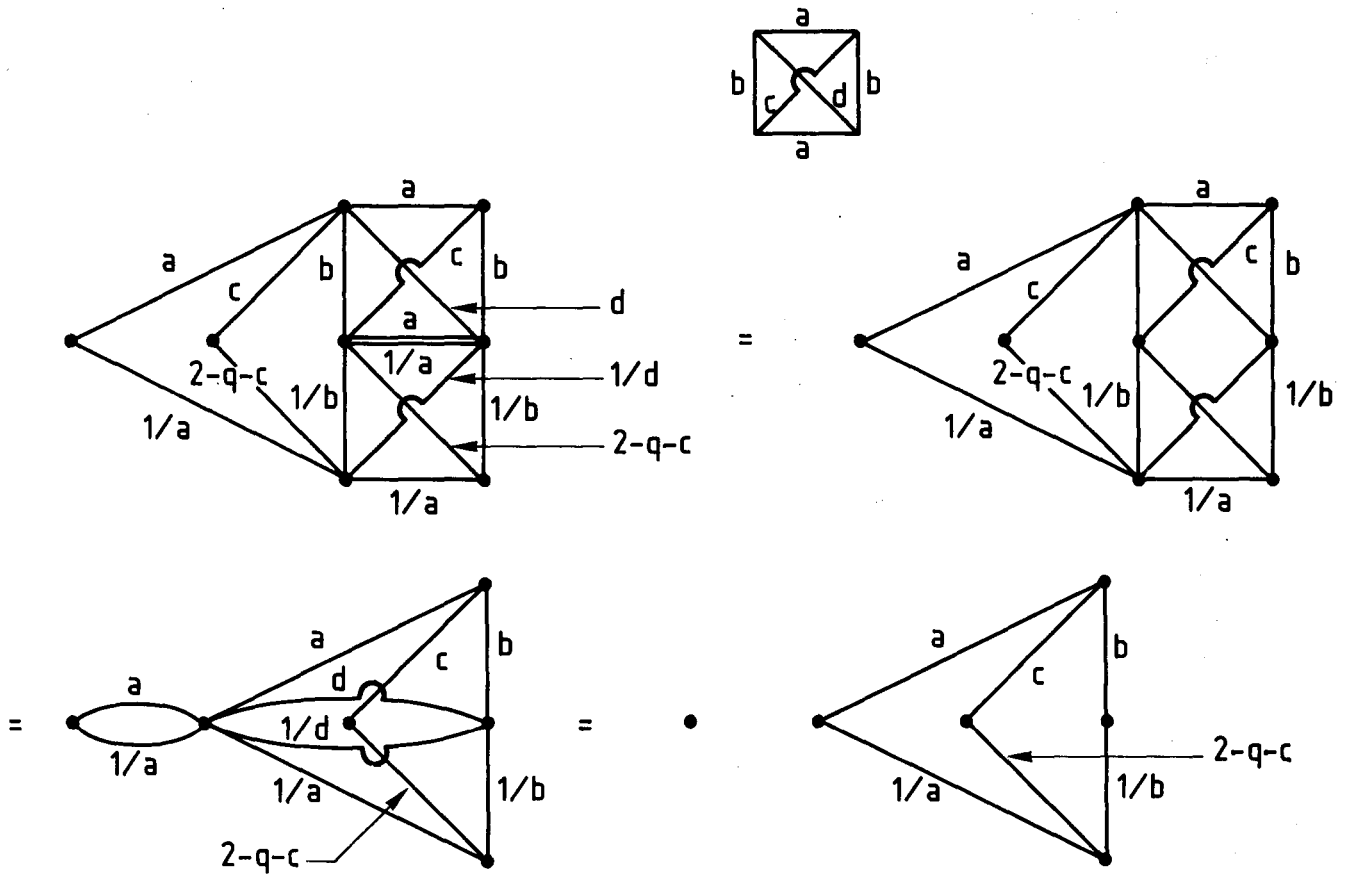
et l'équation fonctionnelle sur la fonction de partition par site :

$$Z(a,b,c) \cdot Z(2-q-a, \frac{1}{b}, 2-q-c) = (a-1)(c-1)(1-q-a)(1-q-c)$$

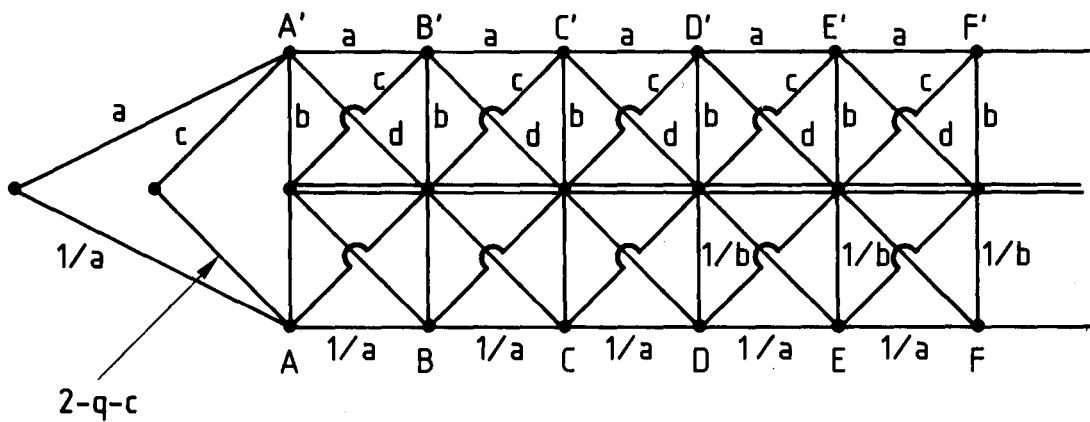
### 2.b.2.) Modèle de Potts sur réseau carré avec seconds plus proches voisins

Considérons maintenant le réseau carré avec interactions entre plus proches voisins et seconds plus proches voisins. Ce problème peut encore être vu comme un problème avec interactions entre plus proches voisins sur réseau non planaire dans le cas du modèle d'Ising ou même de Potts. Nous

avons les égalités suivantes :



Appliquons ces égalités locales à la figure suivante :



Nous voyons facilement que nous pouvons itérer les propriétés et égalités locales précédentes sur cette dernière figure contraignant ainsi les sites A et A', B et B'... à s'identifier. Nous n'obtenons pas à la différence des cas précédents une relation matricielle exacte.

Si l'on admet (ce qui est loin d'être évident) qu'à la limite thermodynamique l'opération que l'on est amené à effectuer au bord pour pouvoir initier ce processus, à savoir identifier A et A', devient négligeable, nous écrivons alors la relation matricielle :

$$T(a,b,c,d) T(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, 2-q-c, \frac{1}{d}) \approx (c-1)^N (1-q-c)^N$$

et nous sommes amenés à avancer l'équation fonctionnelle suivante :

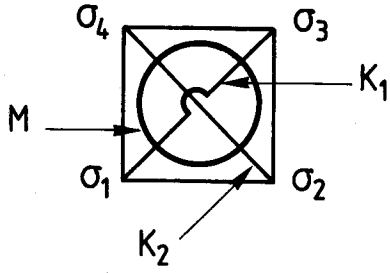
$$Z(a,b,c,d) \cdot Z(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, 2-q-c, \frac{1}{d}) = (c-1)(1-q-c)$$

qui, elle, devrait être vérifiée exactement.

En fait les arguments donnés sur cet exemple doivent surtout être considérés comme des moyens heuristiques rapides pour arriver à l'équation précédente. Celle-ci, ainsi que les équations provenant des autres exemples, seront confortées par la suite par des vérifications à un ordre donné à l'aide du développement diagrammatique resommé usuel [1,2].

### 1.b.3) Modèle à huit vertex symétrique

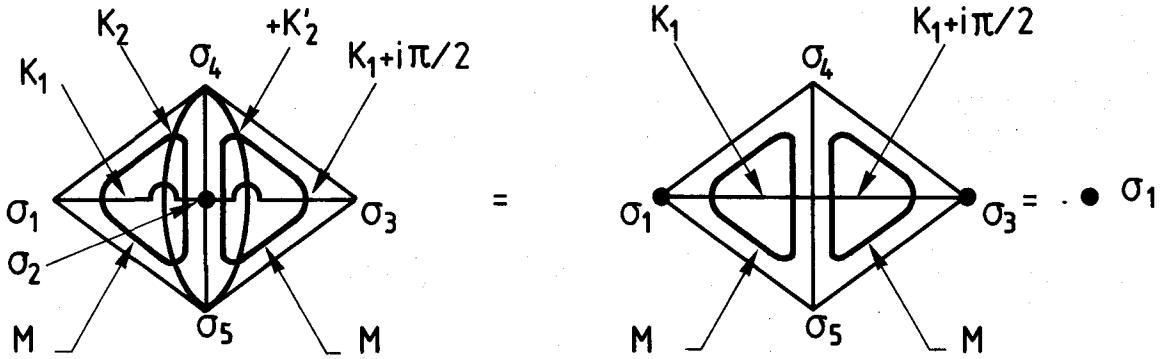
Les exemples que nous avons donnés jusqu'à présent correspondaient tous à des interactions à deux spins. La relation d'inverse existe avec des interactions bien plus générales comme nous allons le montrer sur l'exemple bien connu du modèle à huit vertex symétrique (modèle de Baxter [11]). Ce modèle est d'ordinaire vu comme un modèle dit "à vertex" mais il est possible en utilisant la correspondance due à Kadanoff et Wegner [12] de le reformuler en terme de modèle à spin (deux réseaux d'Ising anisotrope identiques couplés par une interaction à quatre spins). Ce modèle peut être vu alors comme un réseau carré, le poids de Boltzmann associé à chaque plaquette carrée élémentaire étant



$$W(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = e^{K_1 \sigma_1 \sigma_3 + K_2 \sigma_2 \sigma_4 + M \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}$$

(L'interaction à quatre spins de constante de couplage M est symbolisée par un cercle sur cette figure).

Considérons la relation locale suivante :



Dont la contrepartie algébrique est

$$\sum_{\sigma_2} e^{K_1 \sigma_1 \sigma_2 + K_2 \sigma_4 \sigma_5 + M \sigma_1 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_5} \cdot e^{(K_1 + i\pi/2) \sigma_2 \sigma_3 + K'_2 \sigma_4 \sigma_5 + M \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5}$$

$$= 2 \text{ch}(K_1 \sigma_1 + (K_1 + i\pi/2) \sigma_3 + M \sigma_4 \sigma_5 (\sigma_1 + \sigma_3)) e^{(K_2 + K'_2) \sigma_4 \sigma_5}$$

Si  $\sigma_1 = -\sigma_3$  le terme de droite de l'égalité devient nul. Si  $\sigma_1 = \sigma_3$  il vaut

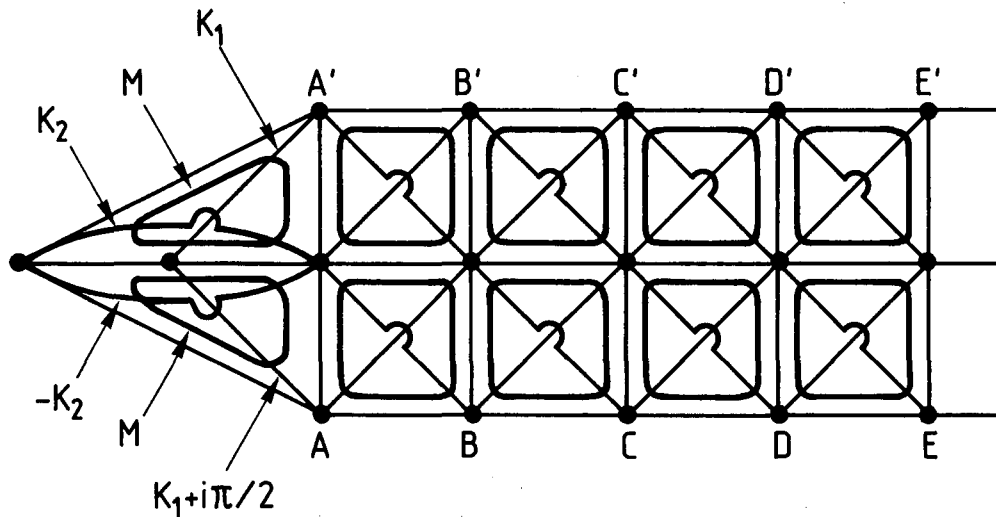
$$2 \text{ch}(2K_1 + i\pi/2 + 2M \sigma_4 \sigma_5) \cdot e^{(K_2 + K'_2) \sigma_4 \sigma_5}$$

Nous désirons que ce terme soit indépendant de  $\sigma_4 \sigma_5$ . Pour ce faire il suffit de choisir  $K'_2$  tel que

$$e^{2K'_2} = e^{-2K_2} \cdot \frac{\text{sh}(2K_1 - 2M)}{\text{sh}(2K_1 + 2M)},$$

ce qui définit complètement la relation d'inverse. Le terme de droite de l'égalité s'écrit alors  $\delta \sigma_1 \sigma_3 \cdot (+2i) (\text{sh}(2K_1 - 2M) \text{sh}(2K_1 + 2M))^{+1/2}$ .

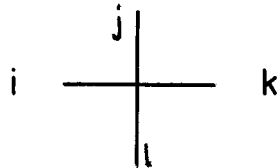
Considérons maintenant la figure suivante



Là encore la relation locale s'appliquant de façon itérée sur la figure précédente, implique l'identification des spins A et A' ainsi que B et B' etc... avec pour conséquence la relation fonctionnelle

$$Z(K_1, K_2, M) \cdot Z(K_1 + i\pi/2, -K_2, M) = 2i(\text{sh}(2K_1 + 2M)\text{sh}(2K_1 - 2M))^{1/2}$$

On aurait obtenu le même résultat en regardant directement le modèle de Baxter comme un modèle à vertex. Le vertex est symbolisé par

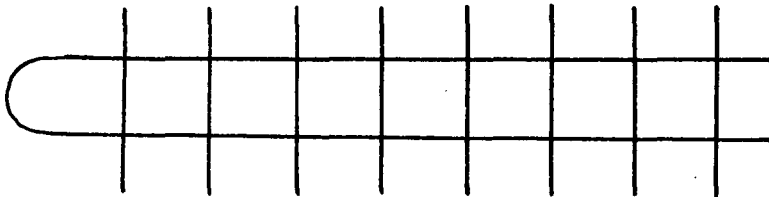


sur chacune des liaisons il est entendu que figure des éléments  $i, j, k, l$  appartenant à  $Z_2$  (flèches). L'ensemble des quatre flèches autour du vertex constitue ce qu'il est convenu d'appeler une configuration du vertex, configuration auquel est associée un certain poids statistique  $W_{ijkl}$ . Nous avons là encore une relation locale que nous symboliserons par

et dont la traduction algébrique est la suivante

$$\sum_{k,l \in \mathbb{Z}_2} W_{ijkl} \cdot W'_{lkj'i'} = \Lambda(W) \cdot \delta_{i,i'} \cdot \delta_{j,j'}$$

où  $\Lambda(W)$  est un facteur dépendant des poids  $W$ . Nous utilisons alors la relation précédente de façon itérée sur la figure suivante



Nous voyons que le raisonnement développé lorsque l'on regarde le modèle comme un modèle "à vertex" est exactement le dual du raisonnement suivi en considérant le modèle comme un modèle "à spin". Ceci pose le problème, lorsqu'on a deux modèles dont on peut démontrer l'égalité des fonctions de partition à des facteurs multiplicatifs connus (dualité, trace partielle, équivalences plus ou moins compliquées) et lorsqu'on a pu démontrer sur l'un des deux modèles l'existence d'une relation d'inverse, de pouvoir exhiber également sur l'autre modèle à l'aide d'un raisonnement simple une autre relation d'inverse en quelque sorte "transformée" de la première. Nous verrons dans la suite qu'il existe des exemples où la relation d'inverse apparaît très facile à obtenir et reste inaccessible par une autre approche pourtant strictement équivalente au niveau du calcul de la fonction de partition.

#### 2.b.4) Modèle de Ashkin-Teller

A la suite du modèle à huit vertex symétrique, il est intéressant de revenir sur le modèle dit de Ashkin Teller <sup>[10]</sup>. Bien que n'étant pas initialement défini en ces termes le modèle peut lui aussi être réexprimé en un modèle à spin : sur un réseau carré en chaque site du réseau on associe deux éléments de  $\mathbb{Z}_2$  ; deux spins  $\sigma_i$  et  $\tau_i$  et à chaque liaison on associe le poids statistique suivant

$$W = e^{K_1 \sigma_i \sigma_j + K_2 \tau_i \tau_j + K_3 \sigma_i \sigma_j \tau_i \tau_j}$$

Contrairement à ce qu'une dualité précipitée amènerait à conclure (dualité effectuée exclusivement sur les spins  $\tau$ ) ce modèle n'est pas dual du modèle de Baxter. En fait il est dual d'un modèle à huit vertex non symétrique dont la fonction de partition n'a pas été calculée jusqu'alors. Il n'en reste pas moins que ces deux modèles présentent de grandes analogies. Fan [13] a notamment longuement argumenté le fait que les deux modèles présentaient exactement les mêmes symétries. Ils présentent d'autre part tous deux la particularité d'avoir une ligne critique et des exposants variants continuellement le long de cette ligne (du fait d'un opérateur marginal en l'occurrence ici le terme à quatre spins). Le modèle de Baxter est un modèle complètement intégrable avec toutes les propriétés associées (existence d'une relation star-triangle généralisée, existence d'une famille de matrice de transfert qui commutent...). Le modèle de Ashkin-Teller, lui, ne semble pas rentrer dans cette catégorie. Par contre nous avons vu qu'il admet la propriété plus faible d'existence d'une relation d'inverse. Pour reprendre la réécriture du modèle en termes de spins précédemment décrite, si l'on s'autorise à avoir deux jeux des trois variables  $(K_1, K_2, K_3)$  correspondant aux liaisons horizontales et verticales et si l'on note par  $K_1^*, K_2^*, K_3^*$  les paramètres correspondant à la dualité pour le modèle de A-T (on pourra se reporter par exemple à Stephen et Mittag <sup>[8]</sup>) alors la relation d'inverse s'écrit :

$$(K_1', K_2', K_3') \rightarrow (-K_1', -K_2', -K_3')$$

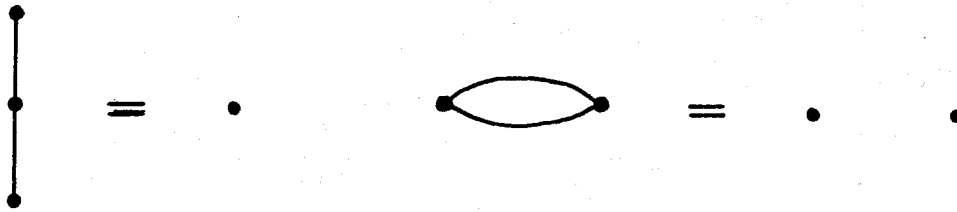
$$(K_1^*, K_2^*, K_3^*) \rightarrow (-K_1^*, -K_2^*, -K_3^*)$$

#### 2.b.5) Modèles en champ magnétique : le modèle d'Ising sur réseau carré ; discussion sur le théorème de Lee et Yang et le réseau de Bethe

Nous pouvons remarquer que dans tous ces exemples, la présence éventuelle d'un champ magnétique sur un sous ensemble, ou sur l'ensemble, des sites du réseau n'aurait eu aucune incidence sur l'existence de la relation d'inverse sur ces modèles. En effet les démonstrations ou arguments heuristiques que nous avons avancés pour obtenir ces relations, dites d'inverse, reposent essentiellement sur les deux relations locales que nous



rappelons par deux figures :



La présence d'un champ ne fait nullement disparaître ces propriétés si elles existent ; ainsi sur le modèle d'Ising nous avons les relations suivantes en présence de champ :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\sigma_2} e^{K_1 \tau_1 \tau_2 + B(\tau_1 + \tau_2)} e^{(K_1 + i\pi/2) \tau_2 \tau_3 - B(\tau_2 + \tau_3)} \\
 &= e^{B(\tau_1 - \tau_3)} \sum_{\tau_2} e^{K_1 \tau_1 \tau_2 + (K_1 + i\pi/2) \tau_2 \tau_3} \\
 &= (2 \operatorname{ish} 2K_1) \cdot e^{B(\tau_1 - \tau_3)} \delta_{\tau_1, \tau_3} = (2 \operatorname{ish} 2K_1) \cdot \delta_{\tau_1, \tau_3} \\
 & e^{K_2 \tau_1 \tau_2 + B(\tau_1 + \tau_2)} \cdot e^{-K_2 \tau_1 \tau_2 - B(\tau_1 + \tau_2)} = 1
 \end{aligned}$$

Tous les raisonnements et figures précédentes peuvent être repris et l'on obtiendra par exemple dans le cas du modèle de Potts sur réseau hexagonal l'équation suivante (en appelant  $h$  l'exponentielle du champ)

$$Z(a, b, c, h) \cdot Z(2-q-a, \frac{1}{b}; 2-q-c, \frac{1}{h}) = (a-1)(c-1)(1-q-a)(1-q-c)$$

De la même façon peut-on reprendre toutes les équations précédentes et leur rajouter les arguments  $h$  et  $1/h$  dans les deux fonctions de partition du produit.

Dans le cas du modèle d'Ising anisotrope sur réseau carré en champ nous avons

$$Z(K_1, K_2, H) \cdot Z(K_1 + i\pi/2, -K_2, -H) = 2 \operatorname{ish} 2K_1$$

Le cas des modèles en champ est intéressant car le théorème de Lee et Yang <sup>[14]</sup> implique, sous certaines conditions, de nombreuses contraintes (dont la plus connue consiste en l'inclusion du lieu des singularités sur

le cercle  $|e^H| = 1$ ). Comment les contraintes provenant de la relation d'inverse et du théorème de Lee et Yang peuvent elles cohabiter ? Les propriétés provenant de ces deux pôles sont elles indépendantes ou bien au contraire se contraignent-elles mutuellement ? La traduction de Lee et Yang en tant que théorème du cercle de Lee et Yang n'est pas très favorable à une comparaison avec la relation d'inverse, aussi allons-nous utiliser les résultats de Bessis, Drouffe et Moussa [15] : Ces auteurs trouvent qu'une des conséquences du théorème de Lee et Yang est que la fonction de partition a la forme suivante

$$\ln Z(K_1, K_2, H) - \ln Z(K_1, K_2, 0) =$$

$$2\ln(1-\text{th}^2 H) + \sum_{\ell=1}^{\infty} [(1-\text{th}^2 H)^{\ell} - 1] \cdot P_{\ell}\left(\frac{1-\text{th} K_1}{1+\text{th} K_1}, \frac{1-\text{th} K_2}{1+\text{th} K_2}\right)$$

où  $P_{\ell}$  est un polynôme de deux variables de degré  $2\ell$  (ordre des deux variables confondu).

Cette forme particulière reste vraie sur n'importe quel réseau par exemple sur le réseau de Bethe ; appelons  $P_{\ell}^B(u, u')$  le polynôme correspondant au réseau de Bethe ayant la même coordination que le réseau carré ( $c=4$ ) .  $P_{\ell}(u, u')$  peut être vu comme étant  $P_{\ell}^B(u, u')$  plus une correction  $\Delta P_{\ell}(u, u')$ , correction qui n'intervient qu'à partir de l'ordre  $\ell=4$ . De plus  $P_{\ell}$ ,  $P_{\ell}^B$  possèdent la propriété de divisibilité suivante :

$$P_{\ell}(u, u) = (1-u)^{\ell} \cdot p_{\ell}(u)$$

$$P_{\ell}^B(u, u) = (1-u)^{\ell} \cdot p_{\ell}^B(u)$$

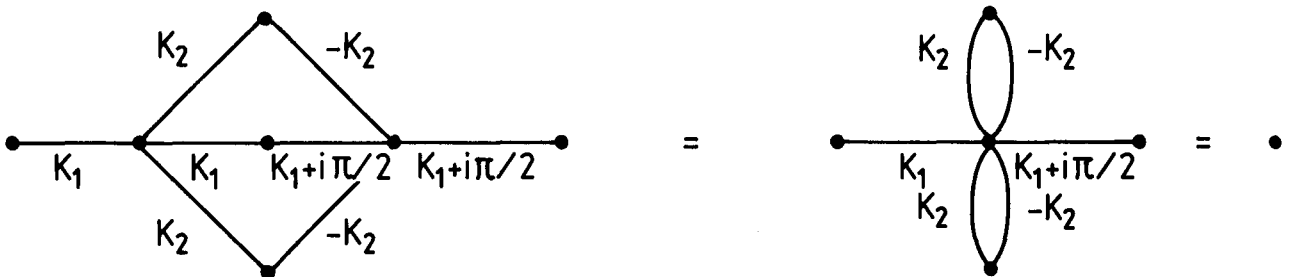
Il existe encore d'autres propriétés moins simples sur ces polynômes.

En réintroduisant la forme précédente pour la fonction de partition dans l'équation d'inverse nous obtenons un ensemble infini d'équations faisant intervenir l'ensemble de ces polynômes  $P_{\ell}$  :

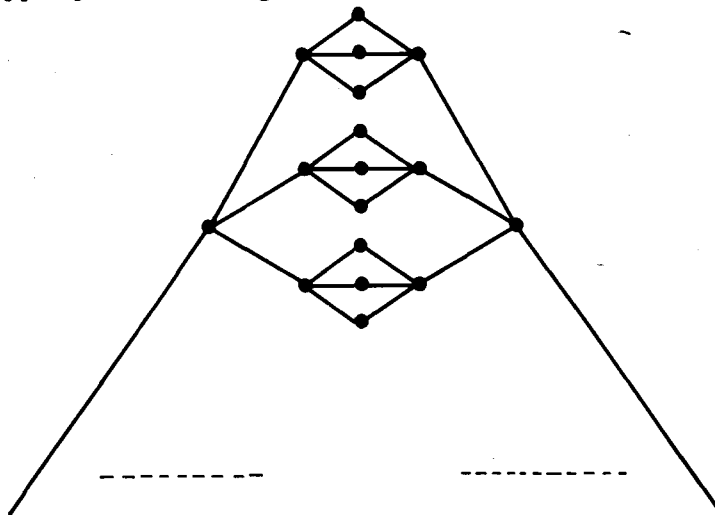
$$\sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^r \binom{r}{\ell} \cdot P_{\ell}(u, u') + \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^r \binom{r}{\ell} \cdot P_{\ell}\left(\frac{1}{u}, u'\right) = -\frac{1}{r}$$

$r \geq 0$

Malheureusement ces équations restent assez formelles, et il n'a pas été possible, jusqu'à maintenant, de tirer de ces équations aucune conclusion pratique. Une étude des relations entre Lee et Yang et la relation d'inverse sur l'exemple du modèle de Potts doit être publiée par ailleurs (J.M. Maillard, R. Rammal [16]). Disons simplement que ces deux types d'informations et de contraintes apparaissent ici comme en quelque sorte "orthogonales", du fait que le groupe de transformation discret infini<sup>(\*)</sup> opère essentiellement sur les paramètres  $K_1$  et  $K_2$ , le paramètre de champ  $H$  étant spectateur. La comparaison entre les contraintes énoncées par Bessis et al, et la relation d'inverse eut été plus fructueuse si le réseau de Bethe vérifiait la relation d'inverse. Le réseau de Bethe pouvant être considéré comme étant connu, nous aurions pu écrire directement la relation d'inverse sur la correction au réseau de Bethe (i.e. la différence entre la fonction de partition sur réseau carré et sur réseau de Bethe). Nous allons voir qu'une telle relation n'existe pas, bien qu'une argumentation analogue à celle des exemples précédents eut pu le laisser penser : la relation locale



si elle est appliquée à la figure suivante



laisserait à penser qu'il existe peut être l'équation suivante sur la

(\*) engendré par l'inverse et la symétrie.

fonction de partition du réseau de Bethe en champ :

$$Z(K_1, K_2, H) \cdot Z(K_1 + i\pi/2, -K_2, -H) = 2i \operatorname{sh} 2K_1$$

En fait nous verrons dans ce qui suit, de façon diagrammatique, que cette égalité n'est pas vérifiée. On peut comprendre ce fait de la manière suivante : pour obtenir des équations d'inverse sur un objet global à partir d'une relation d'inverse locale on est amené à s'appuyer sur la limite thermodynamique qui rend négligeable dans cette limite les opérations que l'on a dues effectuer pour démontrer "géométriquement" l'inverse : dans le cas du réseau de Bethe nous voyons que nous sommes amenés à "coller" deux réseaux de Bethe qui rentrent en contact sur un ensemble de spin qui, même à la limite thermodynamique, est du même ordre que l'ensemble de tous les spins des deux réseaux.

#### 2.b.6) Modèles à vertex

Considérons comme dernier exemple bidimensionnel le cas très général du modèle à seize vertex reprenant les notations de A. Gaaff et J. Hijmans [17] et introduisant comme eux les matrices de Pauli  $\sigma_i, \tau_i$   $i = 0, 1, 2, 3$   
 $\sigma_0 = \tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  nous avons pour la matrice locale  $L_n$  associée à chaque vertex la décomposition

$$L_n = \sum_{i,j=0}^3 w_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \tau_j$$

Vu sur les paramètres du modèle, la relation d'inverse n'est autre que la relation d'inverse matricielle sur la matrice  $L_n$  vue comme une matrice  $4 \times 4$ . Lieb et Wu [18] écrivent  $L_n$  en fonction de seize paramètres (qui peuvent facilement être obtenus en fonction des seize  $w_{ij}$ ) de la façon suivante

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_{12} & \omega_{11} & \omega_8 \\ \omega_{10} & \omega_4 & \omega_6 & \omega_{13} \\ \omega_9 & \omega_5 & \omega_3 & \omega_{14} \\ \omega_7 & \omega_{15} & \omega_{16} & \omega_2 \end{bmatrix}$$

Evidemment l'intérêt de l'existence de la relation d'inverse sur le modèle à 16 vertex est fortement limité par le trop grand nombre de paramètres du

modèle. En fait A. Gaaff et J. Hijmans [17] utilisant les symétries du modèle (weak-graph duality : invariance par les conjugaisons de la forme  $R \otimes R' ( \quad ) R^{-1} \otimes R'^{-1}$ ) ont montré que le modèle à seize vertex pouvait être ramené à un plus petit nombre de paramètres "relevants" et notamment que l'on pouvait ramener l'étude du modèle à seize vertex à celui associé à une matrice  $L_n$  plus simple et plus symétrique ne dépendant que de ces paramètres. On peut sur cette forme réduite vérifier l'inverse qui donc s'avère être compatible avec les invariants qui découlent des conjugaisons précédentes. Mais là encore le nombre de paramètres est trop élevé : il faut considérer des sous-familles du modèle à seize vertex : un exemple intéressant est donné par le modèle à huit vertex le plus général dont nous écrivons la matrice  $L_n$  correspondante :

$$L_n = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & \omega_7 \\ 0 & \omega_4 & \omega_5 & 0 \\ 0 & -\omega_5 & \omega_3 & 0 \\ \omega_7 & 0 & 0 & \omega_2 \end{pmatrix}$$

(on peut toujours du fait de l'invariance par les conjugaisons précédentes se ramener à avoir une matrice symétrique). Il est clair que les transformations

$$\omega_1 \rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1 \omega_2 - \omega_7^2}, \quad \omega_2 \rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_1 \omega_2 - \omega_7^2}, \quad \omega_7 \rightarrow \frac{-\omega_7}{\omega_1 \omega_2 - \omega_7^2}$$

$$\omega_3 \rightarrow \frac{\omega_4}{\omega_3 \omega_4 - \omega_5^2}, \quad \omega_4 \rightarrow \frac{\omega_3}{\omega_3 \omega_4 - \omega_5^2}, \quad \omega_5 \rightarrow \frac{-\omega_5}{\omega_3 \omega_4 - \omega_5^2}$$

correspondent à la transformation d'inverse. Pour retrouver le cas connu du modèle à 8 vertex symétrique il suffit de faire dégénérer le modèle et les transformations précédentes en faisant  $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ ,  $\omega_3 \rightarrow \omega_4$ .

On peut imaginer bien d'autres sous-familles du modèle à seize vertex stables par inverse ; cependant il est clair que l'intérêt de la relation d'inverse sera d'autant plus grand que la famille ainsi considérée dépendra de peu de paramètres. Des familles intéressantes sont peut être celles proposées par J. Rae [19] pour lesquelles la fonction de partition peut être calculée exactement (ces modèles s'avèrent de

façon déguisée correspondre à des problèmes unidimensionnels). La première famille correspond à des  $\omega_i$  tels qu'il existe un nombre réel  $Z$  tel que l'on ait le système d'équations

$$\omega_{10} \cdot Z^2 + (\omega_4 - \omega_1) \cdot Z - \omega_{12} = 0$$

$$\omega_{16} \cdot Z^2 + (\omega_2 - \omega_3) \cdot Z - \omega_{13} = 0$$

$$\omega_7 \cdot Z^2 + (\omega_{15} - \omega_9) \cdot Z - \omega_5 = 0$$

$$\omega_6 \cdot Z^2 + (\omega_{13} - \omega_{11}) \cdot Z - \omega_8 = 0$$

La deuxième famille correspond aux conditions

$$\omega_6 = \omega_7 = \omega_{10} = \omega_{16} = 0$$

La troisième aux conditions

$$\omega_5 = \omega_8 = \omega_{12} = \omega_{14} = 0$$

On peut vérifier que ces trois familles sont bien stables par inverse. De plus comme dans les exemples unidimensionnels la connaissance de l'expression exacte de la fonction de partition permet une vérification directe de la relation d'inverse.

#### 2.b.7) Modèle de Potts sur réseau cubique simple

Les exemples tridimensionnels sont tout aussi nombreux. Nous ne donnerons qu'un seul exemple : le modèle de Potts anisotrope sur réseau cubique. Nous n'allons comme dans le cas bidimensionnel utiliser que les deux relations locales :

$$\begin{array}{c} b \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} = \bullet$$

$2-q-b$

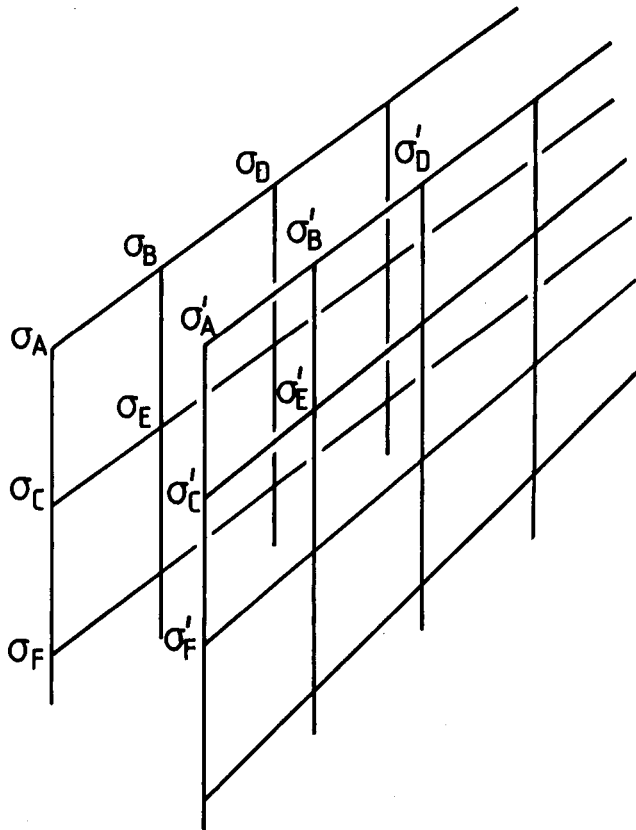
$$\begin{array}{c} c \\ \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \bullet \quad \bullet \\ 1/c \end{array} = \bullet \quad \bullet$$

Le formalisme de matrice de transfert est la généralisation du formalisme bidimensionnel. La matrice de transfert peut s'écrire comme un produit  $T_1(b,c) T_2(a)$  où

$$T_1(b,c) = b^{\delta\sigma_A\sigma_B} b^{\delta\sigma_B\sigma_D} \dots b^{\delta\sigma_C\sigma_E} \dots c^{\delta\sigma_A\sigma_C} c^{\delta\sigma_C\sigma_F} \\ \times \delta\sigma_A\sigma'_A \delta\sigma_B\sigma'_B \delta\sigma_C\sigma'_C \dots$$

et

$$T_2(a) = a^{\delta\sigma_A\sigma'_A} a^{\delta\sigma_B\sigma'_B} \dots a^{\delta\sigma_C\sigma'_C} \dots$$



En posant  $\tilde{T}(a,b,c) = T_1^{1/2} T_2 T_1^{1/2}$  on a

$$\tilde{T}(a,b,c) \cdot \tilde{T}(2-q-a, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}) = (a-1)^N (1-q-a)^N$$

où  $N$  désigne le nombre de spin dans le plan vertical, ainsi que l'équation sur la fonction de partition par site

$$Z(a,b,c) \cdot Z(2-q-a, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}) = (a-1)(1-q-a)$$

Nous remarquons que cette équation est exactement la même que celle pour le réseau triangulaire. De plus tout comme pour ce dernier réseau nous avons la symétrie évidente

$$Z(a,b,c) = Z(\sigma a, \sigma b, \sigma c)$$

où  $\sigma$  désigne un élément quelconque du groupe  $S_3$  des permutations des trois éléments  $a, b, c$ .

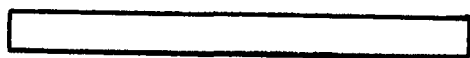
### 3) JUSTIFICATION DES EQUATIONS D'INVERSE PAR UNE RESOMMATION DIAGRAMMATIQUE

Nous avons déjà vu dans le cas des modèles unidimensionnels la possibilité de justifier les équations d'inverses par une resommation de diagrammatiques usuelles (basses ou hautes températures). Nous allons sur les exemples précédents indiquer rapidement (les choses varient peu d'un modèle à l'autre) les resommations diagrammatiques qui peuvent être effectuées.

#### 3.1) Modèle d'Ising bidimensionnel et modèle de Potts bidimensionnel sur réseau carré

Une diagrammatique resommée explicite a été effectuée jusqu'à l'ordre 5 en  $\frac{1}{c}$  (M.T. Jaekel, J.M. Maillard [2]). A l'ordre  $1/c^3$  nous avons  $\ln \Lambda(b,c)$  (égal à  $\ln Z(b,c)$  moins le facteur dominant à basse température  $\ln(bc)$ )

$$\ln \Lambda(b,c) = \frac{(q-1)}{c^2} \frac{1}{b^2-1} + \frac{(q-1)(q-2)}{c^3} \left( \frac{1}{b^2-1} \right)^2 + \dots$$



$$\frac{(q-1)}{c^2} \frac{1}{b^2-1}$$



$$\frac{(q-1)(q-2)}{c^3} \left( \frac{1}{b^2-1} \right)^2$$

Evidemment dans le cas du modèle d'Ising le deuxième terme disparaît.



A cet ordre on vérifie bien que :

$$\ln \Lambda(b, c) + \ln \Lambda\left(\frac{1}{b}, 2-q-c\right) = \ln\left(\frac{(c-1)(1-q-c)}{c(2-q-c)}\right) = \frac{(1-q)}{c^2} + \frac{(q-1)(q-2)}{c^3} + \dots$$

### 3.2) Modèle de Potts (Ising) sur réseau triangulaire

Nous introduisons les variables duales de  $a, b, c$  :

$$a^* = \frac{a+q-1}{a-1}, \quad b^* = \frac{b+q-1}{b-1}, \quad c^* = \frac{c+q-1}{c-1}$$

et nous resomons une diagrammatique haute-température cette fois-ci ;  
la relation d'inverse s'écrit en introduisant

$$\ln \Lambda(a^*, b^*, c^*) = \ln Z(a, b, c) - \ln \frac{(a+q-1)(b+q-1)(c+q-1)}{q^{3/2}}$$

$$\ln \Lambda(a^*, b^*, c^*) + \ln \Lambda\left(\frac{1}{a^*}, 2-q-b^*, 2-q-c^*\right) =$$

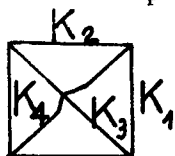
$$\ln \Lambda(a^*, b^*, c^*) =$$

$$\begin{array}{l} \text{Diagram 1: A parallelogram with a horizontal line through the middle.} \\ \text{Diagram 2: A parallelogram with a horizontal line through the middle, and a vertical line through the middle.} \\ \text{Diagram 3: A parallelogram with a horizontal line through the middle, and a vertical line through the middle, and a diagonal line from bottom-left to top-right.} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} (q-1) \left( \frac{1}{a^{*2}-1} \right) \frac{1}{b^{*2}} \\ (q-1) \left( \frac{a^*}{a^{*2}-1} \right) \frac{2}{b^* c^*} \\ \frac{(q-1)}{(a^{*2}-1)} \frac{1}{c^{*2}} \end{array} \right.$$

La relation est bien vérifiée à cet ordre mais les calculs se compliquent rapidement par la suite.

### 3.3) Modèle d'Ising sur réseau carré avec seconds plus proches voisins

Reprenons l'exemple du réseau non planaire qui correspondait au motif :



Pour plus de simplicité la diagrammatique est indiquée sur l'exemple du modèle d'Ising ; nous avons l'équation suivante sur la fonction de partition :

$$Z(K_1, K_2, K_3, K_4) \cdot Z(-K_1, -K_2, -K_3, K_4 + i\pi/2) = 2i \operatorname{sh} 2K_4$$

En introduisant  $\ln \Lambda$  la fonction de partition où l'on a soustrait la contribution dominante haute température :

$$\ln \Lambda(K_1, K_2, K_3, K_4) = \ln Z(K_1, K_2, K_3, K_4) - \ln(\operatorname{ch} K_1 \operatorname{ch} K_2 \operatorname{ch} K_3 \operatorname{ch} K_4)$$

La relation d'inverse s'écrit alors

$$\ln \Lambda(K_1, K_2, K_3, K_4) + \ln \Lambda(-K_1, -K_2, -K_3, K_4 + i\pi/2) =$$

$$\ln(1 - \operatorname{th}^2 K_1) + \ln(1 - \operatorname{th}^2 K_2) + \ln(1 - \operatorname{th}^2 K_3)$$

Remarquons qu'en prenant la limite  $K_3 \rightarrow 0$  on retrouve bien la relation sur le réseau triangulaire. Nous noterons  $t_i = \operatorname{th} K_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Diagrammatiquement nous avons tous les diagrammes rencontrés sur le réseau triangulaire en faisant  $t_3 = 0$  :

$$t_1^2 \cdot \frac{t_4^2}{1 - t_4^2}$$

$$t_2^2 \cdot \frac{t_4^2}{1 - t_4^2}$$

$$2t_1 t_2 \frac{t_4^2}{1 - t_4^2} \dots$$

Nous avons également tous les diagrammes rencontrés sur le réseau carré en faisant  $t_1 = t_2 = 0$  :



$$\frac{t_4^2}{1-t_4^2} \cdot t_3^2 \dots$$

Mais nous avons également des diagrammes non planaires :



### 3.4) Modèle à huit vertex symétrique

Définissons  $\Lambda(K_1, K_2, M)$  par

$$Z(K_1, K_2, M) = \text{ch } K_1 \cdot \text{ch } K_2 \cdot \text{ch } M \cdot \Lambda(K_1, K_2, M)$$

La relation d'inverse devient alors

$$\ln \Lambda(K_1, K_2, M) + \ln \Lambda(K_1, i\pi/2, K'_2, M) =$$

$$-(\ln \text{ch } K_2 + \ln \text{ch } K'_2 + \ln \text{ch}^2 M) + \ln \frac{[\text{sh}(2K_1 - 2M) \text{sh}(2K_1 + 2M)]^{1/2}}{\text{sh } 2K_1}$$

Si nous posons  $t_1 = \text{th } K_1$ ,  $t_2 = \text{th } K_2$ ,  $t'_2 = \text{th } K'_2$  et  $t = \text{th } M$ , la relation d'inverse s'écrit

$$t_1 \rightarrow \frac{1}{t_1}, t \rightarrow t, t_2 \rightarrow t'_2 = \frac{-[t(1+t_1^2) + t_1(1+t^2) \cdot t_2]}{[t_1(1+t^2) + t(1+t_1^2)t_2]}$$

$$= -t_2 - \left(t_1 + \frac{1}{t_1}\right) t + \left(t_1 + \frac{1}{t_1}\right) (tt_2^2 + t^3) + \left(t_1 + \frac{1}{t_1}\right)^2 t^2 t_2 + \dots$$

Le développement du terme de droite dans l'équation précédente donne aux ordres les plus bas

$$-t_2^2 - \left(t_1 + \frac{1}{t_1}\right) \cdot tt_2 - \frac{1}{2} \left(t_1 + \frac{1}{t_1}\right)^2 t^2 - t^2$$

$$- \frac{1}{2} t^2 \cdot \left(t_1 - \frac{1}{t_1}\right)^2$$



$$t_2^2 \frac{t_1^2}{1-t_1^2}$$



$$2t_1 t_2 t \frac{t_1^2}{1-t_1^2}$$



$$(t_1 t)^2 \frac{t_1^2}{1-t_1^2}$$



$$t_1 t_2 t$$

La vérification de l'équation d'inverse redonne bien correctement le terme  $-t_2^2$  (vérification du simple modèle d'Ising  $M=0$ ) quant au terme en  $tt_2$  nous avons :

$$\begin{aligned} & tt_2 \frac{2 t_1^3}{1-t_1^2} + t \left( -t_2 - \left( t_1 + \frac{1}{t_1} \right) t + \dots \right) \cdot \left( \frac{-2/t_1}{1-t_1^2} \right) \\ & + tt_2 t_1 + t \left( -t_2 - \left( t_1 + \frac{1}{t_1} \right) t + \dots \right) \frac{1}{t_1} \\ & + \left( \frac{-1}{1-t_1^2} \right) \left( t_2 t \cdot 2 \left( t_1 + \frac{1}{t_1} \right) + \dots \right) \\ & = -tt_2 t_1 - tt_2 \frac{1}{t_1} \end{aligned}$$

Pour le terme en  $t^2$  nous avons

$$\begin{aligned} & t_1^2 t^2 \cdot \left( \frac{t_1^2}{1-t_1^2} \right) + \left( t_1 + \frac{1}{t_1} \right)^2 t^2 \left( \frac{-1}{1-t_1^2} \right) \\ & + 2 \frac{1}{t_1} t \left( \frac{-1}{1-t_1^2} \right) (-t) \left( t_1 + \frac{1}{t_1} \right) + \frac{1}{t_1^2} \left( \frac{-1}{1-t_1^2} \right) \cdot t^2 \\ & + \frac{1}{t_1} t (-t) \left( t_1 + \frac{1}{t_1} \right) = - \left( t_1^2 + 1 + \frac{1}{t_1^2} \right) \end{aligned}$$

On vérifie donc bien l'équation d'inverse à l'ordre 2 (ordre de  $t_2$  et  $t$  confondus).

### 3.5) Modèle de Potts (Ising) anisotrope sur réseau cubique

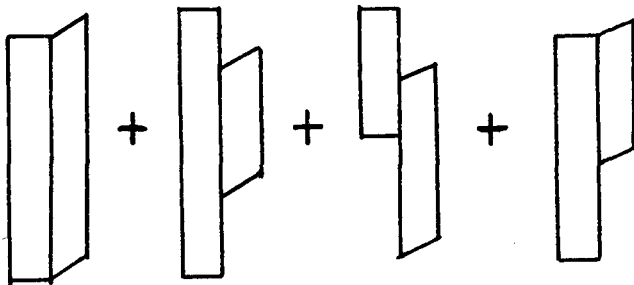
Les notations sont les mêmes que celles du réseau triangulaire. Les relations et équations sont identiques. Bien sûr la diagrammatique du réseau cubique inclue toute la diagrammatique du réseau carré. Celle-ci a été explicitée jusqu'à l'ordre 5 en  $\frac{1}{b^*}$  ou  $\frac{1}{c^*}$  nous n'y reviendrons pas. Concentrons nous sur les diagrammes intrinsèquement tridimensionnels à l'ordre  $\left(\frac{1}{b^*c^*}\right)^2$ . La plus grande partie de cette diagrammatique resommée a été explicitée au sujet du modèle d'Ising (M.T. Jaekel, J.M. Maillard [1]) nous demandons au lecteur de se référer à cet article pour avoir une liste complète des diagrammes intervenant à l'ordre  $\frac{1}{b^{*2}c^{*2}}$ . Dans le cas du modèle d'Ising le coefficient du terme en  $\frac{1}{b^{*2}c^{*2}}$  était

$$\frac{1+13u^2+13u^4+u^6}{(1-u^2)^3} \quad \text{où } u = \frac{1}{a^*}$$

Dans le cas du modèle de Potts ces mêmes diagrammes contribuent avec les mêmes coefficients multipliés par  $(q-1)$  (ce sont tous des diagrammes à une boucle) à l'exception du terme disconnexe qui doit, lui, être multiplié par  $(q-1)^2$ . La contribution de tous ces diagrammes est donc

$$\left[ \frac{1+13u^2+13u^4+u^6}{(1-u^2)^3} \right] (q-1) + \left[ \frac{-4u^4(1+u^2)}{(1-u^2)^3} \right] [(q-1)^2 - (q-1)]$$

De plus, de nouveaux diagrammes qui n'existaient pas dans le cas d'Ising apparaissent :



$$4(q-1)(q-2) \frac{u^2(1+u^2)^2}{(1-u^2)^3}$$

Pour vérifier la relation d'inverse il suffit, compte tenu du fait que le modèle de Potts bidimensionnel et le modèle d'Ising tridimensionnel

vérifient celle-ci, de vérifier que  $f(u) + f(\frac{1}{u}) =$

où

$$f(u) = \left[ \frac{-4u^4(1+u^2)}{(1-u^2)^3} \right] [(q-1)^2 - (q-1)] + 4(q-1)(q-2) \frac{u^2(1+u^2)^2}{(1-u^2)^3}$$

Le modèle de Potts tridimensionnel vérifie donc bien la relation d'inverse jusqu'à l'ordre 4.

### 3.6) Modèle d'Ising sur réseau carré en champ

Compte tenu là encore du fait que l'équation d'inverse est vérifiée sur réseau carré en l'absence de champ nous n'effectuons cette vérification diagrammatique que sur des diagrammes où le champ intervient explicitement ; avec les notations  $\tau = \text{th } H$ ,  $t = \text{th } K_1$ ,  $t' = \text{th } K_2$  nous avons :

$$\begin{aligned} & \text{---} \cdot \frac{t}{1-t} \cdot \tau^2 \\ & \begin{array}{c} \text{---} \cdot \\ \text{---} \cdot \end{array} \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^2 \cdot t' \cdot \tau^2 \\ & \begin{array}{c} \text{---} \cdot \\ \text{---} \cdot \end{array} \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^3 t'^2 \tau^2 \\ & \begin{array}{c} \text{---} \cdot \\ \text{---} \cdot \end{array} \frac{2t}{(1-t)^3} t'^2 \tau^2 \quad \begin{array}{c} \text{---} \cdot \\ \text{---} \cdot \end{array} \frac{4t^3}{(1-t)^2(1-t^2)} t'^2 \tau^2 \\ & \begin{array}{c} \text{---} \cdot \\ \text{---} \cdot \end{array} \frac{2t^5}{(1-t)(1-t^2)^2} t'^2 \tau^2 \end{aligned}$$

et le terme disconnexe

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{c} \text{---} \cdot \\ \text{---} \cdot \end{array} \right) (-2) \sum_{p,q \geq 1} (p+q-1) t^{p+2q} \cdot t'^2 \tau^2 = \\ & (-2) \left[ \frac{-t^3}{(1-t)(1-t^2)} + \frac{t^3}{(1-t^2)(1-t)^2} + \frac{t^3}{(1-t)(1-t^2)^2} \right] t'^2 \tau^2 \end{aligned}$$

à l'ordre suivant en  $\tau$  nous avons le terme disconnexe

$$\left( \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} \right) \frac{1}{2} \sum_{p,q \geq 1} (p+q+1) t^{p+q} \cdot \tau^4$$

$$= \left( -\frac{1}{2} \right) \left[ \left( \frac{t}{1+t} \right)^2 + \frac{2t^2}{(1-t)^3} \right] \tau^4$$

On vérifie bien à l'ordre considéré l'équation d'inverse

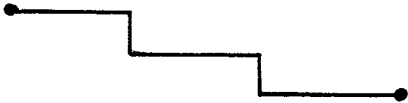
$$\ln \Lambda(t, t', \tau) + \ln \Lambda\left(\frac{1}{t}, -t', -\tau\right) = \ln(1-\tau^2)$$

jusqu'à l'ordre 4 (ordre de  $t'$  et  $\tau$  confondus).

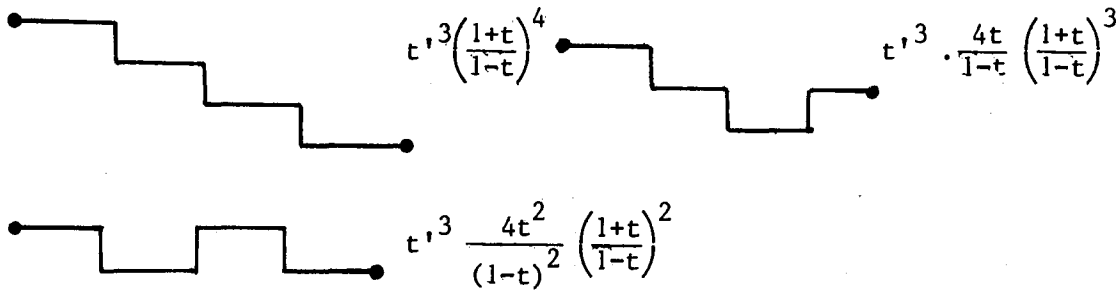
Ces considérations s'étendent au modèle de Potts en champ sur réseau carré ou cubique et donc bien sûr au modèle d'Ising en champ sur réseau cubique. Nous ne rentrerons pas dans les détails.

### 3.7) Modèle d'Ising en champ sur réseau de Bethe (coordination 4)

La resommation de la diagrammatique haute température s'applique également sur réseau de Bethe en champ. Nous avons ainsi pour le développement du logarithme de la fonction de partition, une fois soustraite l'expression en champ nul, en posant  $t = \text{th } K_1$ ,  $t' = \text{th } K_2$  :

|                                                                                     |                                                        |                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-----------------|
|  | $\frac{t}{1-t}$                                        |                 |
|  | $t' \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^2$                  |                 |
|  | $t'^2 \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^3$                | } soit au total |
|  | $t'^2 \frac{2t}{1-t} \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^2$ |                 |

$$t'^2 \left( \frac{1+5t+7t^2+3t^3}{(1-t)^3} \right)$$



soit au total  $\frac{t^3}{(1-t)^4} [1 + 8t + 22t^2 + 24t^3 + 9t^4]$ .

Nous voyons donc, contrairement à ce qu'aurait pu laisser penser des raisonnements trop hâtifs, que le réseau de Bethe en champ ne vérifie pas la relation d'inverse, et ce, bien que les diagrammes intervenant présentent certaines analogies avec l'exemple du réseau carré en champ.

### 3.8) i) Modèle d'Ising sur réseau carré avec motif périodique

Les réseaux carrés possédant un motif plus compliqué que le simple réseau carré anisotrope vérifient également des équations d'inverse. Dans le cas du modèle d'Ising pour le motif périodique suivant

|       | $K_2$ | $K_3$ | $K_2$ |  |  |       |
|-------|-------|-------|-------|--|--|-------|
| $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_2$ |  |  | $K_1$ |
| $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_2$ |  |  | $K_1$ |
| $K_1$ |       |       |       |  |  | $K_1$ |

$$\text{th } K_1 = t_1, \text{ th } K_2 = t_2, \text{ th } K_3 = t_3$$

nous avons la relation suivante

$$Z(K_1, K_2, K_3) \cdot Z(K_1, K_2 + i\pi/2, K_3 + i\pi/2) = [2i \text{ sh } 2K_2 \ 2i \text{ sh } 2K_3]^{1/2}$$

La vérification diagrammatique donne à l'ordre le plus bas

$$\boxed{\phantom{t_1^2}} \cdot \frac{t_1^2}{2} \cdot \left( \frac{t_2^2 + t_3^2 + 2t_2^2 t_3^2}{1 - t_2^2 t_3^2} \right)$$

Ce terme ajouté à son transformé par  $t_1 \rightarrow -t_1$ ,  $t_2 \rightarrow \frac{1}{t_2}$ ,  $t_3 \rightarrow \frac{1}{t_3}$  donne au total  $-t_1^2$  qui est bien le début du développement du terme  $\ln(1-t_1^2)$ . Le



terme de 1'ordre suivant en  $t_1^4$  est de la forme

$$t_1^4 \cdot \left[ \frac{a(t_3^2+t_2^2)+bt_3^2t_2^2+c(t_3^2t_2^4+t_3^4t_2^2)+dt_3^4t_2^4+a(t_3^4t_2^6+t_2^4t_3^6)+ft_3^6t_2^6}{(1-t_2^2t_3^2)^3} \right]$$

(les coefficients b-d, f sont connus du fait de l'inverse).

Le modèle considéré n'étant pas invariant par la rotation de  $90^\circ$ , nous avons une deuxième relation d'inverse :

$$Z(K_1, K_2, K_3) \cdot Z(K_1+i\pi/2, -K_2, -K_3) = 2i \operatorname{sh} 2K_1$$

Cette dernière relation peut être testée diagrammatiquement elle aussi :

$$\boxed{\phantom{000000}} \quad (t_2^2+t_3^2) \cdot \left( \frac{t_1^2}{1-t_1^2} \right)$$

A l'ordre suivant (coefficient de  $t_2^2 t_3^2$ ) nous avons les mêmes expressions que pour le réseau carré anisotrope à l'ordre 4 la seule différence étant dans le terme disconnexe  $\boxed{\phantom{000000}}$   $\boxed{\phantom{000000}}$  qui contribue au coefficient  $t_2^4$  ou  $t_3^4$  et non pas au coefficient  $t_2^2 t_3^2$ . Ce terme peut facilement être calculé :

$$(-1) \cdot \sum_{p,q=1} \binom{p+q+1}{2} \cdot (t_1^2)^{p+q} = \left( -\frac{1}{2} \right) \left[ \frac{t_1^4}{(1-t_1^2)^2} + \frac{2 t_1^4}{(1-t_1^2)^3} \right]$$

La somme de ce terme et de son transformé par l'inverse ( $t_1 \rightarrow \frac{1}{t_1}$ ) donne bien  $-1/2$ , coefficient du terme  $t_2^4$  dans  $\ln(1-t_2^4)$ . De même on vérifie facilement que la somme du coefficient de  $t_2^2 t_3^2$  et de son transformé par l'inverse ( $t_1 \rightarrow \frac{1}{t_1}$ ) donne bien un résultat nul comme il se doit.

3.8)ii) Considérons un motif périodique plus compliqué

|       | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | $K_5$ | $K_2$ | $K_3$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ |       |       |       |
| $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ |       |       |       |       |
| $K_1$ | $K_2$ |       |       |       |       |       |

$$\operatorname{th} K_1 = t_1, \operatorname{th} K_2 = t_2, \operatorname{th} K_3 = t_3,$$

$$\operatorname{th} K_4 = t_4, \operatorname{th} K_5 = t_5$$

La relation d'inverse est alors la suivante :

$$Z(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5) \cdot Z(-K_1, K_2 + i\pi/2, K_3 + i\pi/2, K_4 + i\pi/2, K_5 + i\pi/2) = [2i \operatorname{sh} 2K_2 \operatorname{sh} 2K_3 \operatorname{sh} 2K_4 \operatorname{sh} 2K_5]^{1/4}$$

Le diagramme d'ordre le plus bas a une contribution

$$\frac{t_1^2}{4} \cdot \left[ \frac{t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 + t_5^2 + t_2^2 t_3^2 + t_3^2 t_4^2 + t_4^2 t_5^2 + t_5^2 t_2^2 + t_2^2 t_3^2 t_4^2 + t_3^2 t_4^2 t_5^2 + t_4^2 t_5^2 t_2^2 + t_5^2 t_2^2 t_3^2 + 4 t_2^2 t_3^2 t_4^2 t_5^2}{(1 - t_2^2 t_3^2 t_4^2 t_5^2)} \right]$$

Là encore la relation d'inverse est vérifiée à cet ordre. De plus on vérifie que lorsque  $t_2, t_3, t_4, t_5$  tendent vers une valeur commune  $t_2$  on retrouve la contribution du diagramme le plus bas du réseau carré anisotrope.

Comme dans l'exemple précédent du fait de l'absence d'invariance par rapport à la rotation de  $90^\circ$ , nous avons une deuxième relation d'inverse qui se prête mieux à une approche diagrammatique :

$$Z(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5) \cdot Z(K_1 + i\pi/2, -K_2, -K_3, -K_4, -K_5) = 2i \operatorname{sh} 2K_1$$

ou bien encore avec les notations usuelles :

$$\ln \Lambda(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) + \ln \Lambda\left(\frac{1}{t_1}, -t_2, -t_3, -t_4, -t_5\right) = \sum_{i=2}^5 \ln(1 - t_i^2)$$

Nous avons aux ordres les plus bas

$$(t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 + t_5^2) \cdot \left( \frac{t_1^2}{1 - t_1^2} \right)$$

Si l'on appelle  $f(t_1)$  la contribution du terme en  $t_2^2 t_3^2$  dans l'exemple précédent et  $g(t_1)$  la contribution du terme en  $t_2^4$  ou  $t_3^4$  dans ce même exemple, nous avons à l'ordre 4 dans notre cas une contribution totale qui est la

somme de deux termes :

$$f(t_1)(t_2^2 t_3^2 + t_3^2 + t_4^2 + t_4^2 t_5^2 + t_5^2 t_2^2) + g(t_1) \cdot (t_2^4 + t_3^4 + t_4^4 + t_5^4)$$

Le premier terme de la somme là encore s'annule lorsqu'on lui ajoute son transformé par inverse. Le second, lui, donne bien le terme d'ordre 4 du développement de  $\sum_{i=2}^5 \ln(1-t_i^2)$ . La seconde relation d'inverse est vérifiée jusqu'à l'ordre 4.

### 3.9) Réseau d'Utiyama

Un autre motif intéressant est le motif qui correspond au modèle dit d'Utiyamah [20] :

|  |           |           |       |
|--|-----------|-----------|-------|
|  | $K_1$     | $K_3$     |       |
|  | $K_4 K_3$ | $K_2 K_1$ | $K_4$ |
|  | $K_2 K_1$ | $K_4 K_3$ | $K_2$ |
|  |           |           |       |

$$\text{th } K_1 = t_1, \quad \text{th } K_2 = t_2,$$

$$\text{th } K_3 = t_3, \quad \text{th } K_4 = t_4$$

La relation d'inverse est la suivante :

$$Z(K_1, K_2, K_3, K_4) \cdot Z(K_1 + i\pi/2, -K_2, K_3 + i\pi/2, -K_4) = (2i \text{ sh } 2K_1 \ 2i \text{ sh } 2K_3)^{1/2}$$

A l'ordre le plus bas (ordre de  $t_2$  et de  $t_4$  confondus) nous avons toujours le même diagramme qui donne les trois contributions

$$\left(\frac{t_4^2 + t_2^2}{2}\right) \left(\frac{t_1^2 t_3^2}{1 - t_1^2 t_3^2}\right) \quad \text{et} \quad t_2 t_4 \cdot \left(\frac{t_1 t_3}{1 - t_1^2 t_3^2}\right)$$

La somme de ces termes et de leur transformée par  $t_1 \rightarrow \frac{1}{t_1}$   $t_2 \rightarrow -t_2$   $t_3 \rightarrow \frac{1}{t_3}$   $t_4 \rightarrow -t_4$  donne  $-\frac{(t_2^2 + t_4^2)}{2}$  début du développement de

$$\frac{1}{2} \ln(1-t_2^2) + \frac{1}{2} \ln(1-t_4^2)$$

A l'ordre suivant les coefficients de  $t_4 t_2^3$ ,  $t_4^2 t_2^2$  et  $t_4^3 t_2$  sont assez compliqués, par contre les coefficients de  $t_4$  et  $t_2^4$  sont de la forme :

$$\frac{\alpha t_1 t_3 + \beta t_1^2 t_3^2 + \gamma t_1^3 t_3^3 + \delta t_1^4 t_3^4 + \omega t_1^5 t_3^5}{(1 - t_1^2 t_3^2)^3}$$

Evidemment lorsque  $t_1 = t_3$  et  $t_2 = t_4$  on doit retrouver les résultats du modèle d'Ising anisotrope sur réseau carré. De plus  $\alpha-\omega$  et  $\beta-\delta$  sont connus de part la relation d'inverse.

Les mêmes considérations s'appliquent dans le cas plus général du modèle de Potts pour ce même motif. Avec les notations  $a, b, c, d$  désignant les exponentielles des constantes de couplage  $K_1, K_2, K_3, K_4$  nous avons

$$Z(a, b, c, d) \cdot Z(2-q-a, \frac{1}{b}, 2-q-c, \frac{1}{d}) = ((1-a)(a+q-1)(1-c)(c+q-1))^{1/2}$$

Ce problème admet tout un ensemble de symétrie par exemple :

$$Z(K_1, K_2, K_3, K_4) = Z(K_1, K_4, K_3, K_2)$$

De façon générale il est évident que l'on a pas comme groupe de symétrie tout le groupe de permutations des quatre constantes de couplages,  $K_1, K_2, K_3, K_4$ ; mais que l'on a tout de même tout le groupe des symétries du carré. Nous verrons par la suite que ce groupe de symétrie, joint à l'équation d'inverse, conduit à un ensemble de contraintes très fortes sur la fonction de partition. Ces contraintes permettent de retrouver très simplement la condition de température critique vu comme une relation entre  $a, b, c$  et  $d$  conjecturée par F.Y. Wu [21].

#### 4. APPROCHES ANALYTIQUES EXACTES

##### 4.1) Les modèles de Potts

Nous avons argumenté sur les exemples bi et tridimensionnels précédents en faveur de la pertinence des relations d'inverse à l'aide de développements diagrammatiques. On peut se demander dans les cas bidimensionnels exactement résolus (modèle d'Ising, modèle 6 vertex, modèle 8 vertex symétrique...) si, partant de cette solution exacte, il ne serait pas possible de vérifier l'équation d'inverse directement. (Dans le cas d'une autre symétrie, la dualité, on peut très facilement vérifier celle-ci sur l'expression explicite d'Onsager [22], dans le cas du modèle d'Ising bidimensionnel). Une telle vérification est évidemment possible ; prenons tout d'abord le cas du modèle de Potts ferromagnétique anisotrope sur réseau carré à la température critique. Les paramètres initiaux du modèle sont les

exponentielles des constantes de couplage  $b = e^{K_1}$   $c = e^{K_2}$ . Si l'on effectue le changement de variable suivant  $q_{\pm} = 1 \mp \frac{q}{2} \pm \sqrt{q(q-4)}$   $x = \frac{b-q_+}{b-q_-}$ ,  $y = \frac{c-q_+}{c-q_-}$  les transformations d'inverse et de symétrie prennent la forme simple

$$I : (x, y) \rightarrow \left( \frac{1}{x}, \frac{q_+^2}{y} \right)$$

$$S : (x, y) \rightarrow (y, x)$$

Dans ces variables la condition de criticalité du ferromagnétique  $(b-1)(c-1) = q$  s'écrit  $xy = -q_+$ . La fonction de partition par site peut donc être vu comme fonction d'une seule variable  $Z(x)$  ; les relations d'inverse et de symétrie s'écrivent respectivement

$$Z(x) \cdot Z\left(\frac{1}{x}\right) = (-qq_+) \cdot \frac{\left(1 + \frac{x}{q_+}\right)\left(1 + \frac{1}{q_+x}\right)}{(1-x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

$$Z(x) = Z\left(-\frac{q_+}{x}\right)$$

On vérifie immédiatement que la solution de Baxter et al [23] satisfait, lorsqu'on la réécrit sous forme de produit, les équations précédentes :

$$Z(x) = \sqrt{-qq_+} \frac{A(x) A\left(-\frac{q_+}{x}\right)}{A(-q_+x) A\left(\frac{q_+^2}{x}\right)}$$

où

$$A(x) = \frac{\prod_{n=0}^{\infty} (1+q^{2n-1} \cdot x)}{\prod_{n=0}^{\infty} (1-q_+^{2n} \cdot x)}$$

La fonction de partition du modèle de Potts antiferromagnétique critique ayant été calculée récemment, on peut se demander si elle satisfait également les équations d'inverse. La condition de criticalité de l'antiferromagnétique devient  $(b+1)(c+1) = 4-q$  (valable seulement pour  $0 < q < 4$ ) qui s'écrit dans nos variables  $xy = q_+$ . La symétrie devient donc  $S : x \rightarrow \frac{q_+}{x}$ , l'inverse restant  $I : x \rightarrow \frac{1}{x}$ . La fonction de partition, pour les mêmes raisons qui nous avaient amené à l'écrire comme un produit infini sur le groupe infini engendré par les deux évolutions I et S, doit être la

même que celle du ferromagnétique mais où l'on a formellement changé  $q_+$  en  $-q_+$ . On vérifie sur l'expression explicite donnée par Baxter [24] que tel est bien le cas. Au passage nous constatons que les considérations, que nous avons développées sur l'existence du groupe infini précédent, non seulement ont des conséquences pratiques tout à fait tangibles, mais de plus fournissent une façon unifiée de considérer le modèle de Potts critique qu'il soit ferromagnétique ou antiferromagnétique, alors que d'autres arguments sur le modèle de Potts antiferromagnétique tendraient plutôt à les distinguer comme différent du ferromagnétique au niveau de leur physique (dégénérescence de l'état de base...).

Dans le cas du modèle de Potts critique sur réseau triangulaire la fonction de partition s'écrit :

$$Z(x,y,z) = (-qq_+)^{1/2} \cdot \frac{A(x)}{A\left(\frac{q_+^2}{x}\right)} \frac{A(y)}{A\left(\frac{q_+^2}{y}\right)} \frac{A(z)}{A\left(\frac{q_+^2}{z}\right)}$$

avec (condition de criticalité)  $xyz = (-q_+)^2$ .

Lorsque l'une des interactions tend vers zéro on a (par exemple)  $z \rightarrow -q_+$  et l'on retrouve bien la condition de criticalité du modèle de Potts sur réseau carré et la fonction de partition du réseau carré.

L'équation d'inverse s'écrit

$$Z(x,y,z) \cdot Z\left(\frac{1}{x}, \frac{q_+^2}{y}, \frac{q_+^2}{z}\right) = (-qq_+) \frac{\left(1 + \frac{x}{q_+}\right)\left(1 + \frac{1}{q_+x}\right)}{(1-x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

avec  $xyz = (-q_+)^2$

On vérifie là encore la relation d'inverse tout comme on aurait pu le faire également pour le réseau hexagonal ; dans ce dernier cas il faut remplacer la condition de criticalité par  $xyz = -q_+$ . La fonction de partition n'est autre que la fonction de partition du réseau triangulaire où l'on a remplacé  $x \rightarrow -\frac{q_+}{x}$   $y \rightarrow -\frac{q_+}{y}$   $z \rightarrow -\frac{q_+}{z}$  (au passage lorsque  $z \rightarrow -q_+$  on vérifie sur la fonction de partition que le modèle se ramène à des chaînes unidimensionnelles découplées). L'équation d'inverse

s'écrit avec  $xyz = -q_+$

$$Z(x,y,z) \cdot Z\left(\frac{q_+^2}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) = (-qq_+)^2 \cdot \frac{\left(1 + \frac{y}{q_+}\right)\left(1 + \frac{1}{q_+y}\right)}{(1-y)\left(1 - \frac{1}{y}\right)} \frac{\left(1 + \frac{z}{q_+}\right)\left(1 + \frac{1}{q_+z}\right)}{(1-z)\left(1 - \frac{1}{z}\right)}$$

#### 4.2. Les modèles à vertex

Dans le cas du modèle à six vertex, en utilisant l'uniformisation trigonométrique usuelle sur les paramètres du modèle :

$$a = \rho \sin(2\eta - \lambda\theta), \quad b = \rho \sin \lambda\theta, \quad c = \rho \sin 2\eta,$$

$d=0$ , nous avons les relations d'inverse et de symétrie suivantes :

$$Z(\theta) \cdot Z(-\theta) = \rho^2 \sin(2\eta - \lambda\theta) \sin(2\eta + \lambda\theta)$$

$$Z(\theta) = Z(2\eta - \lambda\theta)$$

ou bien en définissant la fonction  $z(\theta)$  "sans dimension"  $z(\theta) = \frac{Z(\theta)}{c}$ , nous avons les deux équations :

$$z(\theta) z(-\theta) = \frac{\sin(2\eta - \lambda\theta) \sin(2\eta + \lambda\theta)}{\sin^2 2\eta} = \frac{\sin^2 2\eta - \sin^2 \lambda\theta}{\sin^2 2\eta} = 1 - \frac{b^2}{c^2}$$

$$z(\theta) = z(2\eta - \lambda\theta)$$

Nous avons déjà noté l'identification formelle complète existant entre les relations précédentes et les équations de Watson (unitarité + crossing) sur la matrice  $S$  du modèle de Sine-Gordon en dimension 1+1 (Séminaire E.N.S. 1979-1980 Exposé N°2). Le lecteur peut se reporter à l'un des nombreux articles sur la matrice  $S$  du modèle de Sine-Gordon pour vérifier la pertinence de l'équation d'inverse<sup>[25]</sup>. Le dictionnaire à appliquer est le suivant :

|                                       |                       |                                |
|---------------------------------------|-----------------------|--------------------------------|
| fonction $z$                          | $\longleftrightarrow$ | inverse de la matrice $S$      |
| paramètre spectral $\theta$           | $\longleftrightarrow$ | paramètre de rapidité $\theta$ |
| relation d'inverse                    | $\longleftrightarrow$ | relation d'unitarité           |
| symétrie de rotation<br>de $90^\circ$ | $\longleftrightarrow$ | crossing                       |

Signalons que dans le cas du modèle à 6 vertex, il existe trois grands domaines analytiques. En posant  $\Delta = \cos 2\eta$ :  $|\Delta| < 1$ ,  $\Delta < -1$  et  $\Delta \geq 1$ . La correspondance modèle six vertex-matrice S Sine Gordon relève du domaine  $|\Delta| < 1$ . On peut également vérifier la relation d'inverse pour  $\Delta < -1$  sur l'expression explicite de la fonction de partition. Le troisième domaine est quelque peu pathologique, il correspond à une phase dite "gelée". La fonction de partition prend alors la forme suivante  $-\beta f = \log a$ , qui vérifie encore la relation d'inverse. Par contre dans cette phase la symétrie  $a \leftrightarrow b$  (qui était le crossing dans la correspondance précédente) est brisée. Il est intéressant de voir la relation d'inverse persister là où disparaît une symétrie beaucoup plus naturelle, alors que cette relation d'inverse est à priori plus sujette à caution.

Toujours dans le cadre des modèles à vertex, l'équation d'inverse sur l'expression exacte de la fonction de partition du modèle à huit vertex symétrique demande à être vérifiée. En effet lorsque R.J. Baxter a donné la solution exacte de ce modèle le concept de relation d'inverse n'existait pas. (Seuls existaient les notions de relation triangle-étoile généralisée et l'ansatz de Bethe). Pour ce faire nous reprenons (en rappelant les notations et l'uniformisation elliptique) la forme factorisée sous forme de produit infini qu'il a obtenu dans ce qu'il a appelé un "développement en perturbation" dans son article d'Annals of Physics [11].

Une uniformisation elliptique est introduite sur les paramètres du modèle :

$$a = \rho \cdot \theta(2\eta) \cdot \theta(v-\eta) \cdot H(v+\eta)$$

$$b = \rho \cdot \theta(2\eta) \cdot H(v-\eta) \cdot \theta(v+\eta)$$

$$c = \rho \cdot H(2\eta) \cdot \theta(v-\eta) \cdot \theta(v+\eta)$$

$$d = \rho \cdot H(2\eta) \cdot H(v-\eta) \cdot H(v+\eta)$$

$K, K'$  désignant les deux périodes des fonctions elliptiques intervenant ici nous posons  $x = e^{i\pi\eta/K}$ ,  $z = e^{i\pi v/K}$ ,  $q = e^{-\pi K'/K}$ . Nous avons

$$H(v) = 2 \gamma q^{1/2} \operatorname{sh}(-1/2 \ln z) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}z)(1-q^{2n}/z)$$

$$\theta(v) = \gamma \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n-1}z)(1-q^{2n-1}/z)$$

$$\gamma = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})$$



L'inverse correspond à la transformation  $z \rightarrow x^2/z$  ou  $v \rightarrow -v$  la symétrie à  $z \rightarrow 1/z$  ou  $v \rightarrow 2\eta-v$ . R.J. Baxter introduit les fonctions suivantes :

$$A(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^n z)$$

$$F(z) = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{A(x^{4m+1}z)}{A(x^{4m+3}z)}$$

La fonction de partition du modèle à 8 vertex symétrique s'écrit alors

$$Z(z) = A\left(\frac{qz}{x}\right) \cdot A\left(\frac{q}{xz}\right) \cdot \frac{F(x^2z) \cdot F(x^2/z)}{F(qz) \cdot F(q/z)} \cdot \frac{c}{-\rho H(\lambda)}$$

On vérifie aisément que celle-ci satisfait l'équation d'inverse suivante :

$$Z \cdot Z_I = Z(z) \cdot Z(x^2/z) = A(xz)A(x^3/z) A\left(\frac{qz}{x^3}\right) A(q/xz) \\ \times \frac{c \cdot c_I}{(-\rho H(\lambda))^2}$$

Le terme de droite peut encore être écrit :

$$4\gamma^4 \frac{q}{x^2} \cdot \theta(-\eta-v) \theta(v-3\eta) H(-\eta-v) H(v-3\eta) \\ = 4\gamma^4 \frac{q}{x^2} \cdot \theta(-\eta-v) \theta(v-3\eta) \cdot \frac{H^2(\lambda) \theta^2(v-\eta)}{\theta^2(0)} \cdot \left(1 - \frac{\text{sn}^2(v-\eta)}{\text{sn}^2 \lambda}\right) \\ = c \cdot c_I \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 - \frac{b}{c}\right)$$

$1 - \frac{b^2}{c^2}$  est effectivement le facteur d'inverse que l'on obtient lorsque l'on extrait le facteur  $c$  pour le calcul de l'inverse de la matrice  $L_n$  :

$$\begin{pmatrix} a/c & 0 & 0 & d/c \\ 0 & b/c & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b/c & 0 \\ d/c & 0 & 0 & a/c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & X \\ 0 & -b/c & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -b/c & 0 \\ X & 0 & 0 & X \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans l'exemple du modèle de Potts, en utilisant la notation  $f_g(x) = f(g(x))$  et en notant I et S l'inverse et la symétrie nous avons les deux équations

$$Z = Z_S$$

$$Z \cdot Z_I = L \cdot L_I$$

d'où l'expression pour la fonction de partition

$$Z = \frac{B \cdot B_S}{B_{SI} \cdot B_{SIS}} \quad \text{ou} \quad B = \prod_{n=0}^{\infty} L_{(SI)^{2n}}$$

Dans l'exemple du modèle de Baxter on vérifie facilement que l'on retrouve bien à l'aide de cette procédure l'expression de la fonction de partition si l'on prend pour L l'expression suivante :

$$L = A(xz) A\left(\frac{qz}{x}\right)$$

Cependant lorsque l'on regarde le facteur  $A(xz) A(x^3/z) A(qz/x^3) A(q/xz)$  on constate qu'il y a plusieurs façon de "couper en deux" ce facteur afin de le voir comme un produit  $L \cdot L_I$  : le bon choix correspond à une factorisation du type Wiener-Hopf où l'on aura un produit de deux termes qui sont chacun analytiques dans deux domaines disjoints. Un choix tel que  $L = A(xz) A(q/xz)$  est donc à rejeter.

#### 4.3) Le modèle d'Ising et le modèle gaussien

Le modèle d'Ising bidimensionnel est un autre exemple fameux de modèle complètement intégrable. Nous pouvons vérifier l'équation d'inverse sur ce modèle en le considérant comme un cas particulier du modèle à huit vertex symétrique (en rendant nul le terme d'interaction à quatre spins).

Nous avons vu que cela nous amenait à considérer une uniformisation elliptique quelque peu fastidieuse. Aussi nous allons donner non pas une démonstration, mais ce qui doit être considéré là aussi comme un simple argument heuristique en faveur de la vérification de l'équation d'inverse à partir de l'expression la plus popularisée de la fonction de partition :

$$\ln Z = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_0^{2\pi} dq_1 dq_2 \cdot \ln (C_1 C_2 - S_1 \cos q_1 - S_2 \cos q_2)$$

où  $C_1 = \text{ch } 2K_1$   $C_2 = \text{ch } 2K_2$   $S_1 = \text{sh } 2K_1$   $S_2 = \text{sh } 2K_2$ .

Faisons le changement de variable  $q_1 = \frac{\theta}{2} + \omega$   $q_2 = \frac{\theta}{2} - \omega$  nous obtenons

$$\begin{aligned} \ln Z &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta d\omega. \ln \left[ C_1 C_2 - \left[ (S_1 + S_2) \cos \frac{\theta}{2} \right] \cos \omega - \left[ (S_2 - S_1) \sin \frac{\theta}{2} \right] \sin \omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta. \ln \left[ C_1 C_2 + (1 + S_1^2 S_2^2 + 2 S_1 S_2 \cos \theta)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

Nous avons utilisé l'identité bien connue

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega. \ln(a + b \cos \omega + c \sin \omega) = \ln \frac{1}{2} [a + (a^2 - b^2 - c^2)^{1/2}]$$

La transformation d'inverse s'écrit sur les paramètres du modèle

$$K_1 \rightarrow K_1 + i\pi/2 \quad K_2 \rightarrow -K_2 \quad \text{ou bien} \quad C_1 \rightarrow -C_1 \quad S_1 \rightarrow -S_1 \quad C_2 \rightarrow C_2 \quad S_2 \rightarrow -S_2.$$

La relation d'inverse s'écrit

$$\begin{aligned} \ln Z(K_1, K_2) + \ln Z(K_1 + i/2, -K_2) \\ &= \int d\theta \ln [C_1 C_2 + (1 + S_1^2 S_2^2 + 2 S_1 S_2 \cos \theta)^{1/2}] + \int d\theta \ln [-C_1 C_2 + (1 + S_1^2 S_2^2 + 2 S_1 S_2 \cos \theta)^{1/2}] \\ &= \frac{1}{2} \int d\theta. \ln (-S_1^2 - S_2^2 + 2 S_1 S_2 \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} (-S_1^2 - S_2^2 + [(S_1^2 - S_2^2)^2]^{1/2}) = \frac{1}{2} \ln (-4S_1^2) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} \ln (-4S_2^2) \end{aligned}$$

(en réutilisant l'identité précédente une nouvelle fois avec  $c=0$ ).

On retrouve donc, par ce calcul très naïf, les facteurs correspondants aux deux transformations d'inverse :  $(K_1, K_2) \rightarrow (K_1 + i\pi/2, -K_2)$  et  $(-K_1, K_2 + i\pi/2)$  à savoir  $2i \text{ sh } 2K_1$  et  $2i \text{ sh } 2K_2$ .

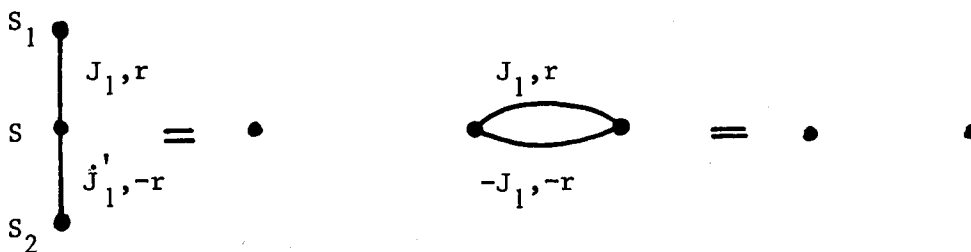
Parmi tous les modèles que l'on sait résoudre exactement, il est une classe qui revêt une importance toute particulière : ce sont les modèles gaussiens. En dimension deux le modèle gaussien admet une relation star-triangle comme tous les modèles complètement intégrables usuels. Celle-ci

a les conséquences habituelles des relations de Yang-Baxter, entre autre l'existence d'une famille de matrices de transfert qui commutent (bien que dans ce cas les états de spins n'étant plus en nombre fini, ce sont des éléments de la droite réelle  $\mathbb{R}$ , on hésite à parler de matrice pour de tels objets). Cependant ce modèle ne semble pas admettre de relation d'inverse.

La fonction de partition du modèle gaussien anisotrope sur réseau carré est la suivante :

$$Z = \int \prod_i dS_i \prod_{\langle ij \rangle} e^{J_1 S_i S_j} \prod_{\langle jk \rangle} e^{J_2 S_j S_k} \prod_i e^{-r S_i^2}$$

où toutes les variables  $S_i$  attachées à chaque site doivent être intégrées de  $-\infty$  à  $+\infty$ , les produits étant effectués sur toutes les liaisons horizontales et verticales du réseau carré,  $J_1$  et  $J_2$  étant les constantes de couplage de ces liaisons horizontales et verticales. Les relations locales qui servent de base à la démonstration globale de la relation d'inverse seraient les suivantes :



Le modèle correspondant à l'inverse n'est plus défini : on n'a plus une intégrale gaussienne, puisque l'on passe de  $r$  à  $-r$ . Cette approche semblant échouer on peut rechercher la transformation d'inverse d'une autre manière en remarquant que lorsqu'on effectue l'intégrale gaussienne (en effectuant une double transformée de Fourier pour profiter de l'invariance par translation du réseau) on obtient, à des facteurs additifs et multipli-

catifs près,

$$\int dq_1 dq_2 \ln \left( 1 - \frac{J_1}{r} \cos q_1 - \frac{J_2}{r} \cos q_2 \right)$$

expression qui est formellement identique à la fonction de partition du modèle d'Ising bidimensionnel à condition d'écrire

$$\frac{J_1}{r} = \frac{S_1}{C_1 C_2} \quad \frac{J_2}{r} = \frac{S_2}{C_1 C_2}$$

Une relation d'inverse existant sur ce dernier modèle on peut chercher quel en est la traduction sur les paramètres du modèle gaussien. On trouve que ceux-ci restent inchangés. La relation d'inverse n'est pas visible sur le modèle gaussien, du moins pas de cette manière puisqu'elle se trivialise (dans ces paramètres insistons sur ce point) pour donner la transformation identité. Signalons au passage que la transcription sur les paramètres du modèle gaussien de la dualité du modèle d'Ising nous donne l'échange entre  $J_1$  et  $J_2$  (symétrie par rapport à une bissectrice).

Nous terminons là l'énumération des modèles admettant ou n'admettant pas de relation d'inverse.

Nous sommes amenés à constater l'extraordinaire variété et le nombre considérable de modèles admettant une telle relation (et nous n'avons nullement cherché à être exhaustif, le lecteur pourra chercher et découvrir bien d'autres modèles possédant une telle relation d'inverse). Si l'on compare le nombre de modèles possédant ce que l'on appelle une self-dualité\* (la dualité de Kramers-Wannier ou une de ces généralisations transforme le modèle dans le même modèle ou simplement les paramètres de celui-ci on été modifié de façon connue) au nombre de modèles admettant une relation d'inverse, nous sommes amenés à constater que la densité de ces derniers modèles semble bien supérieure. Ce dernier point est somme toute assez encourageant car les systèmes admettant une relation d'inverse sont, nous l'avons vu, beaucoup plus contraints que les systèmes self duaux : du fait de l'incompatibilité relative entre la relation d'inverse et les divers symétries du modèle (qui engendre en général un groupe

---

\* qui font toujours l'objet d'une littérature abondante et régulière

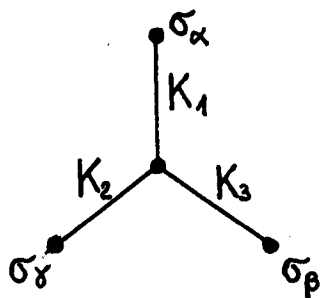
discret infini de transformation sur les paramètres) on peut, connaissant la valeur de la fonction de partition en un point, déduire celle-ci en un nombre infini de points, ce qui apparaît comme assez contraignant. La dualité par contre apparaît, elle, par contre comme trop compatible avec les autres symétries du modèle. Elle engendre avec celles-ci un groupe fini de transformation : de ce point de vue elle apparaît comme une information assez faible du type "parité d'une fonction".

## B. RELATIONS D'INVERSE SUR LES FONCTIONS DE CORRELATIONS

### 1) RELATIONS FONCTIONNELLES SUR LES FONCTIONS DE CORRELATIONS

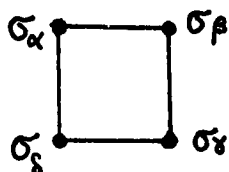
Il est des disciplines comme la théorie des champs qui sont très demandereses de relations entre fonctions de Green (fonctions de corrélations). Les relations concernant les fonctions de corrélations en mécanique statistique sont de plusieurs types : on trouve dans la littérature, des relations linéaires sur les fonctions de corrélations telles que par exemple la relation trouvée par Fisher<sup>[26][27]</sup> sur le modèle d'Ising sur réseau triangulaire

$$\langle \sigma_\alpha \sigma_\delta \rangle = a + b \langle \sigma_\alpha \sigma_\beta \rangle + c \langle \sigma_\alpha \sigma_\gamma \rangle + d \langle \sigma_\gamma \sigma_\beta \rangle \quad (1)$$



$a, b, c, d$ , sont des fonctions simples de  $e^{K_1}$ ,  $e^{K_2}$  et  $e^{K_3}$ .

On trouve également<sup>[28][29][30]</sup> d'autres relations non linéaires celles-ci, mais dont les coefficients intervenants dans ces équations sont +1 ou -1. Ces équations ont un air de famille avec le théorème de Wick. Par exemple sur réseau carré on a



$$\begin{aligned} \langle \sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\gamma \sigma_\delta \rangle &= \langle \sigma_\alpha \sigma_\beta \rangle \langle \sigma_\gamma \sigma_\delta \rangle \\ &+ \langle \sigma_\alpha \sigma_\delta \rangle \langle \sigma_\beta \sigma_\gamma \rangle - \langle \sigma_\alpha \sigma_\gamma \rangle \langle \sigma_\beta \sigma_\delta \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

La particularité de ces équations est qu'elles existent de façon extrêmement générales que le modèle soit avec un champ magnétique, pratiquement quelques soient le réseau et les constantes de couplages ou les interactions sans se soucier d'aucune idée de fermions libres ou pas : en fait ce qui fait "marcher" ces relations est essentiellement le fait que les spins appartiennent à  $\mathbb{Z}_2$ . Il existe encore des relations qui relient les fonctions de corrélations du modèle et du modèle dual qu'elles soient linéaires comme la relation sur réseau carré bien connue

$$\langle \sigma_\alpha \sigma_\beta \rangle = \text{Ch} 2K - \text{sh} 2K \langle \mu_i \mu_j \rangle$$

où  $\langle \alpha\beta \rangle$  et  $\langle ij \rangle$  sont deux liaisons duales l'une de l'autre, ou non linéaires comme les équations obtenues par Perk [31]. Mc Coy [32] a développé et intégré les équations de Perk dans un ensemble d'équations non linéaires portant sur différentes fonctions de corrélations (fonctions de corrélations à deux points pour différentes distances entre les deux points). Ces équations dans la limite du continu redonnent les fameuses équations transcendantes de Painlevé, elles peuvent donc être considérées comme des généralisations aux différences finies des équations non linéaires traduisant les conditions de déformations isomonodromiques d'un système linéaire.

Ceci referme une parenthèse qui s'était ouverte par des remarques de Mc Coy et T.T. Wu [33] sur l'apparition dont la limite du continu, sur le modèle d'Ising bidimensionnel des transcendantes de Painlevé, et avait initié toute une série importante de travaux, par essentiellement Sato, Miwa et Jimbo<sup>[34]</sup>, sur l'application de ces idées d'isomonodromie à la physique et notamment, et surtout, sur le modèle d'Ising bidimensionnel dans la limite de scaling. Ils ont ainsi pu obtenir un ensemble considérable d'informations sur les fonctions de Green du modèle d'Ising à la limite du continu. Ce succès remarquable reste cependant limité car les travaux de Sato, Miwa, Jimbo ont été conduits dans un formalisme utilisant très étroitement les notions d'algèbre de Clifford (notamment les propriétés d'exponentiations bien connues dans la théorie des Pfaffiens). Ces résultats bien qu'extrêmement complets sont trop associés à la notion de fermions libres. Il n'est pas exclu que les concepts d'isomonodromie puissent s'appliquer à des problèmes complètement intégrables et fournir des relations et des informations précieuses sur les fonctions de corrélations



comme semble le suggérer le fait que par exemple (entre autres) l'équation de Sine Gordon classique (et non plus quantique) donne l'équation Painlevé III lorsqu'on effectue une transformation de self-similarité [35]. De plus, la plus simple des équations de Perk peut être obtenue en associant l'équation (2) et des équations linéaires à coefficients simples dans les constantes de couplages. Or ni les équations du type (2) ni les équations linéaires du type (1) n'ont besoin pour exister d'une quelconque supposition de fermions libres. Un certain espoir est donc permis mais les difficultés techniques semblent considérables. L'école soviétique s'attache à obtenir des résultats sur les fonctions de corrélations mais en s'appuyant sur le formalisme d'inverse scattering ; ils se placent donc dans le cadre restreint des modèles complètement intégrables (qui correspondent néanmoins à des fermions en interactions). Il semble qu'il soit possible d'obtenir des résultats dans les cas les plus simples tels que Schrödinger non linéaire ou le modèle XXX [36], cependant là aussi les difficultés techniques semblent importantes. De toute manière on reste limité à des modèles complètement intégrables ou carrément à des théories libres.

## 2) RELATIONS D'INVERSE SUR LES FONCTIONS DE CORRELATIONS

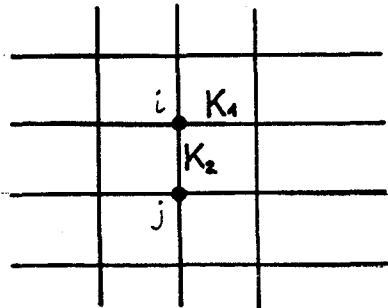
### 2.1) Exemples de relations d'inverse sur les fonctions de corrélations

Comme nous avons vu précédemment que la notion de relation d'inverse permettait d'obtenir des relations intéressantes et contraignantes sur des modèles plus généraux, semble-t-il, que les modèles complètement intégrables, on peut se poser la question de savoir si cette même notion ne peut avoir comme conséquences des relations exactes sur les fonctions de corrélations des modèles. Nous allons voir que tel est bien le cas. Considérons pour commencer les cas les plus simples qui dérivent d'équation déjà écrites sur les fonctions de partition. Par exemple de l'équation d'inverse sur la fonction de partition sur réseau carré.

$$\ln Z(K_1, K_2) + \ln Z(K_1 + i\pi/2, -K_2) = \ln(2 \sinh 2K_1)$$

nous obtenons en dérivant par rapport à  $K_2$  l'équation sur la fonction de corrélation entre plus proches voisins

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle (K_1, K_2) = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle (K_1 + i\pi/2, -K_2)$$



On peut, tout comme pour les fonctions de partition, effectuer une vérification à l'aide d'une diagrammatique résommée. Par exemple à l'ordre le plus bas nous avons en posant  $t_2 = \text{th } K_2$  et  $t_1 = \text{th } K_1$

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} t_2 \frac{t_1^2}{1-t_1^2}, \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} t_2 \frac{t_1^2}{1-t_1^2} \bullet t_2$$

soit au total  $t_2 \frac{1+t_1^2}{1-t_1^2}$  ce premier terme est bien invariant par  $t_2 \rightarrow -t_2$

$t_1 \rightarrow \frac{1}{t_1}$ . Le terme suivant en  $t_2^3$  s'écrit, comme une inspection rapide des diagrammes permet de s'en convaincre, comme

$$t_2^3 \frac{a + b t_1^2 + c t_1^4 + d t_1^6}{(1-t_1^2)^3}$$

La singularité la plus forte étant obtenue avec le diagramme



Si la relation d'inverse est vérifiée on a alors  $a=d, b=c$ . L'inspection des diagrammes en  $t_2^3 t_1^2$   au nombre de 4 et l'absence de diagrammes en  $t_2^3$  nous donne  $a=0, b=4$ . La vérification directe de ce résultat bien que fastidieuse peut être effectuée.

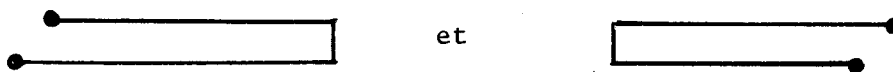
Un autre exemple simple nous est fournit par l'équation d'inverse sur la fonction de partition du réseau triangulaire, nous avons

$$\ln Z(K_1, K_2, K_3) + \ln Z(K_1 + i\pi/2, -K_2 - K_3) = \ln 2 \sinh 2K_1$$

d'où en dérivant par rapport à  $K_3$  pour  $K_3 = 0$ , l'équation sur la fonction de corrélation entre plus proches voisins

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle(K_1, K_2) = \langle \sigma_i \sigma_k \rangle(K_1 + i\pi/2, K_2)$$

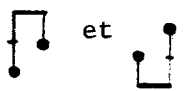
A l'ordre le plus bas nous avons les deux diagrammes


 et

qui donnent  $\frac{2t_1 t_2}{1 - t_1^2}$ .

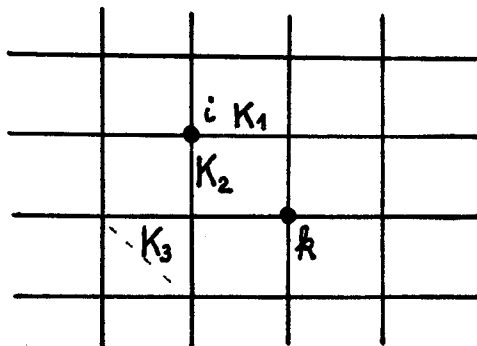
Le terme suivant en  $t_2^3$  s'écrit

$$t_2^3 \frac{(at_1 + bt_1^3 + ct_1^5)}{(1 - t_1^2)^3}$$

La relation d'inverse implique que les coefficients  $a$  et  $c$  sont égaux. De l'existence de deux seuls diagrammes  $t_1 t_2^3$   on tire la valeur de  $a$  :  $a = 2$ .

A cette équation fonctionnelle on peut, du fait de la symétrie de la fonction de corrélation, adjoindre la relation de symétrie

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle(K_1, K_2) = \langle \sigma_i \sigma_k \rangle(K_2, K_2)$$



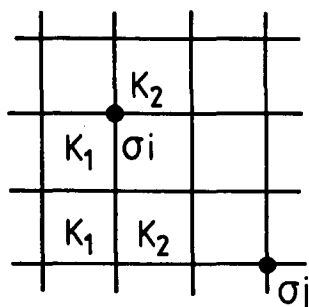
Il est alors intéressant d'effectuer le parallèle avec le couple équation d'inverse et équation de symétrie sur la fonction de partition. Nous pouvons également écrire la fonction de corrélation entre plus proches voisins sous la forme

$$\sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{t_2^{2\ell-1} \cdot t_1 P_{\ell}(t_1^2)}{(1-t_1^2)^{2\ell-1}}$$

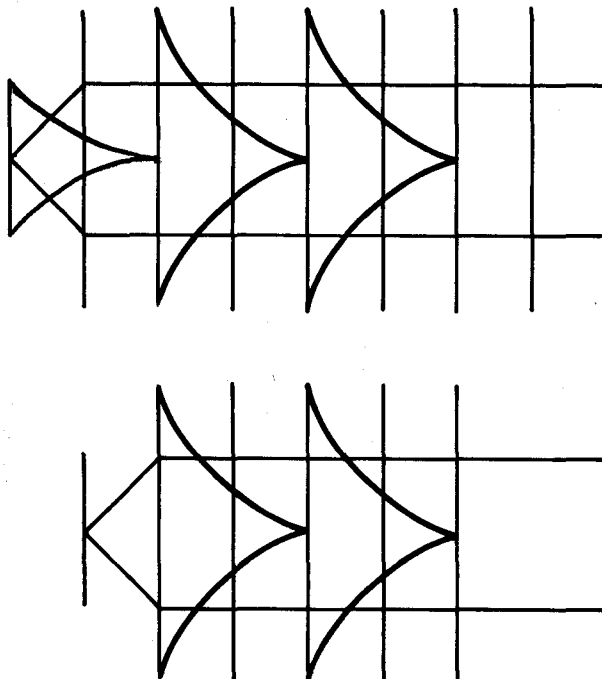
où  $P_{\ell}$  est un polynôme de degré  $2\ell-2$ . Dans le cas de la fonction de partition il est possible de voir que l'équation d'inverse adjointe à la symétrie déterminerait celle-ci entièrement de façon unique. Nous voyons ici que, déjà pour  $\ell = 2$ , le coefficient du milieu du polynôme  $P_{\ell}$  en l'occurrence  $b$  ne peut être déterminé par l'inverse. Il faut l'introduire "à la main" en calculant le coefficient en  $t_1^3 t_2^3$  si l'on désire avoir toute la fraction rationnelle correspondant à l'ordre  $t_2^3$ .

Nous voyons donc, qu'à la différence de la fonction de partition, les fonctions de corrélations diagonales ne semblent pas pouvoir être déterminées par l'équation d'inverse jointe à la symétrie géométrique  $K_1 \leftrightarrow K_2$ .

Considérons toujours les fonctions de corrélations diagonales avec le premier exemple non trivial :







En itérant ces égalités nous obtiendrons une certaine relation entre matrice de transfert

$$T(K_1, K_2, K) \cdot \hat{T}(K_1 + i\pi/2, -K_2, -K) = (2i \operatorname{sh} 2K_1)^M$$

qui nous permettra d'argumenter en faveur de l'équation fonctionnelle

$$\ln Z(K_1, K_2, K) + \ln Z(K_1 + i\pi/2, -K_2, -K) = 2i \operatorname{sh} 2K_1$$

et par dérivation par rapport à  $K$  à  $K = 0$  :

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle(K_1, K_2) = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle(K_1 + i\pi/2, -K_2)$$

à laquelle il est possible d'adjoindre l'équation

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle(K_1, K_2) = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle(K_2, K_1)$$

Diagrammatiquement nous avons à l'ordre le plus bas

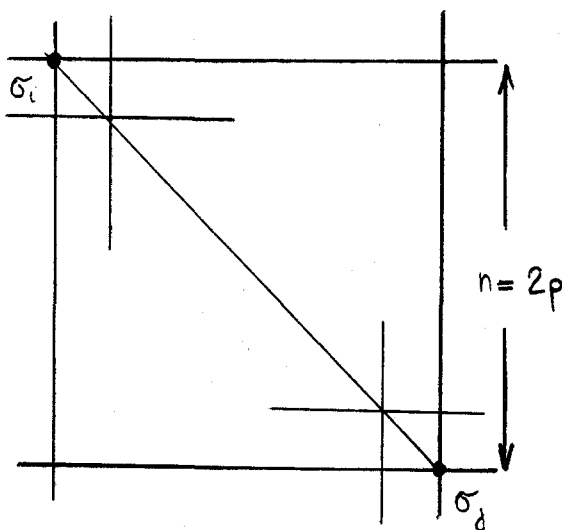
$$t_2^2 \frac{a t_1^2}{(1 - t_1^2)^2} \quad \text{avec } a = 6$$

à l'ordre suivant nous avons

$$t_2^4 \cdot \frac{bt_1^2 + ct_1^4 + bt_1^6}{(1-t_1^2)^4}$$

Du fait de la symétrie entre  $K_1$  et  $K_2$  nous obtenons  $b=12$ , mais le coefficient intermédiaire  $c$  ne peut être déduit ni de l'inverse ni de la symétrie. Là encore à la différence du cas plus simple de la fonction de partition du modèle d'Ising bidimensionnel, l'inverse et la symétrie ainsi que des hypothèses d'analyticité (les singularités en  $t_1$ ) ne suffisent pas à déterminer entièrement la quantité en question.

De façon générale le raisonnement précédent peut être étendu. On distinguera néanmoins les fonctions de corrélations diagonales selon que la différence des coordonnées horizontales de  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  sont paires ou impaires. Dans le cas paire nous avons à l'ordre le plus bas



$$t_2^n \cdot \left( \frac{a_1 t_1^2 + a_2 t_1^4 + \dots + a_1 t_1^{2(n-1)}}{(1-t_1^2)^n} \right)$$

Il est évident qu'il n'y a pas de termes en  $t_2^n t_1^p$  pour  $p < n$  d'où  $a_p = 0$  pour  $p = 1, \dots, n$ .

L'ordre le plus bas vaut donc

$$\frac{a_n \cdot t_2^n t_1^n}{(1-t_1^2)^n} \text{ où } a_n \text{ désigne le nombre de façon}$$

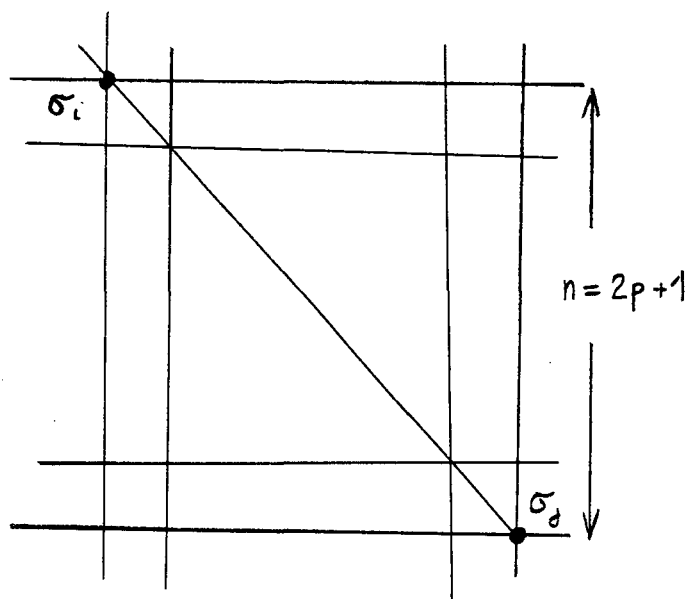
d'aller de  $i$  à  $j$  par des chemins de longueur  $2n$  soit  $\binom{2n}{n}$ .

A l'ordre suivant nous devons avoir

$$t_2^{n+2} \cdot \left( \frac{b_n t_1^n + c_n t_1^{n+2} + b_n t_1^{n+4}}{(1-t_1^2)^{n+2}} \right)$$

avec  $b_n = na_n$  le coefficient  $c_n$  ne peut être déterminé ni du fait de la symétrie entre  $t_1$  et  $t_2$  ni du fait de l'inverse.

Dans le cas impair nous avons à l'ordre le plus bas



$$t_2^n \cdot \frac{(a_1 t_1 + a_2 t_1^3 + \dots + a_1 t_1^{2n-1})}{(1-t_1^2)^n}$$

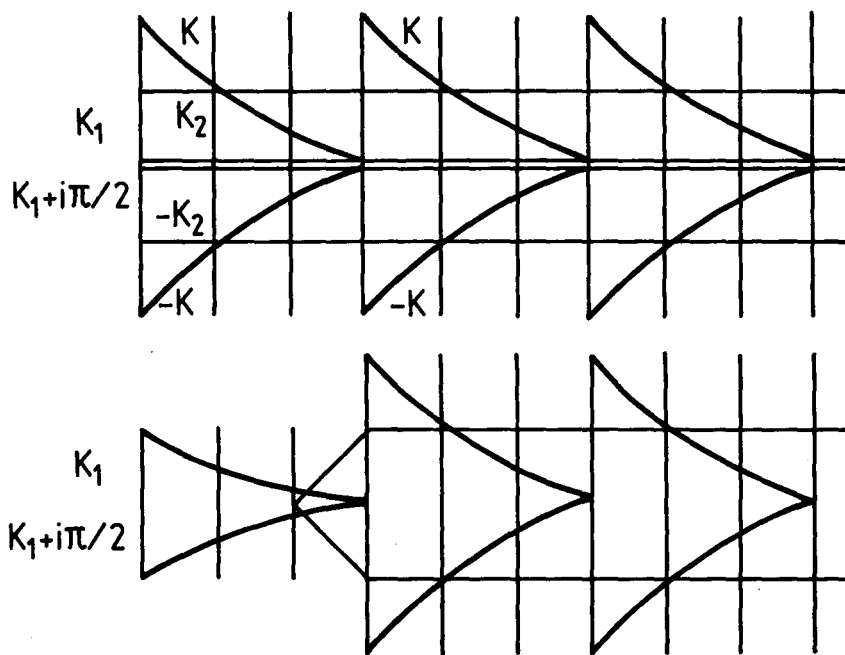
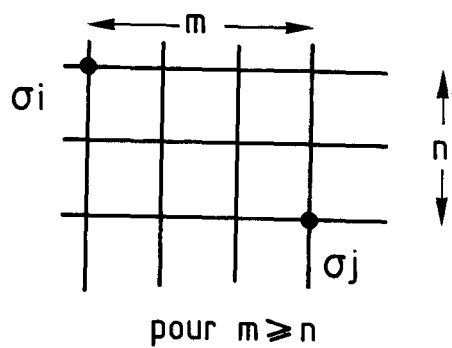
Là également du fait qu'il n'existe pas de termes  $t_2^n t_1^p$  pour  $p < n$ , nous voyons que le terme d'ordre le plus bas vaut

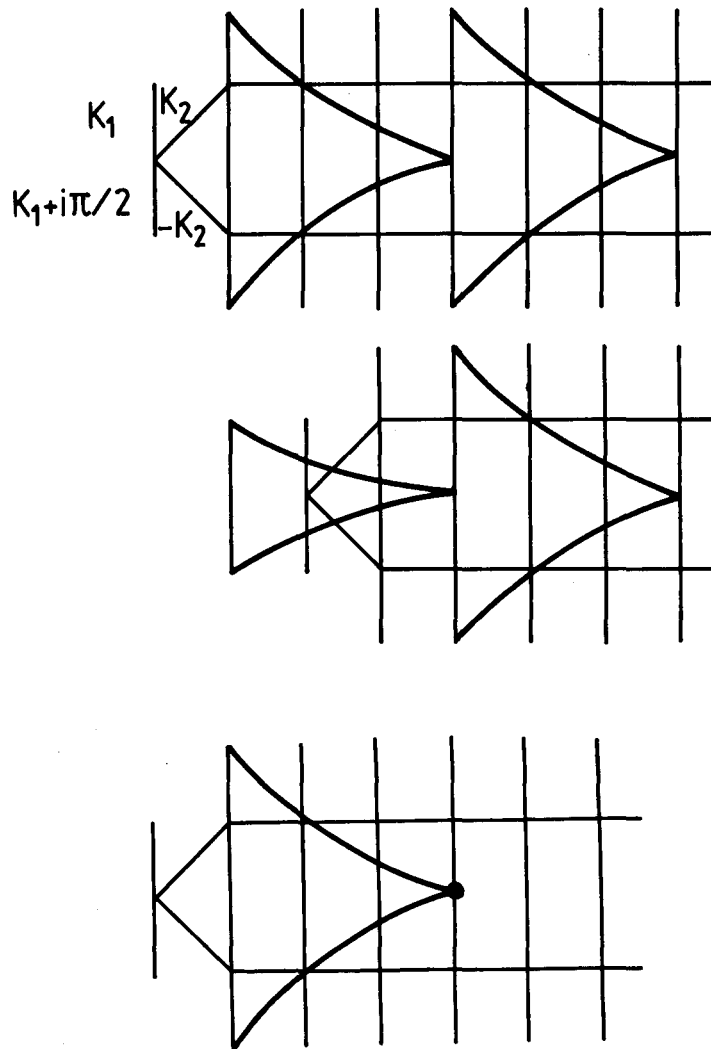
$$a_n \frac{t_1^n t_2^n}{(1-t_1^2)^n} \text{ comme dans le cas } n=2p.$$

Considérons maintenant l'exemple suivant où l'on prendra  $m=3$ ,  $n=2$  (mais on se convaincra aisément que les égalités entre motifs s'étendent



pour  $m \geq n$  quelconques)



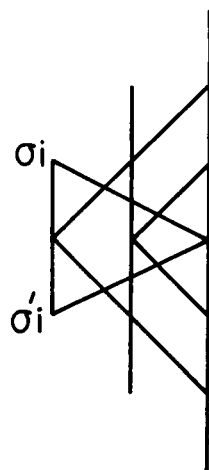
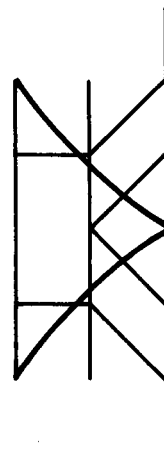
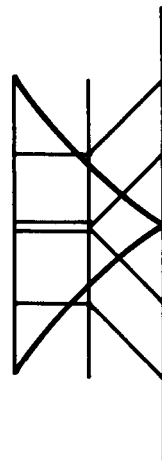
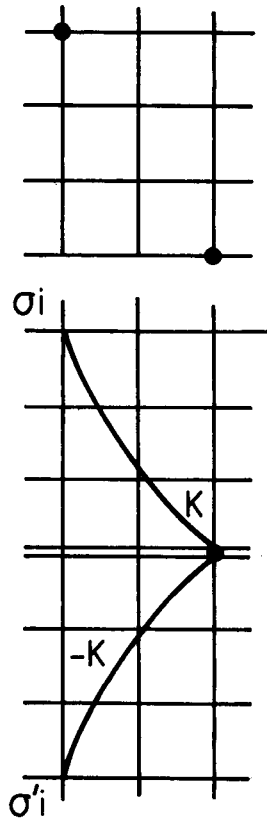


D'où là encore une relation d'inverse sur la fonction de partition engendrée par cette nouvelle matrice de transfert et l'équation d'invariance de la fonction de corrélation à deux points :

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle (K_1, K_2) = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle (K_1 + i\pi/2, -K_2)$$

Par opposition regardons maintenant l'exemple pour lequel  $m < n$  ( $m=2, n=3$ ). On peut là encore se convaincre des égalités entre

les motifs suivants :



On constate qu'il n'est plus possible d'évoluer à partir de cette dernière figure de façon à identifier  $\sigma_i$  et  $\sigma'_i$  et donc faire disparaître les deux liaisons  $+K$  et  $-K$ . Il semble bien qu'il y ait une opposition marquée entre le cas  $m > n$  et le cas  $m < n$ , comme on peut s'en convaincre sur l'exemple limite de la fonction de corrélation ( $m=0$   $n=1$ ) ; en dérivant par rapport à  $K_1$  l'équation d'inverse sur la fonction de partition du modèle d'Ising bidimensionnel on obtient l'équation suivante sur la fonction de corrélation :

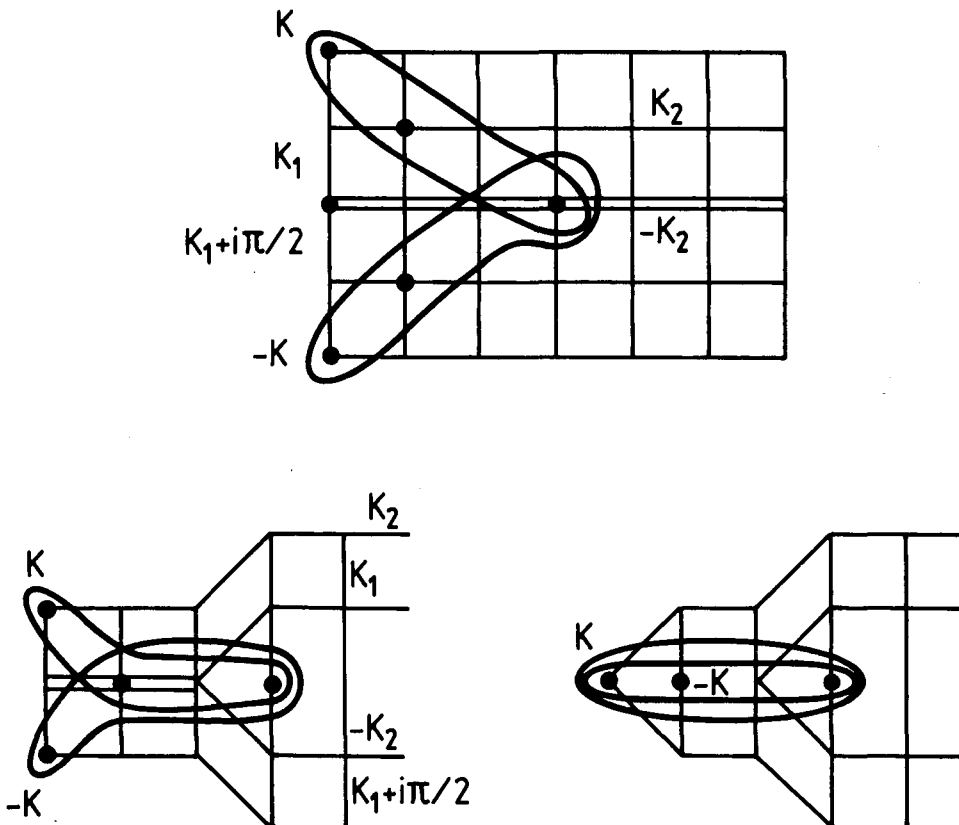
$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle (K_1, K_2) + \langle \sigma_i \sigma_j \rangle (K_1 + i\pi/2, -K_2) = 2 \coth 2K_1$$

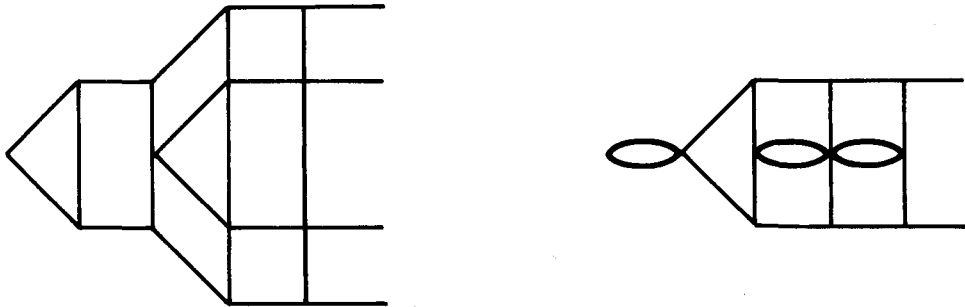
qui doit être opposée à toutes les équations fonctionnelles précédemment obtenues qui sont du type "invariance" par inverse :

$$\varphi(K_1, K_2) = \varphi(K_1 + i\pi/2, -K_2)$$

Examinons à présent le cas des fonctions de corrélations à plusieurs points avec l'exemple suivant qui, là encore devra être considéré comme représentatif de la situation générale : nous introduisons sur le modèle usuel sur réseau carré des interactions à trois spins :  $e^{K \sigma_i \sigma_j \sigma_k}$

Nous avons la suite d'égalités suivantes :

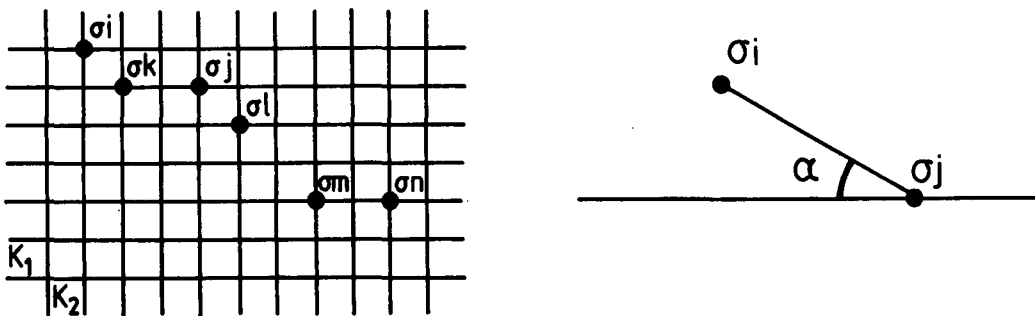




Ce qui nous conduit à écrire une nouvelle équation d'invariance

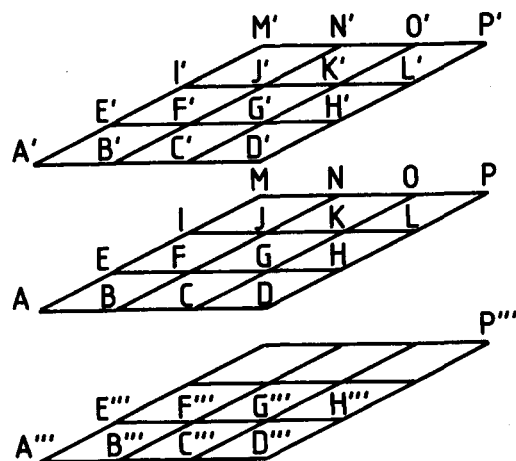
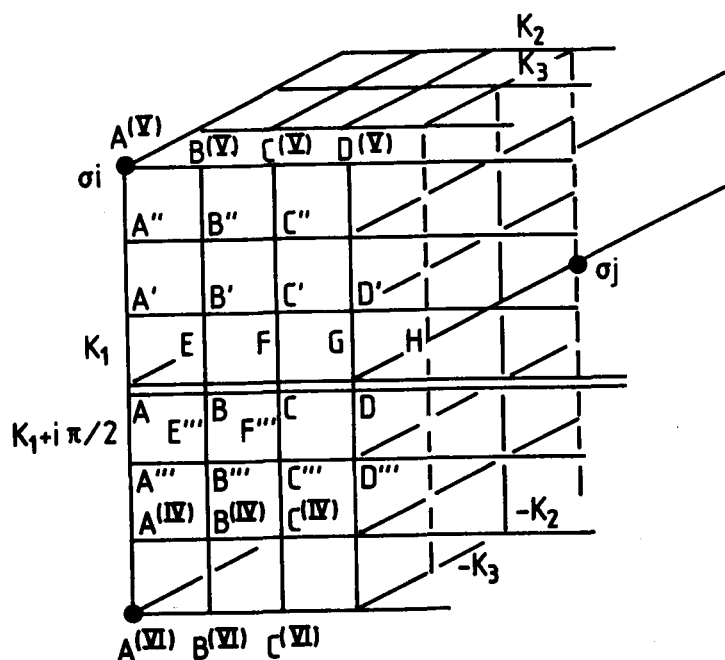
$$\langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \rangle (K_1, K_2) = \langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \rangle (K_1 + i\pi/2, -K_2)$$

De façon très générale si nous considérons les fonctions de Green les plus générales à  $n$  points

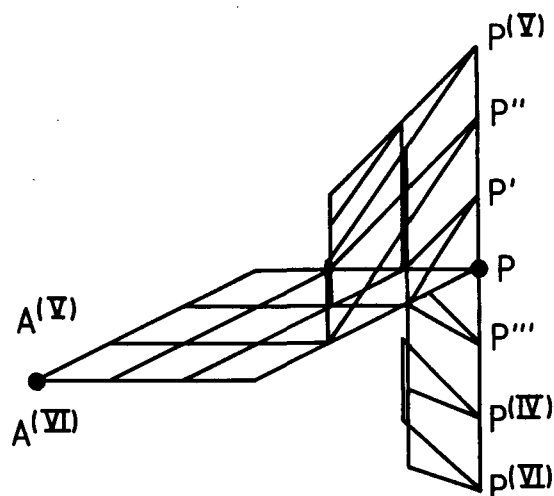


Nous aurons une équation fonctionnelle d'inverse pour  $(K_1, K_2) \rightarrow (K_1 + i\pi/2, -K_2)$  si, quels que soient les couples de spins  $\sigma_i, \sigma_j$  choisis parmi les  $n$  points, l'angle  $\alpha$  que forme la droite passant par ces deux spins avec la droite portant les liaisons  $K_2$ , est inférieur ou égal à  $45^\circ$ .

Examinons maintenant un exemple de relation sur des fonctions de corrélations de modèles tridimensionnels



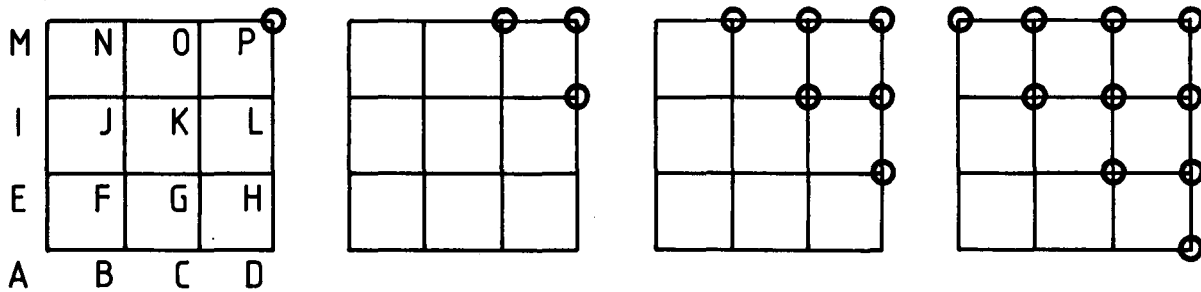
Nous pouvons dans ce cas également écrire une suite d'égalités obtenues tout d'abord en sommant sur les spins situés respectivement en A, B, C, ... 0 et L à l'exception du spin  $\sigma_j$  en P relié à  $\sigma_i$ , ce qui a pour effet d'identifier les spins en A' et A'', B' et B''... L' et L'' puis on peut sommer de nouveau sur les spins situés aux points communs A' ou A'', B' ou B''... à l'exception des spins situés aux points communs O' ou O'', L' ou L'' qui sont reliés aux spins aux points P' et P'' ainsi que les spins aux points P' et P'' ; ceci a pour effet d'identifier les spins situés en A'' et A<sup>(IV)</sup> de même B'' et B<sup>(IV)</sup>... à l'exception des spins en O'', O<sup>(IV)</sup>, L'', L<sup>(IV)</sup> ; on termine en sommant une dernière fois sur ces spins situés aux points communs A'' et A<sup>(IV)</sup>, B'' et B<sup>(IV)</sup>... à l'exception des spins situés aux points N'', K'', H'' et N<sup>(IV)</sup>, K<sup>(IV)</sup>, H<sup>(IV)</sup> (et bien évidemment O'', L'', P'', O<sup>(IV)</sup>, L<sup>(IV)</sup>, P<sup>(IV)</sup> puisqu'ils sont reliés aux spins aux points O', L' ainsi que O''' et L'''. Nous arrivons ainsi à une figure assez compliquée que nous ne dessinons que partiellement : elle a essentiellement la forme de deux "toits" l'un descendant du point P<sup>(V)</sup> et l'autre étant son symétrique par rapport au plan ADPM.



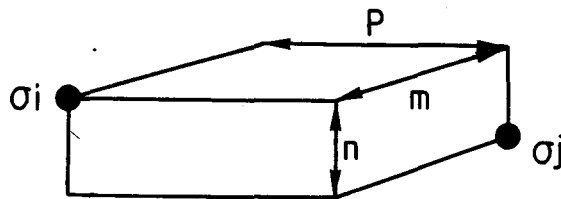
L'important consiste à remarquer que les spins en  $A^{(V)}$  et  $A^{(VI)}$  sont maintenant identifiés. Ce nouveau spin commun est relié au spin en P par une liaison K ainsi qu'une liaison  $-K$  : il n'est donc plus relié au spin P : le spin P n'est plus relié qu'à deux spins, ceux en P' et P''' on peut donc sommer sur ce spin et ainsi identifier P' et P''' et continuer ainsi de suite. A la fin on aura réussi à identifier tout les spins en  $A^{(V)}$ ,  $B^{(V)}$ , ...,  $P^{(V)}$  et ceux en  $A^{(VI)}$ ,  $B^{(VI)}$ , ...,  $P^{(VI)}$ . Ce raisonnement permettra ensuite d'établir comme dans tous les cas précédents une équation matricielle puis une équation fonctionnelle d'inverse sur une fonction de partition puis l'équation d'invariance suivante :

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle (K_1, K_2, K_3) = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle (K_1 + i\pi/2, -K_2, -K_3)$$

On se rend compte que pour pouvoir effectuer la précédente démonstration il faut avant tout pouvoir identifier les spins en  $A^{(V)}$  et  $A^{(VI)}$ , l'obstacle étant qu'à chaque étape où l'on identifie d'abord A' et A''' puis A'' et  $A^{(IV)}$  ... on voit s'étendre à partir du spin en P une zone de spins sur lesquels on ne peut plus sommer ; notons ces spins par des cercles :



Tant que cette zone n'atteint pas le coin en bas à gauche la démonstration s'applique. Si nous considérons un cas plus général



Le raisonnement précédent nous conduira là encore à une équation d'invariance si  $m + p \geq n$ .

## 2.2) Discussion

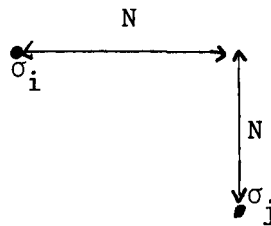
Dans les cas particuliers où nous avons vu que l'on pouvait adjoindre la symétrie  $K_1 \leftrightarrow K_2$  (fonction de corrélations "diagonales" et aimantation) nous voyons que les quantités considérées peuvent être vues comme des invariants du groupe  $G$  engendré par l'inverse et la symétrie. De plus nous connaissons un invariant algébrique privilégié, dans le cas d'Ising ou de Potts. Nous pouvons nous demander si les quantités précédentes sont fonctions de cet invariant. Dans le cas d'Ising  $d = 2$  nous avons le module  $k = \text{sh } 2K_1 \text{ sh } 2K_2$  qui est invariant par  $K_1 \rightarrow K_1 + i\pi/2$ ,  $K_2 \rightarrow -K_2$  et est de plus symétrique par l'échange entre  $K_1$  et  $K_2$ .

Regardons par exemple l'aimantation du modèle d'Ising, celle-ci s'écrit bien comme une fonction du module :

$$M = (1-k)^{-1/8}$$



Regardons maintenant les fonctions de corrélations diagonales du modèle d'Ising bidimensionnel : elles s'écrivent comme un déterminant de Toeplitz<sup>[37]</sup>



$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \begin{vmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-N+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-N+2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1} & a_{N-2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

avec  $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \cdot e^{-in\theta} \cdot \phi(\theta)$  où  $\phi(\theta) = \left( \frac{k-e^{-i\theta}}{k-e^{i\theta}} \right)^{1/2}$ . La fonction de corrélation apparaît donc comme une expression, peut être compliquée, mais assurément fonction de la seule variable  $k$ , invariant algébrique par le groupe  $G(*)$ . Ce résultat, doit être apprécié en le comparant aux expressions des fonctions de corrélations entre spins alignés horizontalement ou verticalement. Ces dernières apparaissent somme toute plus compliquées. Les fonctions de corrélations diagonales s'avèrent plus simples : on peut donner par exemple l'expression explicite de la fonction de corrélation entre second plus proches voisins :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle &= \frac{2}{\pi} E(k) \text{ pour } T < T_c \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{k} [E(k) + (k^2 - 1)K(k)] \text{ (où } E \text{ et } K \text{ désigne} \end{aligned}$$

les intégrales elliptiques complète de 1<sup>ère</sup> espèce) pour  $T > T_c$ .

Dans le cas du modèle de Potts aucune connaissance exacte de l'aimantation ou de fonction de corrélation ne permet bien sûr la vérification précédente.

(\*) La dépendance dans l'invariant algébrique  $k$  peut être vu sur les fonctions de corrélations à plusieurs points tous placés sur une diagonale

En utilisant les relations obtenues par Kasteleyn et al sur les fonctions de corrélations [30] il est possible d'exprimer ces fonctions de corrélations à  $p$  points comme somme (à coefficients  $+1$  ou  $-1$ ) de produits de  $\frac{p}{2}$  fonctions de corrélations à deux points. La dépendance dans la seule variable  $k$  sur les fonctions à deux points assure la propriété sur les fonctions à  $p$  points.

En conclusion sur ce sujet des équations fonctionnelles portant sur les fonctions de corrélations, nous noterons la très grande variété de telles équations qui se présentent, en général, comme des équations d'invariance par l'inverse. Bien entendu à l'intérieur de cette grande variété certaines équations fonctionnelles sont plus importantes que d'autres : ce sont celles pour lesquelles les fonctions de corrélations sont symétriques par rapport à la première diagonale, auquel cas il est possible d'adjoindre l'équation d'invariance par l'échange  $K_1 \leftrightarrow K_2$ . Ces deux involutions inverse et symétrie engendront un groupe intéressant. Tout ce qui a été dit, démontré ou conjecturé sur Ising s'applique bien évidemment sur le modèle de Potts. De plus on peut aisément étendre ces relations sur les fonctions de corrélations en dimensions supérieures, éventuellement en présence de champ magnétique, et éventuellement pour des réseaux avec interactions plus compliquées que les simples réseaux carrés, cubiques... (réseau non planaires...).

### 3) RELATIONS D'INVERSE SUR D'AUTRES GRANDEURS

Les relations d'inverse ne se limitent pas aux fonctions de partition ou aux fonctions de corrélations ou à l'aimantation. En effet considérons le modèle d'Ising en champ et la relation d'inverse associée sur la fonction de partition : en dérivant une première fois par rapport au champ et nous plaçant à champ nul, nous obtenons une relation d'invariance de l'aimantation par la transformation  $(K_1, K_2) \rightarrow (K_1 + i\pi/2, -K_2)$ . Si nous dérivons une deuxième fois par rapport au champ, compte tenu de la définition de la susceptibilité  $\chi = \frac{\partial M}{\partial H} \Big|_{H=0}$ , nous arrivons à l'équation suivante

$$\chi(K_1, K_2) + \chi(K_1 + i\pi/2, -K_2) = 0$$

Examinons d'autres exemples, et plaçons nous dans le cadre de la

correspondance [38] entre le problème de la percolation et le modèle de Potts. Si  $Z(b,c,H,q)$  désigne la fonction de partition par site pour le modèle de Potts anisotrope à  $q$  composantes en champ  $H$ , avec les deux constantes de couplages  $K$  et  $K'$  telles que  $e^K = b$ ,  $e^{K'} = c$ . Nous avons le résultat suivant

$$\left( \frac{\partial \ln Z}{\partial q} \right)_{q=1} = -1 - \ln(1-p) + \langle N_c \rangle(p,p') \\ H=0 - \ln(1-p')$$

où  $p$  (resp  $p'$ ) désignent les probabilités qu'une liaisons horizontale (resp verticale) soit présente dans le problème de la percolation sur le réseau carré. De plus  $p$  et  $p'$  sont relié à  $b$  et  $c$  par

$b = \frac{p}{1-p}$ ,  $c = \frac{p'}{1-p'}$ ;  $\langle N_c \rangle$  désigne le nombre moyen d'amas par site dans le problème de la percolation anisotrope que nous regardons. L'équation d'inverse sur la fonction de partition du modèle de Potts par dérivation par rapport à  $q$  à  $q = 1$  nous permet d'écrire une équation sur  $\langle N_c \rangle$  que nous n'explicitons pas.

La dérivée par rapport au champ a également une signification physique simple :  $\left( \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial H \partial q} \right)_{H=0} = P(p,p')$  probabilité qu'un site soit dans l'amas infini. De manière analogue nous sommes conduit à écrire

$$P(p,p') - P\left(\frac{-p}{1-p}, 1/p'\right) = 0$$

De même la dérivée seconde par rapport au champ n'est autre que le carré moyen de la taille des amas noté  $S(p,p')$

$$S(p,p') + S\left(\frac{-p}{1-p} - \frac{1}{p'}\right) = 0$$

La limite  $q \rightarrow 0$  correspond aux problèmes de dénombrement de graphes en arbres. Nous avons ainsi

$$\frac{\partial}{\partial H} (\lim_{q \rightarrow 0} - \ln Z) = 1 - \langle n_s \rangle_a(p,p')$$

$$\frac{\partial^2}{\partial H^2} (\lim_{q \rightarrow 0} - \ln Z) = \langle n_s^2 \rangle_a(p,p')$$

où  $\langle n_s \rangle_a$  et  $\langle n_s^2 \rangle_a$  sont la moyenne du nombre de sites et la moyenne du carré du nombre de sites dans les amas en arbres. Là aussi nous pouvons déduire des équations d'inverse sur ces grandeurs. La liste de ces équations d'inverse portant sur diverses quantités associées à divers problèmes, est très loin d'être close, et nous n'avons pas prétendu être exhaustif. Nous laissons le soin au lecteur d'en établir lui-même de nouvelles tout en insistant encore une fois sur la fréquence de telles équations dans les problèmes portant sur des réseaux.

## C. DISCUSSION : LES PROBLÈMES POSÉS PAR LA RELATION D'INVERSE

### a) Les liens entre la relation d'inverse et la dualité de Kramers-Wannier

Il a été remarqué sur le modèle de Potts anisotrope à  $q$  états (sur réseau carré) qu'il existait des variables  $x$  et  $y$  remplaçant les constantes de couplage du modèle, telles que les transformations d'inverse et de symétrie s'écrivent de façon multiplicative simple en posant

$$q_+ = 1 - q/2 + 1/2\sqrt{q(q-4)}$$

$$I : (x, y) \rightarrow \left( \frac{1}{x}, \frac{q_+^2}{y} \right)$$

$$S : (x, y) \rightarrow (y, x)$$

et de même pour d'autres transformations du groupe discret infini  $G$  engendré par ces deux involutions par exemple :

$$(SI)^2 : (x, y) \rightarrow \left( q_+^2 x, \frac{y}{q_+} \right)$$

La dualité sur le modèle de Potts s'écrit dans ces variables

$$D : (x, y) \rightarrow \left( -\frac{q_+}{y}, -\frac{q_+}{x} \right)$$

On peut vérifier, en utilisant la forme très explicite de ces transformations, que la dualité commute avec tout élément du groupe  $G$  en effet  $D$  commute avec  $S$  et également à  $I$  :

$$\begin{array}{ccc} (x, y) & \xrightarrow{I} & \left( \frac{1}{x}, \frac{q_+^2}{y} \right) \\ \downarrow D & & \downarrow D \\ \left( -\frac{q_+}{y}, -\frac{q_+}{x} \right) & \xrightarrow{I} & \left( -\frac{y}{q_+}, -q_+ x \right) \end{array}$$

Des indices de ces liens entre la relation d'inverse et de dualité sont évidents également sur le modèle d'Ising lorsqu'on remarque par exemple que la relation d'inverse s'écrit  $K_1 \rightarrow K_1$  et  $K_2^* \rightarrow -K_2^*$ .

Nous allons essayer d'éclaircir ces liens : considérons, pour ce faire, un modèle sur réseau carré avec interactions entre plus proches

voisins et supposons que ce modèle soit self-dual. Nous appellerons  $K_1$  et  $K_2$  les deux constantes de couplages correspondant aux interactions entre plus proches voisins, horizontales et verticales. Supposons de plus qu'il existe une transformation  $K \rightarrow i(K)$  telle que le poids statistique associé à une liaison devienne inverse (les "spins" de part et d'autre de la liaison restant fixés). Cette supposition est vérifiée pour tous les problèmes que l'on considère d'ordinaire, il s'agit en générale de la transformation  $K_1 \rightarrow -K_1$  :

$$e^{-K_1 f(\sigma_i \sigma_j^{-1})} = (e^{K_1 f(\sigma_i \sigma_j^{-1})})^{-1} \quad (\sigma_i \text{ le spin appartient à un certain groupe } g \text{ et } \sigma_i^{-1} \text{ désigne son inverse dans le groupe}).$$

Un modèle où le poids statistique s'écrit  $e^{K \cdot f(\sigma_i \sigma_j^{-1})}$   $\sigma$  appartenant à un groupe  $g$  donné est appelé modèle d'interaction selon une terminologie due à Biggs [39]. Supposons que le modèle précédent possède une propriété de self-dualité et soit  $K \rightarrow K^*$  cette transformation de dualité sur les paramètres du modèle.

Nous avons supposé au départ l'existence d'une transformation  $K \rightarrow i(K)$  telle que le poids statistique associé à une liaison se transforme en son inverse ce que nous pouvons symboliser par la figure

$$K \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} i(K) = \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

Par dualité la relation précédente devient

$$\begin{array}{c} K^* \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} (i(K))^* = \bullet$$

En utilisant ces deux propriétés conjointement on démontrera pour une matrice de transfert symétrique la propriété suivante

$$T = T_1^{1/2}(K_1) T_2(K_2) T_1^{1/2}(K_1)$$

$$T(K_1, K_2) T((i(K_1))^*, i(K_2)) = g(K_1)^M \cdot \mathbb{1}$$

où  $g(K_1)$  désigne une fonction de la variable  $K_1$  seule. D'où éventuellement la relation suivante pour la fonction de partition par site

$$Z(K_1, K_2) \cdot Z(i(K_1^*)^*, i(K_2)) = g(K_1)$$

Considérons, pour fixer les idées, l'exemple donné par A.Z. Zamolodchikov et M.I. Monastyrskii [40] où  $g \in \mathbb{Z}_N \oplus \mathbb{Z}_M$ ,  $g$  sera noté  $(\sigma, \tau)$   $\sigma \in \mathbb{Z}_N$ ,  $\tau \in \mathbb{Z}_M$  avec comme poids statistique associé à la liaison  $(i, j)$  1 si  $\sigma_i = \sigma_j$ ,  $\tau_i = \tau_j$ ,  $\gamma_1$  si  $\sigma_i = \sigma_j$ ,  $\tau_i \neq \tau_j$  et enfin  $\gamma_2$  si  $\sigma_i \neq \sigma_j$  et  $\tau_i \neq \tau_j$ . Le groupe  $\mathbb{Z}_N \oplus \mathbb{Z}_M$  est un groupe soluble il est donc possible d'avoir une self-dualité sur le réseau carré : on passera ainsi du modèle défini par  $\gamma_1, \gamma_2$  pour les liaisons horizontales et  $\gamma_1', \gamma_2'$  pour les liaisons verticales ou modèle ayant pour les liaisons horizontales les valeurs associées :  $\gamma_1^* = \frac{1 + (N-1)\gamma_1' - N\gamma_2'}{1 + (N-1)\gamma_1 + N(M-1)\gamma_2}$  et  $\gamma_2^* = \frac{1 - \gamma_1'}{1 + (N-1)\gamma_1' + N(M-1)\gamma_2'}$  et réciproquement pour les liaisons verticales.

La relation d'inverse s'écrit sur cet exemple  $\gamma_1 \rightarrow \left(\frac{1}{\gamma_1^*}\right)^* \gamma_2 \rightarrow \left(\frac{1}{\gamma_2^*}\right)^*$  et  $\gamma_1' \rightarrow \frac{1}{\gamma_1'} \gamma_2' \rightarrow \frac{1}{\gamma_2'}$ .

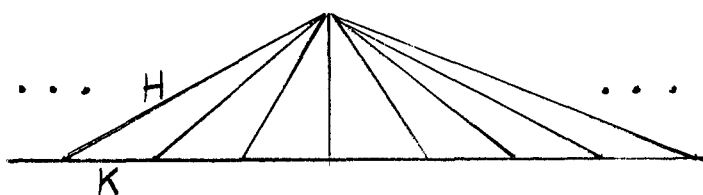
#### b) Les liens entre la relation d'inverse et le groupe de renormalisation

Le groupe de renormalisation est devenu une idée extrêmement répandue en mécanique statistique en grande partie du fait de sa facilité d'exposition en tant que groupe de renormalisation dans l'espace réel : une transformation de décimation (trace partielle) y joue le rôle d'une transformation discrète qui itérée engendre un groupe infini discret. Il est extrêmement naturel de rechercher les relations entre ce groupe de renormalisation et le groupe infini discret que nous rencontrons dans tous les exemples précédents (engendré par l'inverse et les symétries du problème) ou simplement la relation d'inverse. Envisageons tout d'abord ces liens dans les cas quelques peu académiques où le groupe de renormalisation est exact. Considérons l'exemple le plus simple de tous, où le groupe de renormalisation est exact : la chaîne d'Ising unidimensionnelle.

Lorsque l'on somme sur un spin sur deux le long de la chaîne, on aboutit à la transformation suivante sur l'unique paramètre du modèle :

$\text{th } K \rightarrow \text{th } K' = \text{th}^2 K$ . En fait, si l'on avait sommé sur tous les spins en n'en laissant que un sur n équi-espacés, on aurait eu :  $\text{th } K \rightarrow \text{th } K' = \text{th}^n K$ . Le groupe de renormalisation est exact et il correspond à une propriété exacte de la fonction de partition. Si nous considérons deux de ces transformations  $\text{th } K \rightarrow \text{th}^n K$  et  $\text{th } K \rightarrow \text{th}^m K$  nous remarquons qu'elles commutent bien, quels que soient m et n entiers relatifs. Nous remarquons en particulier que la relation dite d'inverse correspond à la valeur particulière  $m = -1$ . L'inverse s'avère donc être une symétrie compatible (elle commute) avec le groupe de renormalisation.

Un autre exemple de groupe de renormalisation exact nous est fourni par le modèle d'Ising unidimensionnel en champ que l'on peut regarder comme correspondant au réseau suivant



La relation triangle étoile induit une transformation qui divise à chaque fois le nombre de spins par deux, et qui se traduit par une transformation sur les paramètres quelque peu compliquée. Néanmoins la cohérence entre cette symétrie et la relation d'inverse a déjà été soulignée au début de cette note. Cependant les deux exemples précédents sont quelque peu pathologiques et ne nous renseignent pas sur les inter-relations existantes entre relation d'inverse et groupe de renormalisation (on observe une compatibilité stricte). Il faut donc s'intéresser à des problèmes possédant une relation d'inverse, pour lesquels le groupe de renormalisation n'est pas exact et sur lesquels, si possible, les calculs puissent être explicités le plus loin possible : aussi considérons le modèle à huit vertex symétrique résolu par R.J. Baxter. Nous reprenons les notations de R.J. Baxter dans son article d'Annals of Physics [11] :

$$z = e^{-i\pi v/K}, \quad x = e^{-i\pi \eta/K}, \quad q = e^{-\pi K'/K}$$

Soit k le module de nos fonctions elliptiques. On peut par transformation



de Landen passer à d'autres fonctions elliptiques de module  $\lambda = \frac{1-k}{1+k}$  (isogénies des courbes elliptiques).

Les nouvelles périodes sont maintenant

$$K_\lambda = \frac{1}{2} (1+k).K' \quad \text{et} \quad K'_\lambda = (1+k).K$$

On introduit les nouvelles variables  $V$  et  $\xi$  telles que

$$-i\pi v/K = \pi V/K'_\lambda$$

ainsi que

$$-i\pi \eta/K = \pi \xi/K'_\lambda$$

La raison de l'introduction quelque peu fastidieuse de ces nouvelles variables est que, par la suite, nous allons nous placer au voisinage de la température critique ; nous aurons alors  $W_2 \rightarrow W_3$  ;  $q$ ,  $z$  et  $x \rightarrow 1$ ,  $K_\lambda \rightarrow \pi/2$   $K'_\lambda \rightarrow \infty$  mais par contre  $\xi$  et  $V$  tendront vers des valeurs finies. R.J. Baxter introduit pour finir les variables  $\mu = \pi \xi/K'_\lambda$  et  $U = \pi V/K'_\lambda$  qui ont aussi des limites finies. Ces nouvelles notations étant posées, R.J. Baxter dans l'appendice E de son article d'Annals of Physics [11] reprend l'expression de la fonction de partition du modèle à huit vertex, effectue une transformation de Poisson et après un calcul de résidu il est capable, justement au voisinage de la température critique, d'écrire la fonction de partition comme somme de deux termes : un premier terme régulier et un deuxième terme singulier au voisinage de  $T = T_c$ . L'expression de ce terme singulier est le suivant :

$$\begin{aligned} -\beta f_{\text{sing}} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot q^{(2n-1)\pi/\mu} \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi U}{2\mu} \cdot \cot \frac{(2n-1)\pi^2}{2\pi}}{(1-q^{(2n-1)\pi/\mu}) (2n-1)} \\ &= 4 \cdot \cos \frac{\pi U}{2\mu} \cdot \cot \frac{\pi^2}{2\mu} \cdot q^{\pi/\mu} + \dots \end{aligned}$$

Dans ces nouvelles variables les transformations d'inverse et de symétrie s'écrivent respectivement :

$$I : U \rightarrow 2\mu - U$$

$$S : U \rightarrow -U$$

Les relations d'inverse et de symétrie sur la fonction de partition induisent naturellement des relations d'inverse et de symétrie sur la partie singulière de la fonction de partition :

$$S : -\beta f_{\text{sing}}(U) = -\beta f_{\text{sing}}(-U)$$

$$I : -\beta f_{\text{sing}}(U) = -\beta f_{\text{sing}}(2\mu - U) = 0$$

(la partie singulière du facteur d'automorphie pour l'inverse est nulle). On vérifie bien les deux relations précédentes sur l'expression explicite donnée ci-dessus. Réciproquement les deux relations précédentes impliquent, au plus, une propriété de périodicité  $-\beta f_{\text{sing}}(U) = -\beta f_{\text{sing}}(4\mu - U)$  jointe à deux propriétés de parité, qui sont loin de déterminer cette partie singulière de façon unique.

Nous voyons aussi que si nous présupposons pour  $-\beta f_{\text{sing}}$  une forme "à la Kadanoff" du type  $-\beta f_{\text{sing}} = a(U, \mu) \cdot q^{2-\alpha(\mu)} + \dots$ , comme  $q$  (qui mesure l'écart à  $T_c$ ) est invariant par l'inverse et la symétrie, ce deux relations conduisent aux deux équations

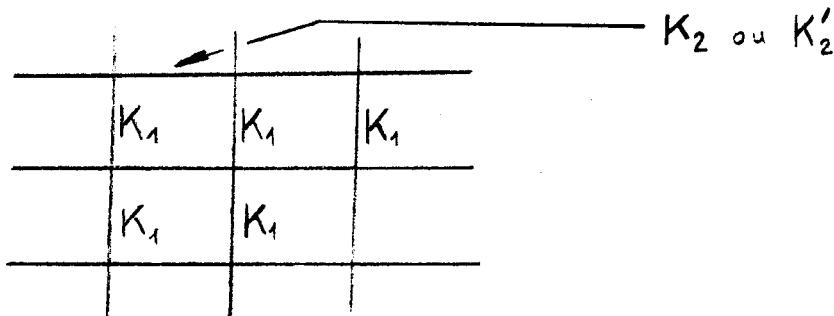
$$a(U, \mu) = a(-U, \mu)$$

$$a(U, \mu) + a(2\mu - U, \mu) = 0$$

Paradoxalement les relations d'inverse et de symétrie impliquent des contraintes sur l'information "fine"  $a(U, \mu)$  de correction à la loi d'échelle  $q^{\alpha(\mu)}$  (universalité dite "faible") mais n'implique aucune contrainte, et donc n'apporte aucune information, sur l'exposant critique  $2-\alpha(\mu)$  qui peut donc être quelconque. Ce résultat peut sembler curieux lorsque l'on se rappelle dans un cas particulier du modèle à 8 vertex, pour le modèle d'Ising, que la relation d'inverse jointe à la symétrie  $K_1 \leftrightarrow K_2$  (et à des hypothèses d'analyticité il est vrai) déterminait entièrement la fonction de partition et donc en particulier l'exposant thermique  $\alpha$ . En fait l'approche considérée ici était une approche extrêmement simple qui consistait à restreindre aux parties singulières les relations d'inverse et de symétrie. Il n'est pas évident qu'une approche plus sophistiquée utilisant ces deux relations, jointes à d'autres informations appropriées, ne puisse fournir des relations intéressantes sur les exposants critiques.

### c) La relation d'inverse et les problèmes aléatoires

Nous avons présenté des relations d'inverse sur des réseaux d'Ising (ou de Potts) avec des interactions entre plus proches voisins pour quelques motifs périodiques. Il semble raisonnable d'admettre que ces relations d'inverse puissent être écrites quel que soit la taille et le détail du motif considéré. On peut se demander si des relations d'inverse peuvent être écrites dans le cas plus général de problèmes aléatoires, tout comme par exemple la dualité de Kramers-Wannier qui s'applique aussi bien à des problèmes périodiques, qu'aléatoires. Considérons un aléatoire très simple : la constante de couplage verticale est fixée à  $K_1$ , la constante de couplage horizontale prend la valeur  $K_2$  avec la probabilité  $p$  et  $K'_2$  avec la probabilité  $1-p$



Un raisonnement un peu hâtif nous amènerait à écrire pour chaque configuration de liaison donnée

$$\ln Z(K_1, K_2, K'_2, p) + \ln Z(K_1 + i\pi/2, -K_2, -K'_2, p) = \ln(2 \sinh 2K_1)$$

La vérification diagrammatique à l'ordre le plus bas donnerait

$$\boxed{\phantom{t_1^2 \cdot \frac{\langle t_2 \rangle^2}{1 - \langle t_2 \rangle^2}}} \quad t_1^2 \cdot \frac{\langle t_2 \rangle^2}{1 - \langle t_2 \rangle^2}$$

(et non  $\langle \frac{t_2^2}{1 - t_2^2} \rangle$  les diverses liaisons horizontales doivent être consi-

dérées comme des variables aléatoires indépendantes). La relation d'inverse serait vérifiée à l'ordre le plus bas pour la transformation  $\langle t_2 \rangle \rightarrow \frac{1}{\langle t_2 \rangle}$

et non pas comme indiqué ci-dessus  $\langle t_2 \rangle \rightarrow \langle \frac{1}{t_2} \rangle$ .

L'aléatoire détruit donc la relation d'inverse.

d) Les conséquences et l'exploitation de la relation d'inverse :  
la recherche des variétés critiques

Bien que nous cherchions surtout dans cette note à exposer des relations d'inverse et à discuter les divers problèmes qu'elles posent sans trop aborder le très vaste problème de leurs conséquences, nous allons donner quelques applications et résultats qui dérivent des relations d'inverse. Nous ne reviendrons pas sur les calculs exacts de fonction de partition à l'aide de ces méthodes. A l'heure actuelle toutes (\*) les fonctions de partition qui sont connues peuvent être obtenues de cette façon qui s'avère, en l'occurrence, la façon la plus puissante et la plus élégante d'obtenir ces résultats. Nous allons plutôt regarder certaines conséquences dérivant de ces relations dans les cas non intégrables. Considérons par exemple les modèles de Potts anisotropes sur réseaux carrés, hexagonaux ou triangulaires. Nous avons déjà donné l'expression des variétés critiques dans ces cas. Néanmoins posons nous le problème simple de déterminer la variété critique c'est-à-dire la relation entre les constantes de couplages (ou toute fonction de ces constantes de couplages) traduisant le fait que la température est égale à la température critique (nous nous placerons dans l'hypothèse où cette température critique est unique).

Nous avons mis en évidence sur le modèle de Potts (entre autres) l'existence d'un groupe infini discret noté  $G$ , qui peut être vu comme un groupe de symétrie du modèle qui généralise la symétrie de dualité précédente. Généralisant l'argument de Kramers-Wannier nous caractérisons la variété critique en disant qu'elle doit être stable par ce groupe. Nous introduisons là encore les variables  $x, y, (z, t, \dots)$  telles que les transformations d'inverse et de symétrie s'écrivent de façon multiplicative simple.

Dans le cas du réseau carré nous cherchons une relation  $f(x, y) = 0$  qui soit stable par l'inverse :  $I : (x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{q_f}{y}\right)$  et la symétrie

---

(\*) (à l'exception de quelques cas particuliers comme les modèles gaussiens ou unidimensionnels).

$S : (x,y) \rightarrow (y,x)$  et donc tous les éléments de  $G$  engendré par ces deux involutions. Si nous posons  $u = xy$ ,  $v = \frac{x}{y}$  nous cherchons  $\varphi(u,v) = 0$  stable par

$$I : (u,v) \rightarrow \left( \frac{q+2}{u}, \frac{1}{q_+^2 v} \right)$$

$$S : (u,v) \rightarrow \left( u, \frac{1}{v} \right)$$

$$(IS)^2(u,v) \rightarrow (u, q_+^4 v)$$

Si nous nous plaçons à  $u$  fixé,  $\varphi(u,v) = 0$  doit être stable par  $v \rightarrow q_+^4 v$ . Supposons que la relation entre  $x$  et  $y$ , ou bien entre  $u$  et  $v$ , ou bien encore entre  $b = e^K$  et  $c = e^{K'}$ , est une relation algébrique (rappelons que tel est le cas de pratiquement toutes les relations de criticalité qui sont connues dans la littérature). Une telle supposition est incompatible avec la périodicité  $v \rightarrow q_+^4 v$ , sauf si la relation est indépendante de  $v$  :  $\varphi(u,v) = g(u) = 0$ . Autrement dit la relation de criticalité s'écrit  $xy = \text{cte}$ . On peut même déterminer la constante du fait de l'invariance par l'inverse :  $u \rightarrow \frac{q_+^2}{u}$ . Cette constante est égale à  $-q_+$  ou  $+q_+$ . On vérifie bien que la condition de criticalité du modèle de Potts ferromagnétique s'écrit  $xy = -q_+$ . Nous avons déjà noté que la condition de criticalité du modèle de Potts antiferromagnétique (récemment trouvée par R.J. Baxter) s'écrit effectivement  $xy = +q_+$  !

Des raisonnements analogues permettent de comprendre que la variété critique du modèle de Potts généralisant le modèle d'Utiyama, soit donné par  $xyzt = (-q_+)^2$

|       |           |           |       |  |
|-------|-----------|-----------|-------|--|
|       | $K_1$     | $K_4$     | $K_1$ |  |
| $K_2$ | $K_4 K_3$ | $K_1 K_2$ |       |  |
| $K_3$ | $K_1 K_2$ | $K_4$     |       |  |

$$e^{K_1} = a, e^{K_2} = b, e^{K_3} = c, e^{K_4} = d$$

$$x = \frac{a-q_+}{a-q_-} \quad y = \frac{b-q_+}{b-q_-}$$

$$z = \frac{c-q_+}{c-q_-} \quad t = \frac{d-q_+}{d-q_-}$$

A partir de cette variété critique on retrouve certains des résultats précédents ; par exemple lorsque  $d \rightarrow 0$  on a  $t \rightarrow -q_+$ . On retrouve, comme on le doit, la variété critique du réseau nid d'abeille : lorsque l'on considère le cas particulier  $a = c$ ,  $b = d$ , on retrouve le résultat du réseau carré anisotrope. Dans le cas du modèle d'Ising  $q = 2$  nous obtenons le modèle dit d'Utiyama au sens strict dont la variété critique avait

déjà été donnée par Syozi [41] i.e

$$\text{gd } 2K_1 + \text{gd } 2K_2 + \text{gd } 2K_3 + \text{gd } K_4 = \pi$$

Le gudermannien est défini par

$$\text{gd } x = 2 \arctan(e^x) - \pi/2$$

Lorsque  $q < 4$  alors  $|q_+| = 1$  d'où  $|a - q_+| = |a - q_-|$  pour  $a \in \mathbb{R}$  et donc  $|x| = 1$ . La variable  $x$  étant de la forme  $e^{i\theta}$ , nous considérons la variable  $i\theta = \ln x$ .

$$\begin{aligned} \text{Nous avons d'autre part } 2 \operatorname{arctg} e^{2K_1} &= 2 \operatorname{arctg} a = i \ln\left(\frac{1-ia}{1+ia}\right) \\ &= i \ln\left(\frac{a+i}{-a+i}\right) = i \ln\left[(-1)\left(\frac{a+i}{a-i}\right)\right]. \end{aligned}$$

Lorsque  $q=2$  nous avons  $q_+ = -i$  ; nous voyons donc que la variété critique  $\ln x + \ln y + \ln z + \ln t = 2 \ln(-q_+)$  est bien la généralisation de la formule additive donnée par Syozi.

Considérons maintenant le cas du modèle de Potts anisotrope sur réseau triangulaire et en parallèle du modèle de Potts anisotrope sur réseau cubique, puisque les équations fonctionnelles vérifiées par la fonction de partition sont exactement les mêmes, dans les variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  :

$$Z(x,y,z) \cdot Z\left(\frac{1}{x}, \frac{q_+^2}{y}, \frac{q_+^2}{z}\right) = (-qq_+) \frac{\left(1 + \frac{x}{q_+}\right)\left(1 + \frac{1}{q_+x}\right)}{(1-x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

$$Z(\sigma(x,y,z)) = Z(x,y,z)$$

où  $\sigma$  désigne un élément du groupe des permutations à trois éléments. L'inverse et les transpositions qui engendrent le groupe de permutations forment un ensemble d'involutions qui engendrent le groupe  $G$  que nous pouvons décrire rapidement : un élément quelconque du groupe  $G$  s'écrit comme un produit

$$g = \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n \quad \sigma_i \in S_3$$

On introduit les deux groupes suivants

$$G' = \{g; n \text{ paire} \}, \quad G'' = \{g; \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n = e\}$$

$e$  est l'élément identité de  $S_3$

$$H = G' \cap G'' = \{g; n \text{ paire et } \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n = e\}$$

Si nous regardons le produit  $xyz$ , nous voyons facilement qu'il est conservé par tous les éléments de  $G'$  ; les éléments les plus généraux sont donc de la forme  $(x, y, z) \rightarrow \sigma(\lambda x, \mu y, \nu z)$  où  $\sigma \in S_3$  et  $\lambda, \mu, \nu$  sont des puissances de  $q_+$  et tels que  $\lambda\mu\nu = 1$ . Les éléments de  $G''$  sont de la forme  $(x, y, z) \rightarrow (\alpha x^\varepsilon, \beta y^\varepsilon, \gamma z^\varepsilon)$  où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des puissances de  $q_+$ , et  $\varepsilon$  vaut  $\pm 1$ . Les éléments de  $H$  sont eux de la forme

$$(x, y, z) \rightarrow (\lambda x, \mu y, \nu z) \quad \lambda\mu\nu = 1$$

On se convainc que  $H$  peut être engendré par les deux éléments remarquables suivants :

$$(x, y, z) \rightarrow \left( q_+^2 x, \frac{y}{q_+^2}, z \right)$$

et

$$(x, y, z) \rightarrow \left( q_+^2 x, y, \frac{z}{q_+} \right)$$

Ces deux éléments commutent, le groupe  $H$  est donc isomorphe à  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  :  $H$  est normal dans chacun des sous groupe  $G'$  et  $G''$  et l'on a donc les deux suites exactes

$$e \rightarrow H \rightarrow G'' \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow e$$

$$e \rightarrow H \rightarrow G' \rightarrow S_3 \rightarrow e$$

(Rappelons qu'une suite de deux morphismes de groupes  $\beta$  et  $\alpha$  comme  $K \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} H$  est dite exacte en  $G$  lorsque  $\text{Im } \beta = \text{Ker } \alpha$  ie  $\alpha\beta(k) = e \quad \forall k \in K$  et  $\forall g \in G \quad \alpha(g) = e \quad \exists k, g = \beta(k)$  ; typiquement ici nous avons des suites exactes courtes  $e \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow G/N \rightarrow e$  où  $N$  est un groupe normal dans  $G$ , et dont les morphismes sont l'insertion  $N \rightarrow G$  et la projection  $G \rightarrow G/N$ ) cette analyse de la structure du groupe  $G$  est commune aussi bien au modèle de Potts triangulaire ou cubique. Néanmoins le groupe  $G$  ne prétend pas rassembler à lui seul toutes les symétries du problème, bien qu'il en constitue une importante partie : par exemple dans le cas du modèle d'Ising des symétries supplémentaires apparaissent sur réseau cubique nous avons les symétries de changement de Mattis suivantes :  $a \rightarrow \frac{1}{a}$  ainsi que  $b \rightarrow \frac{1}{b}$  et aussi  $c \rightarrow \frac{1}{c}$  ; il y a donc un groupe de symétrie

supplémentaire isomorphe à  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Dans le cas du réseau triangulaire nous n'avons que les symétries  $(a,b,c) \rightarrow \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, c\right)$ ,  $(a,b,c) \rightarrow \left(\frac{1}{a}, b, \frac{1}{c}\right)$  et  $(a,b,c) \rightarrow \left(a, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$  qui donne donc un groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Par contre le réseau triangulaire admet une symétrie supplémentaire, la composée de la relation triangle-étoile et de la relation de dualité de Kramers-Wannier qui n'a pas d'équivalent sur réseau cubique.

Regardons les conséquences de ce groupe au niveau de la recherche de la variété critique. Regardons en particulier l'élément

$$(x,y,z) \rightarrow \left(q_+^2 x, \frac{y}{q_+^2}, z\right)$$

et effectuons le changement de variable  $u = xy$ ,  $v = \frac{x}{y}$ ,  $z$  ; nous recherchons  $\varphi(u,v,z) = 0$ , la variété critique stable par le groupe et donc entre autres par l'élément précédent :  $(u,v,z) \rightarrow (u, q_+^4 v, z)$ . Si nous supposons que  $\varphi$  est algébrique dans  $u,v,z$  (ou dans  $a,b,c$  cela revient au même), nous voyons que cette hypothèse ne peut s'accorder à la périodicité  $v \rightarrow q_+^4 v$  qu'à la condition que  $\varphi$  soit indépendant de  $v$  : nous recherchons donc maintenant une relation  $\varphi(xy,z) = 0$ . De façon identique nous obtiendrions que la relation doit être une relation du type  $\phi(xz,y) = 0$  ou encore  $\psi(yz,x) = 0$ . Nous en concluons que la variété critique ne peut que s'écrire  $xyz = c$ , la constante  $c$  étant déterminée par l'invariance par l'inverse  $(x,y,z) \rightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{q_+^2}{y}, \frac{q_+^2}{z}\right)$  autrement dit  $c^2 = q_+^4$  d'où les deux variétés critiques  $xyz = (q_+)^2$  déjà notée précédemment sur le modèle de Potts triangulaire mais également  $xyz = -(q_+)^2$  (qui pourrait éventuellement correspondre au réseau triangulaire anti-ferromagnétique). Ces considérations s'appliquent au réseau triangulaire tout comme au réseau cubique ; lorsque l'on compare les résultats ainsi obtenu pour la température critique du modèle cubique isotrope en supposant une relation algébrique et ceux connus dans la littérature par diverses approches numériques [42] on constate un désaccord significatif : l'hypothèse d'algébricité pour la variété critique doit donc être rejetée. Pour trouver la variété critique du modèle de Potts sur réseau cubique il faudra donc aller chercher parmi les très nombreux invariants non algébriques du groupe  $G$ .



L'analyse sur le réseau nid d'abeille est duale de l'analyse précédente : on fera  $x \rightarrow -\frac{q_+}{x}$ ,  $y \rightarrow -\frac{q_+}{y}$ ,  $z \rightarrow -\frac{q_+}{z}$ . On aura deux variétés critiques  $xyz = -q_+$  (cas ferromagnétique déjà noté auparavant) et  $xyz = q_+$  (qui là aussi pourrait correspondre au cas antiferromagnétique). On peut généraliser l'analyse précédente pour des modèles hypercubiques en dimension  $d$  quelconque, où l'on a la relation d'inverse suivante :

$$Z(x_1, x_2, x_3, \dots, x_d) \cdot Z\left(\frac{1}{x_1}, \frac{q_+^2}{x_2}, \frac{q_+^2}{x_3}, \dots, \frac{q_+^2}{x_d}\right) \\ = (-q_+ q_+) \frac{\left(1 + \frac{x_1}{q_+}\right)\left(1 + \frac{1}{q_+ x_1}\right)}{(1-x_1)\left(1 - \frac{1}{x_1}\right)}$$

Le groupe  $G$  est essentiellement le produit semi-direct d'un groupe fini et d'un groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}^{d-1}$ . Ce groupe  $G$  conduit là également à la conclusion d'une variété critique soit s'écrivant  $x_1 x_2 \dots x_d = \text{constante}$  soit correspondant à un invariant non algébrique du groupe  $G$ . (Cas le plus probable pour  $d \neq 2$ ).

#### e) Les relations existant entre le groupe $G$ et le théorème de Lee et Yang

Nous avons déjà considéré les relations entre le théorème de Lee et Yang et le groupe  $G$  dans le cadre du modèle d'Ising en champ. Un exemple beaucoup plus favorable pour effectuer cette étude est celui du modèle de Potts sur réseau carré, triangulaire ou nid d'abeille anisotrope. Cette étude doit être publiée par ailleurs J.M. Maillard R. Rammal [16]). Le modèle de Potts, de part une correspondance bien connue, est équivalent à un modèle à six vertex en damier (staggered), ce même modèle à vertex pouvant être mis en équivalence avec un modèle à spin, cette fois-ci, sur lequel on peut appliquer le théorème de Suzuki-Fisher généralisant le théorème de Lee et Yang. C'est de cette manière qu'Hinterman et al [43] ont pu déterminer, sur le modèle de Potts sur ces différents réseaux, la variable de "fugacité"  $z$  sur laquelle le théorème s'applique ; lorsque l'on passe aux "bonnes variables" relativement au groupe  $G$ , on obtient l'expression suivante, remarquablement simple pour  $z$  : dans le cas du réseau carré

$z = \frac{xy}{-q_+}$  , dans le cas du réseau triangulaire

$z = \frac{xyz}{(q_+)^2}$  , dans le cas du réseau nid d'abeille  $z = \frac{xyz}{-q_+}$  , ces

résultats ne s'appliquent que pour  $q \geq 4$ .

Il est alors impossible d'écrire la fonction de partition par exemple du réseau carré sous la forme

$$\ln Z = \int d\theta . g\left(\theta, \frac{x}{y}\right) . \ln\left(\frac{xy}{-q_+} - e^{i\theta}\right)$$

où l'information inconnue réside maintenant dans la densité de zéros  $g\left(\theta, \frac{x}{y}\right)$ . Les informations exactes connues pour la variété critique

$z = \frac{xy}{-q_+} = 1$  sur la fonction de partition et la chaleur latente, induisent des informations sur  $g$ . On peut chercher à réintroduire la forme précédente pour  $Z$  dans l'équation d'inverse pour obtenir une équation sur  $g$  mais l'équation ainsi obtenue est extrêmement délicate à utiliser.

Le fait que les singularités par exemple dans le cas du réseau carré se placent sur  $\left|\frac{xy}{-q_+}\right| = 1$  indique clairement que le groupe  $G$  vu comme groupe de transformations sur  $x$  et  $y$  a véritablement une signification dans  $\mathbb{C}$  et pas seulement dans  $\mathbb{R}$ .

#### f) Les problèmes associés à la dégénérescence du groupe $G$ : les nombres de Behara

Nous avons vu qu'il existait une distinction entre  $q > 4$  et  $q < 4$  dans le cas du modèle de Potts. Lorsque  $q < 4$ ,  $q_+$  est de module 1, auquel cas il peut arriver qu'il existe  $n$ , entier, tel que  $q_+^n = 1$ . Ceci se produit lorsque  $q$  le nombre d'état du modèle de Potts est de la forme  $2 + 2 \cos \frac{2\pi p}{m}$  où  $m$  et  $p$  sont des entiers. Pour ces valeurs remarquables le groupe  $G$  dégénère en un groupe fini. Au travers des nombreuses correspondances qui existent entre le modèle de Potts et d'autres problèmes on ne s'étonnera pas de retrouver ces mêmes valeurs sur d'autres problèmes : on les retrouve notamment comme correspondant à des valeurs très particulières dans le cas du modèle de Sine-Gordon quantique en dimension  $1 + 1$ . (En effet la matrice  $S$  du modèle de Sine-Gordon s'identifie complètement avec la fonction de partition du modèle à six vertex. De plus le

modèle à six vertex est équivalent au modèle de Potts bidimensionnel anisotrope à la température critique).

Pour ces valeurs particulières notamment, Korepin [44] a indiqué que la matrice  $S$  s'écrit comme un produit fini de termes simples. Ceci rejoint la remarque que nous avons faite montrant que la fonction de partition du modèle de Potts à  $T=T_c$  est un produit sur le groupe  $G$  de termes simples. Pour  $q < 4$  ceci justifie l'idée naïve selon laquelle lorsque le groupe dégénère en un groupe fini, la fonction de partition doit alors s'écrire comme le produit sur ce groupe fini. La matrice de transfert du modèle à six-vertex commute avec l'hamiltonien d'un système quantique unidimensionnel, le modèle XXZ. Par conséquent il n'est pas surprenant que ces nombres apparaissent également dans la théorie du modèle XXZ. Si nous considérons les exposants critiques du modèle de Potts et croyons aux conjectures, maintenant sérieusement étayée, de den Nijs [45] pour ces exposants critiques nous remarquons que pour ces nombres particuliers, les exposants deviennent fractionnaires. Ce fait remarquable devrait inciter à rechercher une approche des exposants critiques s'appuyant sur la structure de groupe existant sur le modèle de Potts. Enfin une équivalence intéressante [46] existe entre la fonction de partition du modèle de Potts et une fonction génératrice de problèmes de théorie des graphes : le polynôme de Whitney. Comme cas particulier, si l'on considère le modèle de Potts antiferromagnétique à température nulle cette fonction de partition est égale à une fonction génératrice appelée polynôme chromatique, associée au graphe sur lequel se situe initialement le modèle de Potts. Cette fonction génératrice est effectivement un polynôme, lorsque le graphe est de dimension finie, dans la variable  $q$  nombre d'état, qui en l'occurrence doit être regardée comme une variable complexe et non plus entière. Certains de ces nombres ont été remarqués par divers auteurs comme étant des zéros des polynômes chromatique. Ils sont appelés nombre de Behara [47]. Ils sont de la forme  $q = 2 + 2 \cos \frac{2\pi}{n} = B_n$ . Tous les nombres de Behara jusqu'à  $B_{10}$  ont été obtenus comme zéros de polynômes chromatiques pour différents graphes et ce essentiellement, sur des modèles particuliers dits modèles hiérarchiques [48]. Le problème se pose de savoir si cette propriété est véritablement universelle, auquel cas on devrait la rencontrer sur n'importe quel réseau et à la limite du réseau infini on devrait avoir une infinité de zéros tendant vers la suite  $B_n$ . Un autre problème se pose : celui de savoir si les autres nombres parfois notés  $B_{n,k} : q = 2 + 2 \cos \frac{2\pi k}{n}$

$k, n$  entiers pour lesquels le groupe  $G$  dégénère également, sont aussi des zéros de polynômes chromatiques.

g) Les équations d'inverse et les équations non linéaires : la notion de déterminant généralisé

Considérons le problème quantique de Toda engendré par l'hamiltonien

$$H = \sum_n \left( \frac{p_n^2}{2} + \exp(q_{n+1} - q_n) \right)$$

Le rôle du problème linéaire auxiliaire est tenu par le système  $\phi_{n+1} = L_n \phi_n$

où  $\phi_n = \begin{pmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \end{pmatrix}$ ,  $L_n$  est la matrice  $2 \times 2$

$$L_n = \begin{pmatrix} p_n^{-\lambda} & -e^{q_n} \\ e^{-q_n} & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage se définit comme le produit des matrices locales

$$T_N(\lambda) = \prod_{1 \leq n \leq N} L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} a_N(\lambda) & b_N(\lambda) \\ c_N(\lambda) & d_N(\lambda) \end{pmatrix}$$

Il existe une relation locale (relation triangle)

$$R(\lambda, \mu) L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu) = L_n(\mu) \otimes L_n(\lambda) R(\lambda, \mu)$$

où

$$R(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad a = 1, d = 0, b = \frac{i}{\lambda - \mu + i},$$

$$c = \frac{\lambda - \mu}{\lambda - \mu + i}$$

Cette relation peut là encore être symbolisée



Cependant il faut noter que l'espace correspondant à la droite hachurée n'est pas un espace de dimension 2 comme les deux autres en cause : sur cet espace

agissent les opérateurs  $p_n$  et  $e^{q_n}$ ,  $e^{-q_n}$  qui opèrent dans l'espace fonctionnel des fonctions de  $q_n$ . Néanmoins les démonstrations que l'on peut effectuer pour démontrer la commutation d'une famille de matrice de transfert à partir de la relation triangle subsistent mutatis mutandis et l'on a la commutation de  $\text{Tr } T_N(\lambda)$  et  $\text{Tr } T_N(\mu)$  pour tout  $\lambda, \mu$ . Il existe donc sur le problème de Toda une notion de relation triangle ; existe-t-il une notion correspondant à la relation d'inverse ? Pour voir que tel est bien le cas formons le produit suivant où  $\tilde{L}_n$  désigne la transposée de  $L_n$

$$L_n(\lambda)\tau_2 \tilde{L}_n(\mu)\tau_2 = \begin{pmatrix} p_n^{-\lambda} & -e^{q_n} \\ -e^{-q_n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n^{-\mu} & e^{-q_n} \\ -e^{+q_n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_n^{-\lambda} & -e^{q_n} \\ -e^{-q_n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-q_n} \\ q_n & p_n^{-\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (p_n^{-\lambda})e^{q_n} - e^{q_n}(p_n^{-\mu}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous voyons que pour  $\mu = \lambda-1$  nous obtenons la relation

$$L_n(\lambda)\sigma_2 \tilde{L}_n(\mu)\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui implique la relation matricielle globale

$$T_N(\lambda)\sigma_2 \tilde{T}_N(\lambda-1)\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pourrait s'étonner, alors que pour la matrice  $R(\lambda, \mu) = R(\lambda-\mu)$  l'inverse s'obtient en changeant l'argument  $\lambda-\mu$  en son opposé, l'inverse pour la matrice  $L_n$  soit obtenu non pas pour  $\lambda \rightarrow -\lambda$  mais pour  $\lambda \rightarrow \lambda-1$  ; en fait il faut voir cette dernière relation d'inverse plutôt comme la composée de la relation d'inverse et de la relation de crossing  $\lambda \rightarrow 1-\lambda$ . L'école soviétique parle de notion de déterminant généralisé pour rappeler le fait suivant : si l'on considère une matrice  $2 \times 2$ , on a la relation suivante (les coefficients  $a, b, c, d$  sont des  $c$ -nombres ici)

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -c \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (ad-bc)$$

autrement dit la relation écrite sur Toda généralise la relation  $M\sigma_2 \tilde{M}\sigma_2 = \det M.1$ .

Il existe également des modèles sur réseaux analogues de l'exemple de Toda quantique dont la limite du continu redonne le modèle de Sine Gordon quantique : la matrice  $L_n$  s'écrit

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \Pi_n^{-1/2} \varphi(\chi_n) \Pi_n^{-1/2} & \sqrt{S}(\lambda \chi_n^{-1} - \lambda^{-1} \chi_n) \\ \sqrt{S}(\lambda^{-1} \chi_n^{-1} - \lambda \chi_n) & \Pi_n^{1/2} \varphi(\chi_n) \Pi_n^{1/2} \end{pmatrix}$$

où  $\Pi_n$  et  $\chi_n$  sont des exponentielles de  $p_n$  et  $q_n$  et  $\varphi(x) = \sqrt{1+S(x^2+x^{-2})}$ ,  $S$  étant lié à l'espacement  $a$  entre deux points  $n$  et  $n+1$  du réseau, en l'occurrence  $S = \left(\frac{ma}{4}\right)^2$  où  $m$  est une masse.

Nous avons la relation suivante valable sur le réseau

$$L_n(\lambda) \sigma_2 L_n(\lambda e^{-i\gamma}) \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \varphi^2(\lambda e^{-\frac{i\gamma}{2}})$$

Le coefficient multipliant la matrice identité est appelé déterminant généralisé ; à la différence de l'exemple du réseau de Toda ce déterminant n'est plus trivial, égal à l'unité. Ce déterminant est exactement l'équivalent du facteur d'automorphie lié à l'inverse : typiquement dans le cas de la matrice  $S$  du modèle de Sine-Gordon, ou de la fonction de partition du modèle à six vertex, ou encore du modèle de Potts critique nous écrivions des relations matricielles locales

$$L_n(\theta) L_n(-\theta) = 1 \cdot N(\theta)$$

Par exemple dans le cas du modèle de Potts critique ce facteur  $N(\theta)$  valait  $(b-1)(1-q-b)$ . Dans le cas du modèle de Sine-Gordon le facteur d'automorphie associé à l'inverse est, pour un certain  $s$  fini,  $1 + s(\lambda^2 e^{-i\gamma} + \lambda^{-2} e^{i\gamma})$ ,  $s$  étant lié à une autre masse. La relation entre le paramètre spectral  $\lambda$  et la variable rapidité  $\theta$  est  $\lambda^2 e^{-i\gamma} = e^\theta$ .

Le passage à la limite lorsque l'espacement  $a$ , du réseau, tend vers zéro pour donner le modèle de Sine Gordon quantique a été étudié par L.D. Faddeev, E.K. Skljjanin et L.A. Tathadjian <sup>[49]</sup>. Ce facteur, nous l'avons vu, permet de calculer exactement les matrices  $S$  et les fonctions de partition de ces divers modèles comme des produits infinis. Dans la limite  $a \rightarrow 0$  le déterminant généralisé se trivialise et tend vers 1. Le fait de considérer des modèles sur réseau (ce qui est notamment le cas dans les modèles de

mécanique statistique sur réseau) permet la régularisation nécessaire sur ces modèles et permet d'avoir un facteur d'automorphie non trivial.

La notion de déterminant généralisé possède certaines propriétés intéressantes du déterminant : ainsi le déterminant généralisé d'un produit de matrices  $L_n$  est bien le produit des déterminants généralisés. Nous constatons d'autre part que le déterminant généralisé nous montre que la notion de relation d'inverse existe bien sur les équations non linéaires. Dans les exemples que nous avons donnés celle-ci existait conjointement à une notion de relation triangle : on peut donc là encore se demander si l'on ne pourrait regarder des équations non linéaires pour lesquelles existerait seulement une relation d'inverse, sans avoir de relation triangle, et ce d'autant plus que, tout comme pour les problèmes de mécanique statistique, l'existence d'une relation d'inverse semble être une propriété assez fréquente ; il est facile de s'en convaincre dans le cas de matrice  $2 \times 2$  analogues à celles rencontrées dans les cas précédents.

#### h) Les problèmes posés par la recherche des équations d'inverse

Il est possible de voir que le modèle d'Ising bidimensionnel en champ est dual d'un modèle de jauge [50] : si  $\lambda_{ij}$  désigne des variables d'Ising associées aux liaisons  $(i,j)$  la fonction de partition s'écrit alors

$$Z = \sum_{\{\lambda\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{K_1 \lambda_{ij}} \prod_{\langle jk \rangle} e^{K_2 \lambda_{jk}} \prod_{\langle p \rangle} e^{K \cdot \lambda_{ij} \cdot \lambda_{jk} \cdot \lambda_{kl} \cdot \lambda_{li}}$$

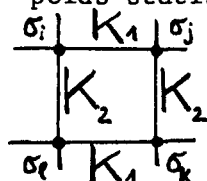
où la somme porte sur toutes les configurations des variables de liaisons  $\lambda_{ij}$ , où le premier et le deuxième produit porte sur toutes les liaisons respectivement horizontales puis verticales et où le troisième produit porte sur toutes les plaquettes,  $(ij),(jk),(kl),(li)$  désignant les quatre liaisons entourants une plaquette donnée. Par dualité on réobtient bien (à un facteur connu près) la fonction de partition du modèle d'Ising avec les constantes de couplages horizontales  $K_2^*$ , verticales  $K_1^*$  et en présence d'un champ magnétique  $K^*$ . De la relation d'inverse sur ce dernier modèle nous tirons par dualité la relation suivante le modèle de jauge :

$$Z(K_1, K_2, K) \cdot Z(-K_1, K_2 + i\pi/2, K + i\pi/2) = 2i \operatorname{sh} 2K_2 \cdot 2i \operatorname{sh} 2K$$

Cependant si l'on cherche à démontrer cette relation à partir des relations locales comme nous l'avons fait dans tous les exemples précédents on rencontre de grandes difficultés indiquant par là que des propriétés fonctionnelles aussi simples que l'équation précédente peuvent être suffisamment "cachées" pour nécessiter quelques modifications, ou équivalences, pouvant être non-locales, pour voir cette symétrie apparaître. Soit maintenant le même modèle de jauge en dimension trois, avec les trois constantes de couplages  $K_1, K_2, K_3$  associées aux liaisons selon les trois directions possibles et  $K'_1, K'_2, K'_3$  les trois constantes de couplages associées aux plaquettes duales respectivement des liaisons précédentes ; il est facile de démontrer qu'un tel modèle est self-dual :  $K_i$  devient  $(K'_i)^*$ ,  $K'_i$  devient  $(K_i)^*$ . Dans la limite  $K'_1 = K'_2 = K'_3 \rightarrow \infty$  le modèle n'est autre que le modèle d'Ising tridimensionnel sans champ anisotrope. Donc par dualité nous avons donc la relation suivante sur le modèle de pure jauge tridimensionnel anisotrope

$$Z(K'_1, K'_2, K'_3) \cdot Z(-K'_1, K'_2 + i\pi/2, K'_3 + i\pi/2) = 2i \operatorname{sh} 2K'_2 \cdot 2i \operatorname{sh} 2K'_3.$$

Là également une démonstration de cette relation à partir de considérations locales s'avère difficile. Dans cet optique on peut également se poser, lorsque plusieurs démonstrations locales de la relation d'inverse existent (c'est le cas par exemple dans l'exemple du modèle d'Ising bidimensionnel où il existe trois démonstrations l'une de type vertex et deux de type "modèle à spin"), le problème de leur équivalence. En fait on peut voir justement sur l'exemple du modèle d'Ising qu'il est possible de formuler ce modèle en un modèle à vertex très simple où il n'est pas possible de voir la relation d'inverse. Considérons le modèle d'Ising. Il peut être vu comme un modèle à spin avec le poids statistique suivant associé à toutes les plaquettes du réseau carré



$$W(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l) = e^{\frac{K_1}{2}(\sigma_i \sigma_j + \sigma_k \sigma_l) + \frac{K_2}{2}(\sigma_i \sigma_k + \sigma_j \sigma_l)}$$

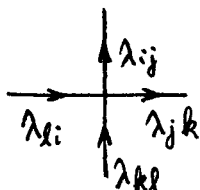
Si nous introduisons comme nouvelles variables les variables de liaisons  $\lambda_{ij} = \sigma_i \sigma_j$ ,  $\lambda_{jk} = \sigma_j \sigma_k \dots$  pour avoir une bijection entre les configurations de spins  $\sigma$  et celles des nouveaux spins  $\lambda$  nous utilisons l'astuce habituelle qui consiste à introduire les contraintes annulant les mauvaises configurations de  $\lambda$  par des termes  $1 + \lambda_{ij} \lambda_{jk} \lambda_{kl} \lambda_{li}$  sur chaque plaquette.



Le poids de Boltzmann associé à chaque plaquette est maintenant

$$W(\lambda_{ij}, \lambda_{jk}, \lambda_{kl}, \lambda_{li}) = e^{\frac{K_1}{2}(\lambda_{ij} + \lambda_{kl}) + \frac{K_2}{2}(\lambda_{jk} + \lambda_{li})} \cdot (1 + \lambda_{ij}\lambda_{jk}\lambda_{kl}\lambda_{li})$$

Si nous interprétons  $\lambda_{ij} \dots$  comme des flèches situées sur le vertex dual de la plaquette en question nous voyons que nous avons introduit un modèle



à vertex très simple. Nous pouvons avec les notations usuelles écrire ce poids de Boltzmann comme une matrice  $4 \times 4$  :

$$\begin{pmatrix} e^{K_1+K_2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & e^{K_1-K_2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & e^{K_2-K_1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & e^{-K_1-K_2} \end{pmatrix}$$

Cette matrice  $4 \times 4$  a de forte similitude avec les matrices  $4 \times 4$  que l'on peut écrire par exemple dans le cas du modèle à huit vertex symétrique. Néanmoins nous voyons qu'elle est à la fois plus simple et plus compliquée (elle correspond à un modèle en champ) que ce dernier modèle. Signalons d'autre part que la correspondance que nous venons d'indiquer ne doit pas être confondue avec la correspondance entre modèle à vertex et modèle à spin (correspondance dite de Kadanoff-Wegner [ 12 ]). Cette correspondance s'établit entre deux modèles d'Ising en l'occurrence découplés et un seul modèle à vertex. Ici la correspondance est "un" modèle à spin en "un" modèle à vertex. Formulé en ces nouveaux termes il devient fort difficile de retrouver aussi bien la relation d'inverse que a fortiori la relation triangle.

## CONCLUSION

=====

## PERSPECTIVES

=====

Dans cette note nous avons exhibé un échantillon de problèmes admettant une relation d'inverse, échantillon, qui, bien qu'assez large, est fort loin d'être exhaustif. On pourra comparer la fréquence d'apparition d'une telle relation au nombre de problèmes et de modèles qui s'avèrent admettre une self-dualité : la relation d'inverse s'avère être une relation exacte sur un modèle infiniment plus fréquente qu'une relation de self-dualité. De plus nous pensons avoir donné quelques arguments et exemples montrant que la relation d'inverse était remarquablement contraignante et riche de conséquences (à la différence d'une relation de self-dualité). Ces deux observations peuvent être considérées comme étant extrêmement encourageantes de façon générale pour tous les problèmes de mécanique statistique sur réseau : il y a là tout un ensemble de propriétés exactes qui doit être exploité.

En fait tout le problème de l'exploitation de ces équations est posé : dans le cas des problèmes complètement intégrables elles offrent un raccourci saisissant pour certains calculs notamment les calculs explicites de fonction de partition (solution "minimale") ; de nombreux problèmes restent néanmoins posé notamment le problème des relations entre ces idées et concepts nouveaux et d'autre concepts plus "classiques" tels que les notions d'ansatz de Bethe par exemple. Pourtant c'est dans le domaine des problèmes non complètement intégrables (dans l'absolu ou simplement pour l'heure) que ces notions peuvent être les plus fructueuses d'autant plus qu'elles constituent pour l'instant la seule approche simple des problèmes multidimensionnels (il n'y a pas à l'heure actuelle de relation tétraèdre qui soit satisfaisante ou simplement physique). C'est également dans ce domaine que se pose plus particulièrement diverses questions : tout d'abord le fait, déjà remarqué, que les exposants critiques du modèle de Potts soient fractionnaires pour les valeurs particulières de  $q$ , nombre d'états, pour lesquelles le groupe  $G$  dégénère suggère la nécessité d'une approche des exposants critiques s'appuyant fortement sur le précédent groupe. Il serait d'autre part intéressant de cerner les contours de l'information manquante et ce, de la façon la plus explicite possible ; inversement possédant une relation d'inverse sur un modèle, il serait utile de pouvoir décrire les conséquences physiques des seules équations d'inverse alliées aux

symétries géométriques du modèle (permutation entre les paramètres du modèle).

Dans le cadre de ces études sur les modèles multidimensionnels a priori non intégrables, le modèle d'Ising tridimensionnel devra être considéré tout particulièrement : si l'on en croit certaines rumeurs, ce modèle, dans la limite de scaling, serait équivalent au modèle de Liouville en dimension  $1+1$  donc à une théorie complètement intégrable, ce qui repose avec plus d'acuité, le problème de la frontière entre les problèmes complètement intégrables et les problèmes a priori non intégrables.

En conclusion on posera également le problème du caractère très général de ces équations fonctionnelles qui est illustré par l'existence d'équations tout à fait analogues dans un ensemble assez vaste de problèmes. On citera l'exemple de l'oscillateur anharmonique qui exhibe des équations étonnamment semblables (Voros [51]). On connaît également les liens entre les problèmes de mécanique statistique et les problèmes combinatoires : les fonctions génératrices de ces problèmes satisfont des relations d'automorphie fort semblables à celles que nous avons écrites [52]. Citons enfin la relation récemment écrite par R.J. Baxter [53] sur le problème du "hard-hexagon" :

$$T(w).T(x^3.w) = 1 + T(x^4.w) \\ (\text{avec } T(x^5.w) = T(w))$$

Elle provient de relations locales là encore ; de plus elle peut s'appliquer à des tailles finies mais elle est d'un type différent, bien qu'analogue, des relations diverses.

Nous avons enfin insisté sur le fait que les équations fonctionnelles, qui portent sur un objet global (fonction de partition), provenaient en fait de relations locales très simples, pourtant dans le cas par exemple, de l'oscillateur anharmonique, ces équations sortent après un assez long calcul et aucune dérivation à partir de principes généraux ou simples n'existe pour l'instant.

De façon générale la question du rôle de telles équations fonctionnelles dans les problèmes de physique est posé.

REFERENCES

- [1] M.T. Jaekel, J.M. Maillard, J. Phys. A15 (1982) 1309-1325
- [2] M.T. Jaekel, J.M. Maillard, J. Phys. A15 (1982) 2241-58
- [3] E. Marchi, J. Vila, J. Phys. A13 (1980) 2465-2477
- [4] H.A. Kramers, G.H. Wannier, Phys. Rev. 60 (1941) 252
- [5] H.N.V. Temperley, E.H. Lieb, Proc. Roy. Soc. Land A322, 251
- [6] H.W.J. Blöte, M.P. Nightingale, B. Derrida, J. Phys. A14 (1981) L45
- [7] B. Derrida, J. Vannimenus, Le Journal de Physique Lettres 41 (1980) L473-476
- [8] M.J. Stephen, L. Mittag, J. Math. Phys. 12 (1971) 445
- [9] C.J. Hamer, J. Phys. A14 (1981) 2981
- [10] J. Ashkin, E. Teller, Phys. Rev. 64 (1943) 178
- [11] R.J. Baxter, Ann. Phys. 70 (1972) 193
- [12] L.P. Kadanoff, F.J. Wegner, Phys. Rev. B4 (1971) 3989
- [13] C. Fan, Phys. Lett. A39 (1972) 136
- [14] T.D. Lee, C.N. Yang, Phys. Rev. 87 (1952) 410
- [15] J.D. Bessis, J.M. Drouffe, P. Moussa, J. Phys. A9 (1976) 2105
- [16] J.M. Maillard, R. Rammal, accepté à J. Phys. A
- [17] A. Gaaf, J. Huijmans, Physica 80A (1975) 149
- [18] E.H. Lieb, T.T. Wu, dans Domb and Green Phase Transition and Critical Phenomena Vol.1
- [19] J. Rae, J. Phys. A6 (1973) L140
- [20] T. Utiyama, Prog. Theor. Phys. 6 (1951) 907-9
- [21] F.Y. Wu, J. Phys. C12 (1979) L317 et L645
- [22] L. Onsager, Phys. Rev. 65 (1944) 117
- [23] R.J. Baxter, H.N.V. Temperley, S.E. Ashley, Philos. Trans. Roy. Soc. Land A358 (1978) 535

- [24] R.J. Baxter, soumis à J. Phys. A (1982)
- [25] B. Berg, M. Karowski, P. Weisz, Nuclear Phys. B134 (1978) 125-132  
P. Weisz, Phys. Letters 67B (1977) 179-182
- [26] M.E. Fisher, Phys. Rev. 113 (1959) 969-81
- [27] R.J. Baxter, I.G. Enting, J. Phys. A11 (1978) 2463
- [28] R.J. Boel, P.W. Kasteleyn, Comm. Math. Phys. 61 (1978) 191
- [29] J. Groeneveld, R.J. Boel, P.W. Kasteleyn, Physica 93A (1978) 138
- [30] P.W. Kasteleyn, R.J. Boel, Comm. Math. Phys. 66 (1979) 167
- [31] J.H.H. Perk, Phys. Lett. 79A (1980) 3
- [32] B.M. Mc Coy, C.A. Tracy, T.T. Wu, J. Math. Phys. 18 (1977) 1058
- [33] T.T. Wu, B.M. Mc Coy, C.A. Tracy, E. Barouch, Phys. Rev. B13 (1976) 316
- [34] M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo, Pub. RIMS Kyoto Univ. 14 (1978) 223-267  
15 (1979) 201-278  
577-629  
871-972
- [35] "Bäcklund Transformations, Lecture Notes in Mathematics n°515 p.238-239
- [36] P.P. Kulish, F.A. Smirnov, Physics Letters 90A (1982) 74-78
- [37] B.M. Mc Coy, T.T. Wu, The Two-dimensional Ising Model, Harvard University Press Cambridge 1973
- [38] T. Lubensky, dans "ill-condensed matter", Les Houches 1978 Session XXXI North Holland pub. page 408 à 475
- [39] N.L. Biggs, On the duality of interaction models math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 80 (1976) 429-36
- [40] A.B. Zamalodchikov, M.I. Monastyrskii, Soviet Phys. J.E.T.P. 50 (1979) 167
- [41] I. Syozi, Prog. Theor. Phys. 5 (1950) 341
- [42] R.V. Ditzian, L.P. Kadanof, J. Phys. A12 (1979) L229
- [43] A. Hintermann, H. Kunz, F.Y. Wu, J. Stat. Phys. 19 (1978) 623
- [44] V.E. Korepin, P.P. Kulish, L.D. Faddeev, J.E.T.P. Lett. 21 (1975) 138

- [45] M.P.M. den Nijs, J. Phys. A12 (1979) 1857
- [46] F.Y. Wu, dans Studies in foundations of combinations Ed. G.C. Rota  
Adv. in Math. Suppl. Stud. Vol.1 p.151 (1978)
- [47] S. Beraha, J. Kahane, J. Comb. Theory B27 (1979) 1
- [48] S. Beraha, J. Kahane, N.J. Weiss, J. Comb. Theory B28 (1980) 52-65
- [49] F.K. Sklyjanin, L.A. Takhtajyan, L.D. Faddeev, Teor. Mat. Fiz. 40  
(1979) 194
- [50] R. Balian, J.M. Drouffe, C. Itzyckson, Phys. Rev. D10 (1974) 3376
- [51] A. Voros, J. Physique, Lettres 43 (1982) L1-L4  
C.R.A.S. 293 (1981) Série I, 709-712
- [52] G.E. Andrews, Studies in Applied Math. Vol.4 (1971) 345-375
- [53] R.J. Baxter, P.A. Pearce, J. Phys. A15 (1982) 897-910

*Manuscrit reçu le 3 janvier 1983*

*Edité par*  
*le Service de Documentation*  
*Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay*  
*91191 GIF-sur-YVETTE Cédex (France)*