

- Note CEA-N-2335 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
Institut de Recherche Fondamentale
Département de Physique Générale
Service de Physique du Solide et de Résonance Magnétique

RELATIONS TRIANGLE-ETOILE EN MECANIQUE STATISTIQUE

par

Jean-Marie MAILLARD

- Avril 1983 -

NOTE CEA-N-2335 - Jean-Marie MAILLARD

RELATIONS TRIANGLE-ETOILE EN MECANIQUE STATISTIQUE.

Sommaire. - Nous nous intéressons à divers problèmes posés par les modèles complètement intégrables : nous regardons d'abord ceux associés à la notion de dimensionnalité d'un modèle et ensuite, et surtout ceux posés par la recherche des relations triangle-étoile généralisées et principalement des relations tétraèdre en tant que critère d'intégrabilité. Nous exposons enfin des idées et méthodes simplifiant la recherche des relations précédentes.

1983

104 p.

Commissariat à l'Energie Atomique

NOTE CEA-N-2335 - Jean-Marie MAILLARD

STAR-TRIANGLE RELATIONS IN STATISTICAL MECHANICS.

Summary. - The authors investigate several questions linked to completely integrable models. The discussion includes a look at the concept of model dimensionality and the problems associated with the search for new star-triangle and tetrahedron relationships, considered as integrability criteria. Finally some methods are described for simplifying the search for the preceding relationships.

1983

104 p.

Commissariat à l'Energie Atomique.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

I - MISE AU POINT ; RAPPELS

- a) La notion de localité d'un modèle ----- p.3
- b) Relation triangle et relation d'inverse ----- p.4
- c) Distinction entre modèles à vertex et modèles à spins ----- p.9

II - PROBLÈMES DE DIMENSIONNALITÉ D'UN MODÈLE

- a) Sur les problèmes intégrables en général ----- p.13
- b) En mécanique statistique ----- p.16

III - LES PROBLÈMES POSÉS PAR LA RECHERCHE DES RELATIONS TRIANGLE OU TÉTRAHÈDRE

- a) Position générale du problème : les exemples du modèle à
8 vertex symétrique et du modèle d'hexagone dur ----- p.23
- b) La recherche de nouvelles relations triangle ----- p.31
- c) La recherche des relations tétraèdre ----- p.39

IV - NOUVELLES APPROCHES POUR LA RECHERCHE DE RELATIONS TRIANGLE OU TÉTRAHÈDRE

- a) Réflexion sur la surdétermination des équations triangle : une
identité algébrique simple sous-jacente au modèle à 8 vertex
symétrique ----- p.52
- b) Les relations triangles et l'invariance par les conjugaisons
(weak-graph duality) ----- p.59
- c) Le critère $\lambda e' \otimes f' = Le \otimes f$ ----- p.61
 - 1) Introduction du critère ----- p.61
 - 2) Lien avec l'algèbre de Zamolodchikov ----- p.68
 - 3) Les liens avec l'ansatz de Bethe et l'existence d'un pseudo-
vide ----- p.71
 - 4) Autres applications du critère qu'au modèle à 16 vertex et
ses dégénérescences ----- p.81
 - 5) Les perspectives ----- p.86

CONCLUSION ----- p.91

INTRODUCTION

L'objet de cette note CEA est de souligner certains problèmes liés aux systèmes complètement intégrables et, de façon plus précise, d'étudier les problèmes associés à la relation triangle-étoile et ses généralisations.

Il a été souligné, dans de précédents articles [1] [2] [3], que la complète intégrabilité des problèmes de mécanique statistique, de théorie des champs (ou d'autres domaines) pouvait être comprise comme ayant à son origine des relations locales simples dites relation de Yang Baxter (relation triangle-étoile [4], relation de Yang [5], relation de factorisation de la matrice S [6]). Nous ne reviendrons pas sur le caractère contraignant de ces relations, notamment sur le développement de leurs conséquences (nombre infini de lois de conservation, famille de matrices de transfert qui commutent...). Il y a un intérêt considérable à trouver des modèles véritablement tridimensionnels ou multidimensionnels, qui admettent une propriété généralisant la relation triangle-étoile (relation tétraèdre). Ceci nous amènera, dans le paragraphe II, à discuter de la possibilité de donner une définition précise, et non ambiguë, de la notion de dimensionnalité d'un modèle et, dans le paragraphe III, nous étudierons ce que signifie dans la pratique, "rechercher" une nouvelle relation triangle-étoile ou tétraèdre, quelles sont les difficultés rencontrées pour établir de telles nouvelles relations, et comment on peut espérer les surmonter. Nous proposerons notamment dans le paragraphe IV certaines solutions simplifiant parfois la recherche précédente.

Mais tout d'abord dans le premier paragraphe, en guise de mise au point, nous allons sur des exemples particuliers, expliciter les trois points suivants :

i) Un des intérêts majeur des relations que nous étudions réside dans leur caractère local (donc simple), qui néanmoins entraîne des conséquences globales importantes. Nous réfléchirons sur cette restriction de "localité".

ii) La relation triangle apparaît comme ayant presque toujours dans son sillage la relation dite "d'inverse" (unitarité en théorie des champs) (la réciproque par contre ne semble pas automatique [1] [2]). Nous regarderons dans quelle mesure la relation triangle implique la relation d'inverse.

iii) Nous avons présenté une opposition [9] entre modèles à spin et modèles à vertex ; nous essayerons de préciser cette opposition en nous aidant de l'exemple du modèle d'hexagone dur.

I - MISE AU POINT ; RAPPELS

a) LA NOTION DE LOCALITE D'UN MODELE

A côté du modèle d'Ising il arrive que l'on considère un modèle en ϕ^4 sur réseau également, pour lequel on n'impose plus au spin S_i de valoir rigoureusement ± 1 ou -1 , mais où simplement on favorise ces valeurs grâce au poids de Boltzmann suivant : $e^{-r(S_i^2-1)^2}$ (d'où le terme en ϕ^4). A la place de ce modèle, nous allons considérer un modèle très voisin, où les spins vaudront ± 1 plus un écart "gaussien" à partir de ce spin d'Ising ; la fonction de partition sera :

$$Z = \int \prod_i \pi dS_i \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{J_{ij}(\sigma_i + S_i)(\sigma_j + S_j) - r \sum_i S_i^2}$$

où $\prod$ désigne le produit sur tous les couples de sites $\langle ij \rangle$ plus proches voisins et où $\sum$ désigne la somme sur toutes les configurations de spins σ_i et $\int \pi dS_i$ les intégrales sur les variables réelles S_i allant de $-\infty$ à $+\infty$. La fonction de partition peut être réécrite :

$$\sum_{\{\sigma\}} e^{\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j} \int \prod_i \pi dS_i \cdot e^{\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} S_i S_j + \sum_i (C_i S_i - r S_i^2)}$$

$$\text{où } C_i = \sum_j J_{ij} \cdot \sigma_j \text{ est la somme}$$

sur tout les sites plus proches voisins de i .

Il est possible d'effectuer ces intégrales gaussiennes, et l'on obtient :

$$\sum_{\{\sigma\}} e^{\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j} e^{\frac{V}{2} \sum_i C_i^2 + \sum_{j,m} C_j C_m \cdot U(jm)}$$

où V est une constante, et $U(jm)$ correspond à un potentiel coulombien : $U(jm) \sim \ln d(j,m)$ lorsque $d(j,m)$, qui désigne la distance est le site j et m , est suffisamment grand. (Le lecteur désireux de détailler ce calcul pourra se reporter à l'appendice de l'article de Chui et Weeks [7]).

On voit donc apparaître entre les seuls spins restant (les spins d'Ising σ_i) une interaction à longue portée (coulombienne de surcroît) alors qu'initialement nous n'avions que des interactions entre plus proches voisins donc locales au sens le plus strict. (Remarquons au passage que l'apparition d'interactions coulombiennes est finalement un phénomène assez banal lié à la spécificité de la matrice d'adjacence entre plus proches voisins). Nous sommes passés d'un modèle avec interactions locales entre plus proches voisins, mais avec des fluctuations gaussiennes autour de spins d'Ising, à un modèle avec des interactions à longue portée entre des spins d'Ising. La notion de localité n'est donc pas une notion absolue ; nous parlerons de relations locales simples impliquant des contraintes sur des objets à caractère global (matrice de transfert, fonction de partition...) : il peut se faire qu'au travers de correspondances analogues aux précédentes, ce qui était une relation locale simple devienne une propriété non locale complexe. Nous avons pris le parti de nous intéresser, et de nous restreindre, aux relations locales simples telles que la relation triangle et ses généralisations.

b) RELATION TRIANGLE ET RELATION D'INVERSE

On constate, dans la plupart des exemples de modèles complètement intégrables connus, que l'on obtient automatiquement dans le sillage de la relation triangle une autre relation beaucoup plus simple, la relation dite d'inverse (unitarité en théorie des champs). M. Gaudin [8] avait résumé cette constatation en disant que ces deux relations réalisaient une représentation isomorphe à la représentation régulière du groupe des permutations ; en effet pour certains objets très proches des matrices S à deux corps, les opérateurs Y de Yang qui s'écrivent

$$Y_{lm}^{ij} = \frac{P_{lm} - X_{ij}}{1 + X_{ij}}, \quad \text{où } P_{lm} \text{ désigne la transposition entre } l \text{ et } m, \text{ on}$$

vérifie par un calcul direct les relations

$$Y_{12}^{ij} Y_{12}^{ij} = 1$$

$$Y_{12}^{jk} Y_{23}^{ik} Y_{12}^{ij} = Y_{23}^{ij} Y_{12}^{ik} Y_{23}^{jk}$$

Cette dernière équation se ramène à l'équation :

$$\begin{aligned} [P_{12} - X_{ij}] [P_{23} - X_{ik}] [P_{12} - X_{ij}] = \\ [P_{23} - X_{ij}] [P_{12} - X_{ik}] [P_{23} - X_{jk}] \end{aligned}$$

qui conduit encore à la relation

$$X_{ik} X_{ij} + X_{ik} X_{jk} = X_{ij} X_{jk}$$

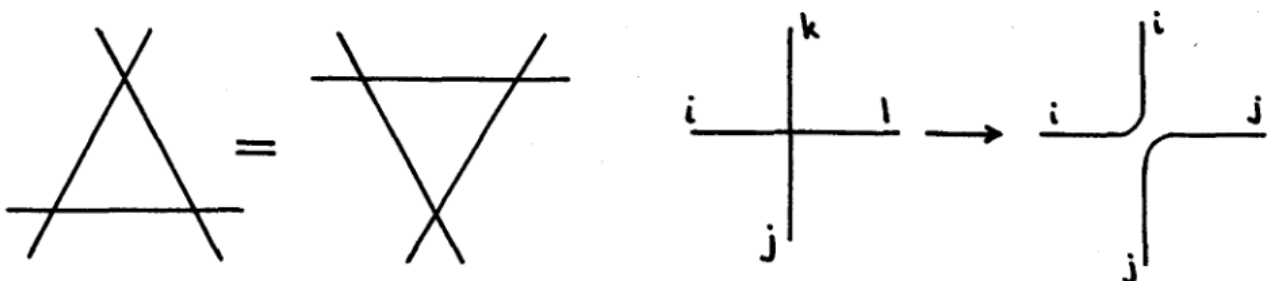
où encore $\frac{1}{X_{jk}} + \frac{1}{X_{ij}} = \frac{1}{X_{ik}}$

ce qui revient à dire que $\frac{1}{X_{lm}}$ est une différence de la forme $k_l - k_m$.

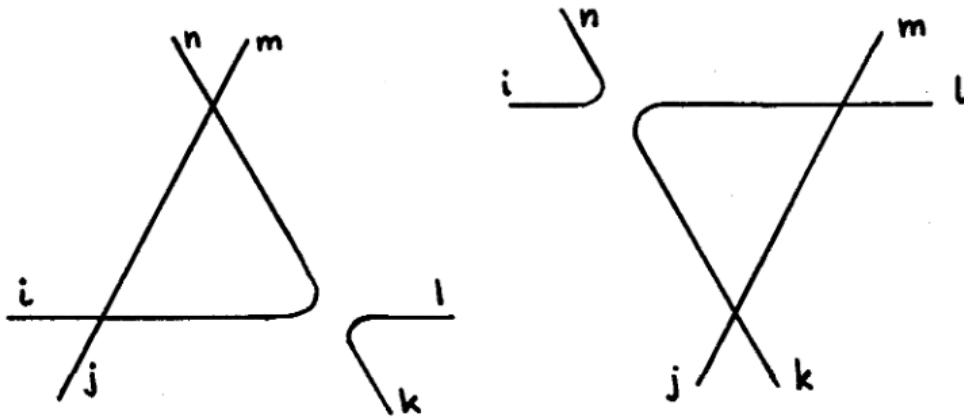
A l'appui de cette interprétation on constate également, sur la plupart des exemples de modèles à vertex, (ou des matrices S à deux corps) que, pour une valeur particulière du paramètre spectral, la matrice associée au vertex (ou la matrice S à deux corps) s'identifie avec l'opérateur de transposition P_{ij} de deux éléments i et j .

Plaçons-nous dans le cadre des hypothèses restrictives suivantes : nous considérons un modèle à vertex pour lequel nous avons une relation triangle et la propriété précédente d'identification de la matrice associée au vertex avec la transposition P_{ij} pour une valeur particulière du paramètre spectral ; dans quelle mesure pouvons-nous conclure qu'il existe une relation d'inverse qui soit conséquence des hypothèses précédentes ?

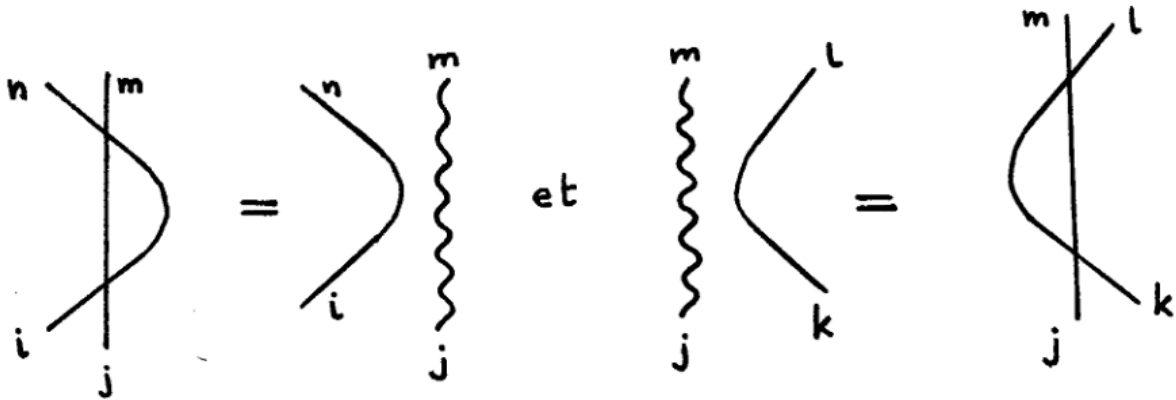
Nous conviendrons de symboliser les hypothèses précédentes géométriquement :



La dernière figure signifie que i doit s'identifier à k et j à l sinon la configuration est interdite (poids nul) ; autrement dit nous avons $(i,j) \rightarrow (k,l) = (j,i)$ (transposition P_{ij}). Considérons maintenant la relation triangle où nous avons pris pour l'un des trois vertex la valeur particulière du paramètre spectral pour laquelle on obtient la transposition ; nous avons géométriquement :



autrement dit nous avons $i \equiv n$ et $k \equiv l$. C'est-à-dire

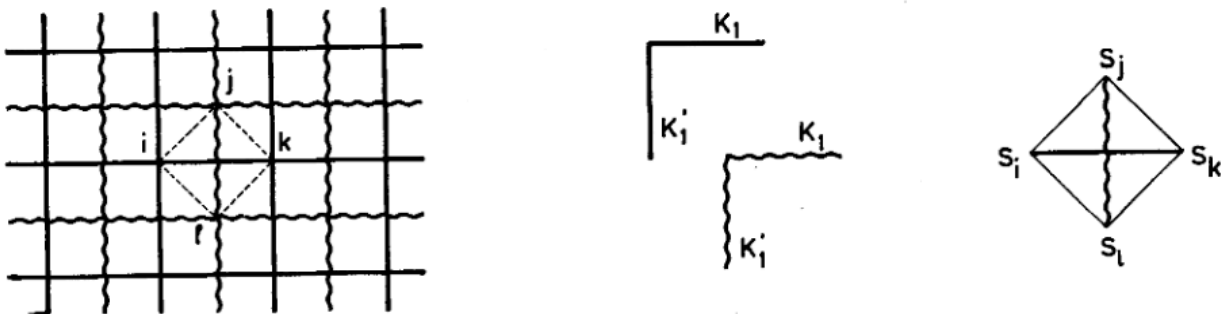


où le trait ondulé liant j à m désigne une fonction dépendant de j et de m , et non plus un δ de Kronecker comme précédemment.

Ces deux relations devant être compatibles nous avons les égalités :



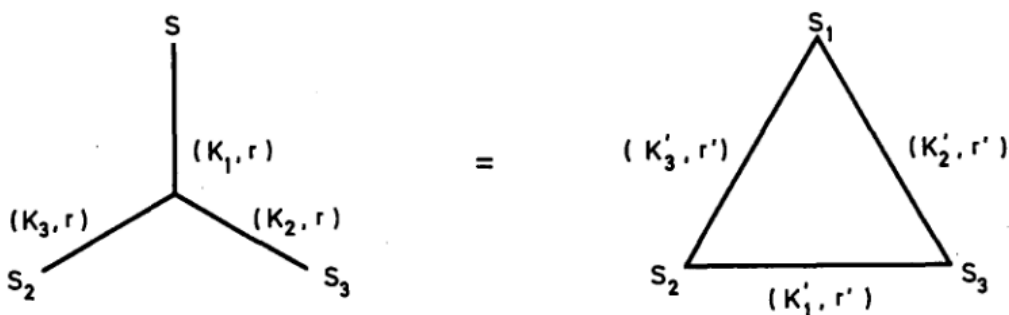
Cette dernière relation n'est autre que la relation d'inverse. Ce raisonnement simple éclaire le fait que la relation triangle s'accompagne très souvent de la relation d'inverse. Cependant nous nous sommes placés dans le cadre d'hypothèses très restrictives (modèle à vertex, existence d'une relation triangle, transposition correspondant à une valeur particulière du paramètre spectral). Ce ne semble pas être le cas en général : nous avons dans plusieurs articles [1] [2] indiqué la possibilité d'avoir une relation d'inverse sans pour autant disposer d'une relation triangle (ou toute autre généralisation de celle-ci), notamment, par exemple, sur les modèles de Potts bidimensionnels ou d'Ising tridimensionnels. Le pendant de cette situation consiste à avoir une relation triangle et (apparemment) pas de relation d'inverse. Nous allons illustrer cette situation sur l'exemple du modèle gaussien. Nous considérons deux modèles gaussiens avec interactions entre plus proches voisins sur deux réseaux carrés découplés identiques :



Nous pouvons maintenant raisonner sur le poids de Boltzmann associé au carré (ijkl) :

$$W_1(S_i, S_j, S_k, S_l) = e^{K_1 S_i S_k + K_1' S_j S_l - r(S_i^2 + S_k^2) - r'(S_j^2 + S_l^2)}$$

Le modèle gaussien admet une relation triangle-étoile

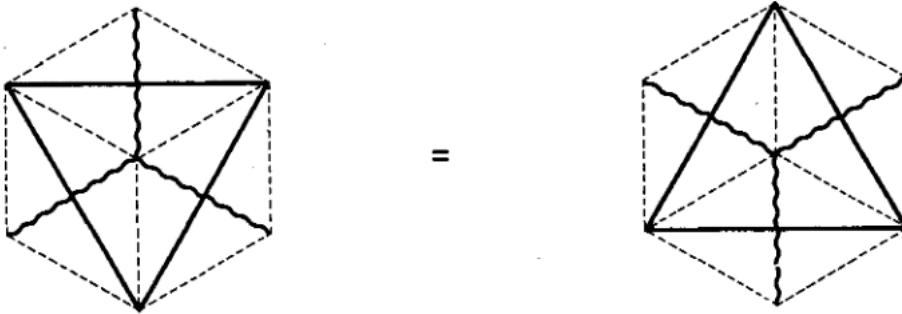


dont la traduction analytique est

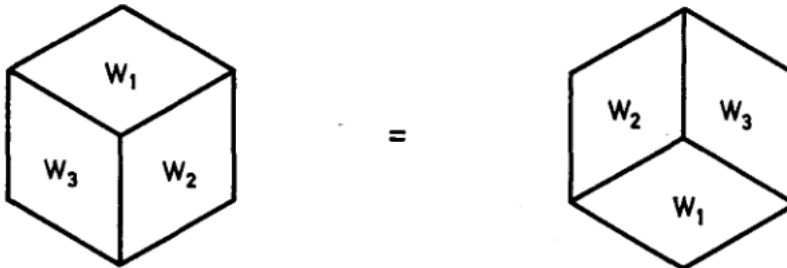
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dS \cdot e^{S(K_3 S_3 + K_2 S_2 + K_1 S_1) - r(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) - 3rS^2}$$

$$= A \cdot e^{K'_1 S_2 S_3 + K'_2 S_1 S_3 + K'_3 S_1 S_2 - r'(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)}$$

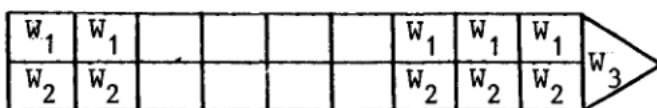
En superposant tête-bêche deux telles relations nous obtenons :



que nous pouvons symboliser en utilisant les poids de Boltzmann W_i que nous avons introduits plus haut :



Considérons la figure suivante qui consiste à accoler les deux "matrices" de transfert engendrées respectivement par W_1 et W_2 et à accoler également un unique poids W_3 :



Utilisant la relation triangle précédente nous obtenons la suite d'égalités entre les figures suivantes :

W_1	W_1				W_1	W_1	W_1	W_1	W_1
W_2	W_2				W_2	W_2	W_2	W_3	W_2

W_1	W_1				W_1	W_1	W_1	W_1	W_1
W_2	W_2				W_2	W_2	W_3	W_2	W_2

En itérant ces égalités, on aboutit en définitive à la figure suivante :

W_3	W_1	W_1					W_1	W_1
	W_2	W_2					W_2	W_2

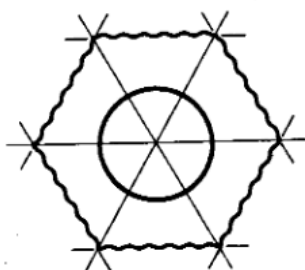
A la limite thermodynamique si l'on néglige le terme W_3 nous avons une notion de famille de matrices de transfert qui commutent (la terminologie de matrice de transfert n'est peut-être pas très appropriée puisque les indices appartiennent à $\mathbb{R}^N$) ; nous avons par ailleurs, dans une autre note CEA [9], indiqué l'absence de relation d'inverse simple pour ce modèle. Nous voyons que l'existence d'une de ces deux notions (relation d'inverse et relation triangle) n'implique pas nécessairement l'existence de l'autre. Nous constatons d'autre part que la notion de complète intégrabilité est surtout liée à l'existence de la relation triangle.

c) DISTINCTION ENTRE MODELES A VERTEX ET MODELES A SPIN

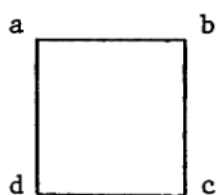
Nous avons été amenés à distinguer [1] [9] les modèles à vertex, où des flèches (éléments de $\mathbb{Z}_2$) (ou bien des éléments d'un groupe plus général) sont attribuées à chaque liaison, et où un poids de Boltzmann est associé à chaque configuration de liaison autour d'un vertex, avec d'éventuelles interdictions pour certaines configurations (règle de la glace...), et d'autre part les modèles à spin où des éléments d'un certain groupe ($\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_p$...) sont associés à chaque site (vertex) et non plus chaque liaison, et où les poids de Boltzmann sont associés à un ensemble de ces vertex (liaisons, interaction à quatre spins...). Un modèle comme le modèle à huit vertex symétrique, peut soit être vu comme un modèle à vertex, soit, en utilisant la correspondance de Kadanoff et Wegner [10], être vu comme un modèle à spin. Aussi nous allons

essayer d'éclairer cette différence en nous appuyant sur l'exemple du modèle d'hexagone dur résolu par R.J. Baxter [11].

Il faut, au départ, considérer un réseau triangulaire où l'on place éventuellement, en chaque site du réseau, un atome (présent ou absent en chaque site, auquel on associe donc une variable $\sigma = 0$ ou 1) tel que son rayon interdise d'avoir de tels atomes présents sur des sites plus proches voisins : chaque atome présent en un site du réseau engendre donc un hexagone d'exclusion :



A chaque atome est associée une fugacité μ . Pour résoudre ce modèle R.J. Baxter a cherché à écrire une relation triangle ; cependant le modèle tel qu'il a été défini précédemment ne semble pas présenter de relation triangle : il a donc été conduit à plonger ce modèle dans un modèle plus vaste qui admette, lui, une relation triangle. Considérons un réseau carré avec le poids de Boltzmann suivant associé à tout carré élémentaire :



$$W(a,b,c,d) = m z^{\frac{a+b+c+d}{4}} e^{Lac+Mbd} t^{-a+b-c+d}$$

sous réserve que $ab = bc = cd = da = 0$

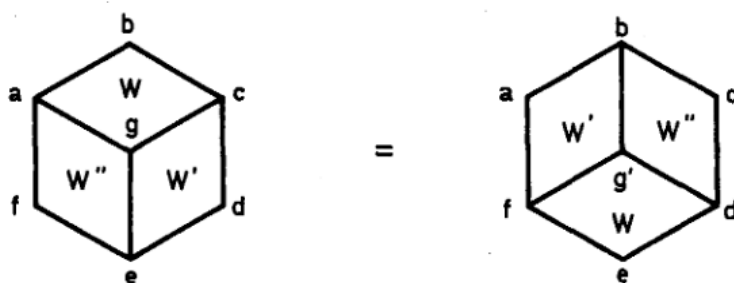
(a, b, c, d valent 0 ou 1)

$W(a,b,c,d) = 0$ sinon.

Lorsque l'on reconstitue le réseau carré à partir de ce motif élémentaire, on constate que chaque site se voit attribuer une fugacité $2\mu + 2\mu'$.

La différence $\mu - \mu'$ est donc une quantité "irrélevante" dont ne dépendra pas la fonction de partition. Néanmoins cette variable supplémentaire est nécessaire afin de pouvoir écrire la relation triangle. Dans la limite $L \rightarrow 0$ et $M \rightarrow -\infty$, on retrouve bien comme cas particulier le modèle d'hexagone dur.

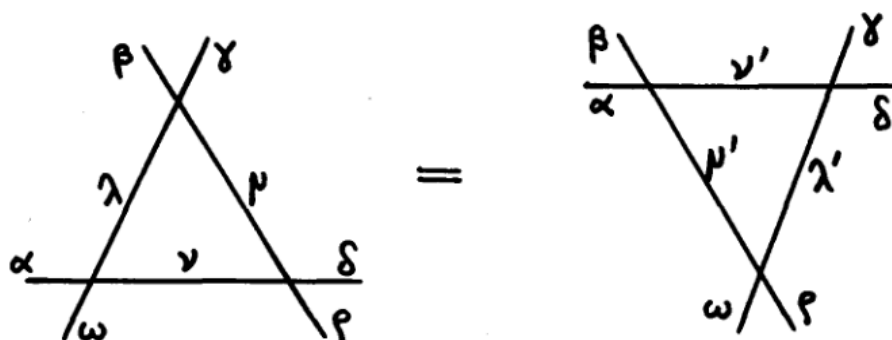
La relation triangle revient à écrire la relation suivante :



dont la traduction analytique est la suivante :

$$\sum_g W(a,b,c,g) W'(c,d,e,g) W''(e,f,a,g) = \sum_{g'} W(d,e,f,g') W'(f,a,b,g') W''(b,c,d,g')$$

Nous rentrerons dans la suite de cette note, dans le détail de ces équations trilinéaires. Nous remarquons l'opposition existant entre cette relation triangle et celle que l'on obtient pour un modèle à vertex : pour un tel modèle nous avons une sommation sur trois variables muettes intermédiaires $\lambda^{(1)}$, $\mu^{(1)}$, $\nu^{(1)}$ comme le montre la figure suivante :



Dans la relation triangle des modèles à spins, la sommation porte, par contre, sur un seul spin, le spin central noté g (resp g').

Le modèle à 8 vertex symétrique est un cas particulier qui, vu comme un modèle à vertex, vérifie la relation triangle des modèles à vertex, et, vu comme un modèle à spin, vérifie également la relation triangle des modèles à spin : du fait des symétries particulières de ce modèle la triple sommation sur λ, μ, ν se ramène à la sommation sur une seule variable. Cependant ceci n'est pas le cas général : le modèle d'hexagone dur peut être vu comme un modèle à 64 vertex comme l'ont indiqué D.W. Wood et M. Goldfinch [12].

Vu comme un modèle à vertex le modèle d'hexagone dur ne semble pas admettre de relation triangle et il n'a pas été possible par le jeu d'autres correspondances d'obtenir sur ce modèle une relation triangle du type vertex. Aussi dorénavant, nous parlerons de modèles à spin et de modèles à vertex en fonction du type de relation triangle (resp. tétraèdre...) que l'on peut écrire pour ces modèles.

II - PROBLÈME DE DIMENSIONNALITÉ D'UN MODÈLE

Nous avons souligné l'importance qu'il y avait à trouver des problèmes complètement intégrables qui soient véritablement des problèmes tridimensionnels ou multidimensionnels, et non des problèmes qui se ramènent, en définitive, à des problèmes plus simples en dimension deux ou moins. Nous allons voir les difficultés qu'il y a à donner un sens précis à la notion de dimensionnalité d'un modèle.

a) LES PROBLÈMES DE DIMENSIONNALITÉ SUR LES PROBLÈMES INTÉGRABLES EN GÉNÉRAL

1) Considérons pour commencer l'exemple des équations non linéaires en dimension $2+1$. Si la notion de systèmes complètement intégrables en dimension $1+1$ est assez bien comprise dans le cadre de la théorie du scattering inverse [13] [14] et grâce à des concepts simples tels que la notion de paire de Lax [15] ($\frac{dA}{dt} = [L, A]$, par exemple, pour l'équation de Korteweg-de-Vries $u_t + 6 u u_x + u_{xxx} = 0$, nous avons $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u$, $A = -4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3(u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} u)$), la notion de systèmes complètement intégrables en dimension $2+1$ est aujourd'hui assez polémique : une généralisation simple de la notion de paire de Lax est celle de paire de Zakharov-Shabat [16] $\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial y} = [A, L]$. Un exemple d'équation non linéaire correspondant à une telle paire est l'équation "bi-dimensionnelle" de KdV : $\frac{\partial}{\partial x} (u_t + 6 u u_x + u_{xxx}) = -3\alpha \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} u$.

Dans l'exemple de l'équation usuelle de KdV (dimension $1+1$), comme dans la plupart des équations non linéaires complètement intégrables, il existe des propriétés de pôles des solutions qui sont remarquables :

Si l'on recherche des solutions de KdV de la forme

$u(x, t) = \sum_{i=1}^n (-2) (x - a_i(t))^{-2}$, il faut, et il suffit, [13] de résoudre le système

$$\dot{a}_i = 6 \sum_{j \neq i} (a_i - a_j)^{-2}$$

et $\sum_{i \neq j} (a_i - a_j)^{-3} = 0$ quel que soit i .

Dans le cas de l'équation de KdV bidimensionnelle on peut, en généralisant cette propriété remarquable, rechercher des solutions méromorphes de celle-ci :

$$u(x,y,t) = \sum_{i=1}^n (-2) \cdot (x - a_i(y,t))^{-2} ,$$

où encore

$$u(x,y,t) = \sum_{i=1}^n (-2) \cdot \wp (x - a_i(y,t)) ,$$

où $\wp$ désigne la fonction $\wp$ de Weierstrass, et où $a_i(y,t)$ est méromorphe ; a_i doit alors vérifier le système d'équation :

$$\begin{cases} a_{iyy} = 4 \sum_{j \neq i} \wp'(a_i - a_j) \\ a_{it} = 3 a_{iy}^2 - 12 \sum_{j \neq i} \wp(a_i - a_j) \end{cases}$$

Ces solutions présentent de grandes analogies avec les solutions méromorphes de l'équation KdV. Parallèlement, si nous considérons une autre équation complètement intégrable, l'équation de Sine-Gordon, il est possible d'en donner une généralisation immédiate qui présente de nombreuses propriétés intéressantes :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = \sin \phi$$

Lorsque l'on effectue une transformation de self-similarité [17] sur cette équation on est ramené à l'équation de Sine-Gordon usuelle. Il est possible d'obtenir des solutions particulières ressemblant à des solitons. Cependant la plupart des auteurs s'accordent à voir dans ces divers exemples des équations faussement bidimensionnelles (2+1) : elles ne sont que des extensions simples des équations intégrables usuelles (dimension 1+1), et en présentent les propriétés et caractéristiques fondamentales sans en présenter de nouvelles.

2) Considérons maintenant les problèmes quantiques de N particules en interaction sur une droite, associés à l'Hamiltonien suivant :

$$H = -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \frac{d^2}{dx_i^2} - \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^M \frac{d^2}{dy_j^2} + \sum_{i<i'}^N 2 V_{AA}(x_i - x_{i'}) + 2 \sum_{j<j'}^M 2 V_{AA}(y_j - y_{j'}) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M 2 V_{AA}(x_i - y_j)$$

$$\text{avec } V_{AA}^-(x) = -\frac{m}{64} \frac{\gamma^2 G}{\text{ch}^2(\frac{m\gamma x}{8})}$$

$$\text{et } V_{AA}^+(x) = \frac{m}{64} \frac{\gamma^2 G}{\text{sh}^2(\frac{m\gamma x}{8})}$$

(dont A.B. Zamolodchikov remarquait le lien avec la limite non relativiste de la matrice S du problème de Sine-Gordon [18]). Il y a deux populations différentes de particules (solitons et antisolitons) auxquelles on associe les coordonnées x et y. Cependant dans le cas N=M on pourrait parfaitement interpréter les x_i et y_i comme les deux coordonnées d'une même particule i dans un espace de dimension deux. Réciproquement certains auteurs dont P.J. Gambardella ont souligné le fait qu'il existe des problèmes quantiques à N corps qui, en dimensions quelconques, étaient susceptibles de conduire à des calculs exacts [19] (nous ne parlons pas de problèmes complètement intégrables puisque nous n'avons pas défini cette notion en dimension supérieure à 1+1). Il en est ainsi de la généralisation en toute dimension du modèle de Calogero, d'interaction en $\frac{1}{x^2}$. Ainsi, en dimension 2+1, l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i^2 + \frac{m\omega^2}{4} \sum_{i>j=1}^N (\vec{r}_{ij})^2 + \lambda_1 \sum_{i>j=1}^N \frac{1}{(\vec{r}_{ij})^2}$$

$$= \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \left(\frac{d^2}{dx_i^2} + \frac{d^2}{dy_i^2} \right) + \frac{m\omega^2}{4} \sum_{i>j=1}^N \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right]$$

$$+ \lambda_1 \sum_{i>j=1}^N \frac{1}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

conduit à des résultats exacts sur divers quantités (vecteurs propres, etc...).

L'analogie entre cet hamiltonien et le précédent est manifeste.

Nous voyons donc qu'une certaine confusion peut exister entre les symétries internes des particules et la dimension de l'espace réel.

3) Compte tenu de ces difficultés dans l'espace réel, il est possible d'envisager de donner une définition de la dimensionnalité d'un modèle qui soit fonction du nombre de paramètres spectraux qui interviennent : dans tous les exemples de modèles complètement intégrables unidimensionnels on dispose d'un seul paramètre spectral, l'impulsion k ou, pour les modèles relativistes, la rapidité Θ . Pour les problèmes en dimensions supérieures plusieurs paramètres spectraux (variables de Mandelstam...) interviendraient a priori.

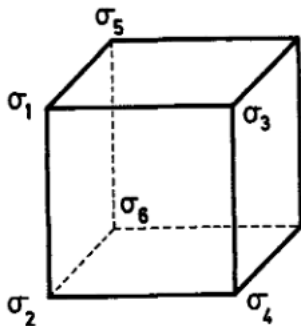
En fait une généralisation, sur laquelle nous reviendrons par la suite, du modèle à huit vertex faisant intervenir non pas les fonctions de Jacobi usuelles d'une seule variable, mais les fonctions Θ de plusieurs variables a été trouvée par de très nombreux auteurs (I.V. Cherednik [20], A.A. Belavin [21], H.C. Ottinger et J. Honerkamp [22] etc...). Cette généralisation montre explicitement qu'il est possible d'avoir un modèle ayant plusieurs paramètres spectraux et qui correspond en fait à un modèle strictement bidimensionnel (au moins lorsqu'on le regarde comme un modèle de mécanique statistique).

La dimension du modèle n'est donc pas liée au nombre de paramètres spectraux. Le modèle précédent est définitivement un modèle bidimensionnel et ce, quel que soit le nombre de ces paramètres : l'important est que ce modèle satisfasse la relation triangle caractéristique de la dimension deux.

b) PROBLEME DE DIMENSIONNALITE EN MECANIQUE STATISTIQUE

Nous allons maintenant aborder la question de la dimensionnalité en mécanique statistique sur réseau, en donnant un certain nombre d'exemples de

modèles exactement solubles, mais dont la véritable dimension est, en quelque sorte, cachée : un des rares exemples fournis par la littérature de modèle tridimensionnel, où l'on sache calculer la fonction de partition, a été donné par Suzuki [23] ; sur un réseau cubique simple on définit le poids de Boltzmann de la façon suivante :



$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ soit ± 1

$$W = e^{K_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 + K_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_5 \sigma_6}$$

Il est facile de vérifier qu'une simple dualité transforme le modèle précédent en un ensemble de modèles d'Ising bidimensionnels découplés. La fonction de partition par site de ce modèle n'est donc que la fonction de partition par site donnée par L. Onsager [24]. Bien qu'ayant des "allures" tridimensionnelles, ce modèle est en fait un modèle bidimensionnel déguisé. Considérons maintenant l'exemple très simple du modèle d'Ising unidimensionnel avec conditions libres

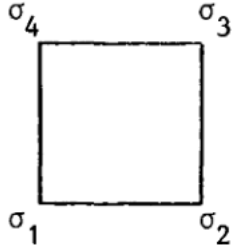
$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \prod_i e^{K_1 \sigma_i \sigma_{i+1}}$$

Effectuons le changement de variables $\lambda_i = \sigma_i \sigma_{i+1}$ qui découple les différentes sommations dans le calcul de la fonction de partition :

$$Z = \prod_i \sum_{\lambda_i = \pm 1} e^{K_1 \lambda_i} = (\text{ch} K_1)^N$$

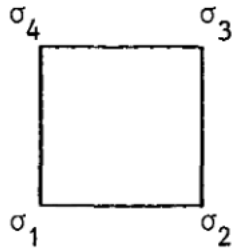
La fonction de partition par site n'est autre que la fonction de partition par site d'un problème avec un site isolé (dimension 0) : le problème a une dimension apparente de 1 et une dimension réelle nulle. De même

le modèle bidimensionnel sur réseau carré, ayant pour poids de Boltzmann sur le motif carré élémentaire :



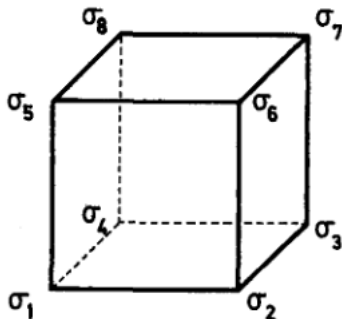
$$W = e^{K_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}$$

est en fait un modèle de dimension nul (il suffira de répéter par deux fois le raisonnement précédent). Par contre le modèle bidimensionnel sur réseau carré avec le poids de Boltzmann suivant sur le motif élémentaire :



$$W = e^{K_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 + K_2 \sigma_1 \sigma_2 + K_2 \sigma_3 \sigma_4}$$

est en fait un modèle unidimensionnel (la fonction de partition par site est la même que celle du modèle d'Ising unidimensionnel en champ magnétique $2 K_2$). En dimension trois, le modèle sur réseau cubique simple avec le poids de Boltzmann suivant sur les cubes élémentaires :



$$W = e^{K \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6 \sigma_7 \sigma_8}$$

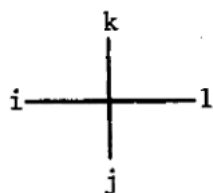
est un modèle de dimension réelle nulle.

On peut également avoir une dimension réelle égale à 1 avec le poids

$$W = e^{K_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6 \sigma_7 \sigma_8 + K_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_5 \sigma_6 + K_2 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_7 \sigma_8} \text{ etc...}$$

A ce niveau il est encore possible de reconnaître, sur l'expression explicite de W , la dimension réelle du modèle. Cependant si, à partir des expressions précédentes, on effectue diverses opérations (dualité, traces partielles, décorations etc...) il deviendra vite particulièrement difficile de reconnaître cette dimension réelle.

Nous nous sommes intéressés aux modèles à spins, considérons maintenant les mêmes problèmes de dimensionnalité sur les modèles à vertex. On peut rappeler les exemples donnés par J. Rae [25] qui constituent des modèles bidimensionnels de dimension réelle 1. Donnons d'autres exemples. Considérons le modèle à vertex suivant :



i, j, k, l valent ± 1 (flèches)

si $ij \neq kl$ la configuration est interdite ; autrement dit $l = i \cdot \varepsilon$ et $k = j \cdot \varepsilon$, ε valant ± 1 . Le poids de Boltzmann dépend uniquement de ε : en d'autres termes nous avons :

$$W(i, j, k, l) = \delta_{ijkl, 1} \cdot W(il)$$

Selon des notations devenues classiques, on peut écrire $W(i, j, k, l)$ comme une matrice 4×4 faisant passer des quatre états de (i, j) aux quatre états de (k, l) . En l'occurrence cette matrice s'écrit, si l'on note $W(+1) = a$, $W(-1) = b$:

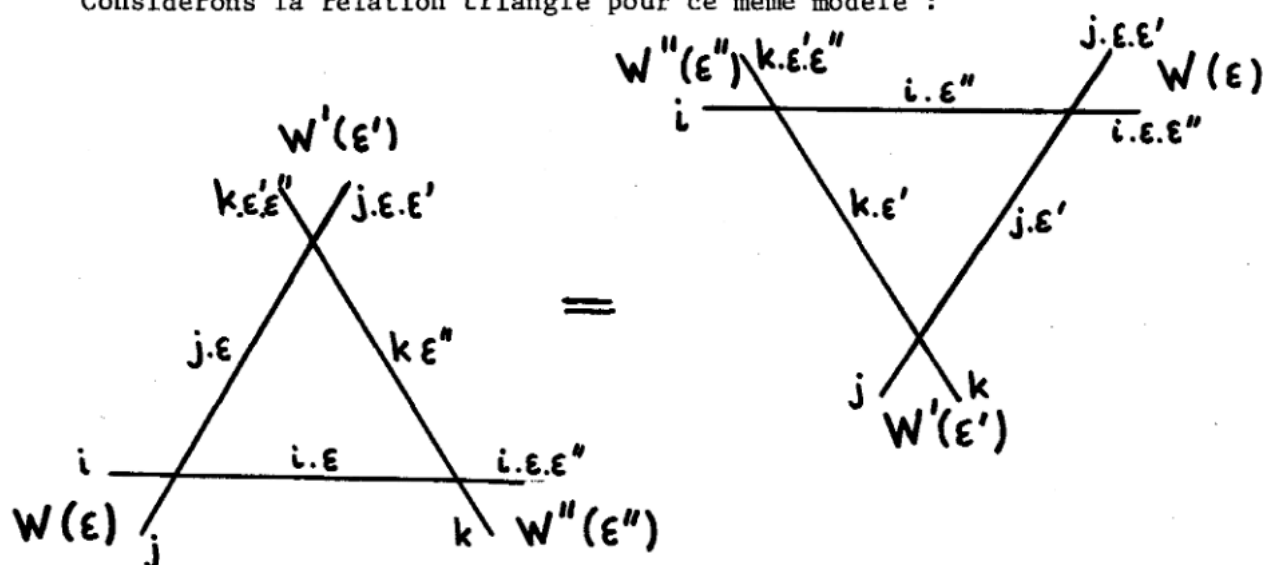
$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Cette forme doit être rapprochée de celle du modèle à 8 vertex symétrique :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

elle correspond donc à faire les deux dégénérescences suivantes : $a \rightarrow b$ et $c \rightarrow d$.

Considérons la relation triangle pour ce même modèle :



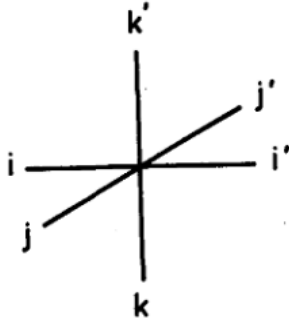
L'écriture analytique des relations triangles s'exprime, $i, j, k, i\epsilon\epsilon'', j\epsilon\epsilon', k\epsilon'\epsilon''$ étant fixés, par les équations suivantes : (en appelant $\lambda' = \epsilon\epsilon'', \lambda'' = \epsilon\epsilon', \lambda = \epsilon'\epsilon''$ qui sont donc fixés et tels que $\lambda\lambda'\lambda'' = 1$)

$$\sum_{\epsilon} W(\epsilon) W'(\epsilon\lambda'') W''(\epsilon\lambda') = \text{idem.}$$

Autrement dit nous avons là un exemple de modèle qui satisfait toujours la relation triangle quels que soient W, W' et W'' ! Nous reviendrons de façon plus précise, lorsque dans le paragraphe III nous étudierons les relations triangle et tétraèdre, sur ces solutions exotiques. En fait on peut facilement se convaincre que ce modèle est un modèle de dimension réelle nulle (la variable que nous avons appelée ϵ est un spin indépendant n'interagissant avec aucun autre spin ou variable). La fonction de partition par site d'un tel modèle est

$$\sum_{\epsilon} W(\epsilon) = a + b$$

Généralisons cet exemple en dimension trois :

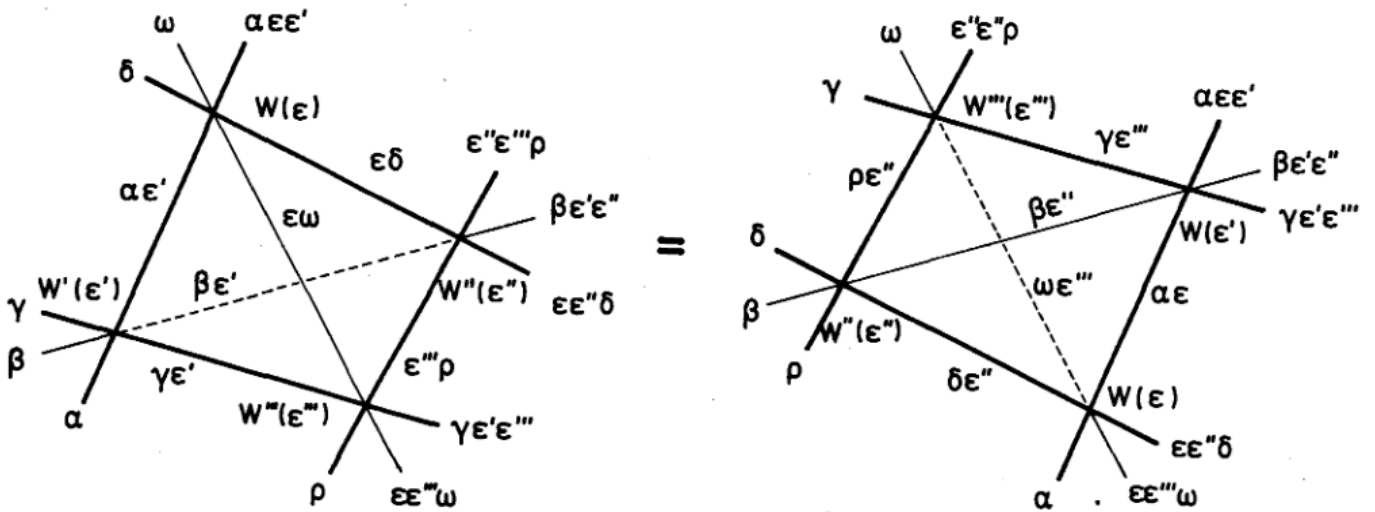


$ii' = jj' = kk'$ Toute autre configuration est interdite.

Le poids de Boltzmann ne dépend que de cette valeur commune que nous notons ε :

$$W(i,j,k,i',j',k') = \delta_{ii',jj'} \cdot \delta_{ii',kk'} \cdot W(ii')$$

Nous considérons la relation tétraèdre pour ce modèle :



Là encore $\alpha, \beta, \dots, \omega, \alpha\varepsilon\varepsilon', \beta\varepsilon'\varepsilon'', \dots, \omega\varepsilon\varepsilon'''$ doivent être considérés comme fixés et donc $\varepsilon\varepsilon', \varepsilon\varepsilon'', \varepsilon\varepsilon''', \varepsilon'\varepsilon'', \varepsilon'\varepsilon''', \varepsilon''\varepsilon'''$. Il n'y a donc qu'un seul degré de liberté : la variable muette ε . Les équations s'écrivent alors en posant :

$$\lambda_1 = \varepsilon \varepsilon', \lambda_2 = \varepsilon \varepsilon'', \lambda_3 = \varepsilon \varepsilon''',$$

$$\sum_{\varepsilon} W(\varepsilon) W'(\varepsilon \lambda_1) W''(\varepsilon \lambda_2) W'''(\varepsilon \lambda_3) = \text{idem.}$$

A nouveau nous constatons que, pour ce modèle particulier, les relations tétraèdre sont automatiquement vérifiées ! Nous obtenons ainsi un exemple, malheureusement trivial, de relation tétraèdre (on peut se convaincre facilement que là aussi le modèle est de dimension 0).

III - LES PROBLÈMES POSÉS PAR LA RECHERCHE DES RELATIONS TRIANGLE OU TÉTRAHÈDRE

a) POSITION GÉNÉRALE DU PROBLÈME : LES EXEMPLES DU MODÈLE A 8 VERTEX SYMÉTRIQUE ET DE L'HEXAGONE DUR

1) Considérons tout d'abord le cas du modèle à 8 vertex symétrique . Nous utiliserons les notations traditionnelles (a,b,c,d) , (a',b',c',d') , (a'',b'',c'',d'') pour les paramètres respectifs des trois poids W , W' , W'' intervenant dans la relation triangle. Avec ces notations nous pouvons maintenant écrire explicitement la relation triangle dans ces variables. Il va s'agir de 6 équations trilinéaires. Nous avons pris des conventions sur les vertex qui leur font jouer des rôles symétriques :

$$\left[\begin{array}{l} ad'd'' + cb'b'' = ac'c'' + ca'a'' \\ da'd'' + bc'b'' = ac'a'' + ca'a'' \\ dd'a'' + bb'a'' = aa'c'' + cc'a'' \\ \\ dc'b'' + ba'd'' = ab'd'' + cd'b'' \\ db'c'' + bd'a'' = ad'b'' + cb'd'' \\ db'a'' + bd'c'' = da'b'' + bc'd'' \end{array} \right.$$

Nous voyons que ces équations se groupent naturellement en deux groupes de trois équations. Le deuxième groupe disparaît lorsque l'on considère le cas plus simple du modèle à 6 vertex ($d = d' = d'' = 0$).

Pour résoudre ce système d'équations, on peut, par exemple, le considérer comme un système linéaire dans les variables a'' , b'' , c'' et d'' . Nous avons alors affaire à un système de 6 équations homogènes, pour 4 variables. Pour qu'un tel système admette d'autres solutions que la solution triviale $a''=b''=c''=d''=0$ il faut qu'un certain nombre de déterminants s'annulent :

$$\varphi_i(a,b,c,d,a',b',c',d') = 0.$$

Leur calcul est quelque peu fastidieux, mais surtout il n'est pas immédiat de s'apercevoir que l'ensemble de ces nouvelles équations se "factorisent", en quelque sorte, sous la forme

$$\varphi_1(a,b,c,d) = \varphi_1(a',b',c',d')$$

$$\varphi_2(a,b,c,d) = \varphi_2(a',b',c',d')$$

$$\text{avec } \varphi_1(a,b,c,d) = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab}$$

$$\varphi_2(a,b,c,d) = \frac{cd}{ab}$$

L'équation $\varphi_1(a,b,c,d) = \text{Cte}$ est une quadrique, de même que l'équation $\varphi_2(a,b,c,d) = \text{Cte}$. Nous retrouvons la caractérisation, bien connue, des courbes elliptiques comme intersection de quadriques. φ_1 et φ_2 vont fixer le module k des fonctions elliptiques et un point de normalisation η , rendant naturelle l'uniformisation suivante :

$$\varphi_1 = 2 \operatorname{cn}(2\eta) \operatorname{dn}(2\eta)$$

$$\varphi_2 = k \operatorname{sn}^2(2\eta)$$

$$a = \rho \operatorname{sn}(v + 2\eta)$$

$$b = \rho \operatorname{sn}(2\eta)$$

$$c = \rho \operatorname{sn}(v)$$

$$d = \rho \cdot k \cdot \operatorname{sn} 2\eta \operatorname{sn}(v + 2\eta) \operatorname{sn}(v)$$

Avec cette uniformisation les équations trilinéaires reviennent à dire que k et η ont des valeurs communes pour W, W', W'' et aussi que l'on a la relation $v + v' = v''$ sur les paramètres spectraux.

L'exemple du modèle à 6 vertex correspond à faire dégénérer le module k des fonctions elliptiques sur l'une des deux valeurs 0 ou 1 (les sinus elliptiques deviennent respectivement le sinus ordinaire, pour $k=0$, et la tangente hyperbolique pour $k=1$). On a pour $k=1$:

$$a = \rho \operatorname{th}(v + 2\eta) \quad , \quad b = \rho \operatorname{th}(2\eta)$$

$$c = \rho \operatorname{th} v \quad \quad \quad d = \rho \operatorname{th} 2\eta \operatorname{th}(v + \eta) \operatorname{th}(v)$$

qui conduit à la relation

$$a = b + c + d \quad \text{lorsque } k=1 \quad (d=0 \text{ lorsque } k=0)$$

En fait, on peut voir que par des transformations du type "weak-graph duality" (conjugaisons), on peut faire se correspondre ces deux restrictions qui sont donc équivalentes. (Incidentement on remarque que ces restrictions sont bien stables par la relation d'inverse comme il se doit :

$$\text{l'inverse s'écrit } a \rightarrow \frac{a}{a^2 - d^2}, \quad b \rightarrow \frac{b}{b^2 - c^2}, \quad c \rightarrow \frac{-c}{b^2 - c^2}, \\ d \rightarrow \frac{-d}{a^2 - d^2};$$

$$a = b + c + d \text{ devient } \frac{a}{a^2 - d^2} - \left(\frac{-d}{a^2 - d^2} \right) = \frac{b}{b^2 - c^2} - \frac{-c}{b^2 - c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a - d} = \frac{1}{b + c} \Leftrightarrow a = b + c + d$$

qui est donc bien stable par la relation d'inverse).

Il est possible de faire dégénérer encore une fois de plus le modèle en imposant simultanément les deux restrictions $a = b + c + d$ et $d = 0$. L'uniformisation ne s'effectue plus qu'avec des fonctions rationnelles :

$$\begin{cases} a = \rho(v + 2\eta) \\ b = \rho \cdot 2\eta \\ c = \rho v \\ d = 0 \end{cases}$$

Les équations trilinéaires reviennent encore à écrire l'équation suivante sur les paramètres spectraux :

$$v + v' = v''$$

La matrice 4x4 qui correspond au poids de Boltzmann associé à un vertex (matrice S à deux corps) s'écrit alors :

$$L_n = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \rho \cdot 2\eta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \rho v \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit $L_n = \rho \cdot 2\eta \cdot \mathbf{1} + \rho \cdot v \cdot P_{ij}$ où P_{ij} désigne une transposition.

La relation triangle et l'équation $v + v' = v''$, s'identifient à la relation algébrique donnée en I.b.

Cette matrice correspond au modèle de Schrödinger non linéaire quantique ou bien encore au modèle dit XXX [26]. On peut reprendre l'analyse du modèle à 8 vertex symétrique en utilisant d'autres notations : il est également courant d'écrire la matrice L_n , (4x4), en la décomposant sur un produit tensoriel de matrice de Pauli :

$$L_n = \sum_{i=0}^3 W_i \cdot \sigma_i \cdot \tau_i$$

σ_0, τ_0 désignent la matrice identité 2x2 et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (resp τ_1, τ_2, τ_3) les matrices de Pauli usuelles. La correspondance entre les paramètres précédents a, b, c, d et les nouveaux paramètres W_0, W_1, W_2, W_3 est la suivante :

$$a = W_0 + W_3, \quad b = W_0 - W_3, \quad c = W_1 + W_2, \quad d = W_1 - W_2.$$

Si l'on réécrit les relations trilineaires précédentes en effectuant des combinaisons linéaires appropriées on obtient :

$$\begin{cases} W_0 W'_2 W''_1 + W_3 W'_1 W''_2 + W_1 W'_3 W''_0 + W_2 W'_0 W''_3 = 0 \\ W_0 W'_1 W''_2 + W_3 W'_2 W''_1 + W_1 W'_0 W''_3 + W_2 W'_3 W''_0 = 0 \\ W_1 W'_3 W''_2 + W_2 W'_0 W''_1 + W_3 W'_1 W''_0 + W_0 W'_2 W''_3 = 0 \\ W_1 W'_0 W''_2 + W_2 W'_3 W''_1 + W_3 W'_2 W''_0 + W_0 W'_1 W''_3 = 0 \\ W_2 W'_1 W''_0 + W_1 W'_2 W''_3 + W_3 W'_0 W''_1 + W_0 W'_3 W''_2 = 0 \\ W_1 W'_2 W''_0 + W_2 W'_1 W''_3 + W_0 W'_3 W''_1 + W_3 W'_0 W''_2 = 0 \end{cases}$$

Nous voyons que ces équations possèdent la symétrie S_3 (les trois poids W, W' et W'' jouent des rôles symétriques). D'autre part ces équations possèdent également une symétrie $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$; en effet si nous introduisons l'opérateur $A = I + (01)(23) + (02)(13) + (03)(12)$, où (ij) désigne la transposition entre les indices i et j dans une expression, et I désigne l'opérateur

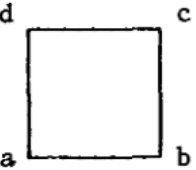
identité (par exemple (01) (23) $W_0 W_2' W_1'' = W_1 W_3' W_0''$), les équations s'écrivent :

$$A(W_0 W_2' W_1'') = 0, \quad A(W_0 W_1' W_2'') = 0 \quad \text{etc...}$$

L'étude précédente (recherche des deux quadriques φ_1 et φ_2) peut également être effectuée à l'aide de ces nouvelles variables. Mais là encore la propriété remarquable, qui assure une uniformisation du problème, à savoir cette propriété de "factorisation" des déterminants, est délicate à voir.

2) Mettons maintenant en évidence sur le modèle de l'hexagone dur, cette même propriété de séparation en "invariants algébriques" φ_i à partir des équations trilinéaires.

Rappelons les notations :

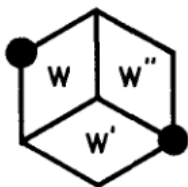


$$W(a,b,c,d) = m z^{\frac{(a+b+c+d)}{4}} e^{Lac+Mbd} \cdot t^{b+d-a-c}$$

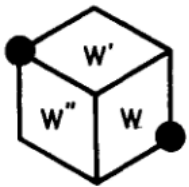
si $ab = bc = cd = da = 0$

$W = 0$ sinon

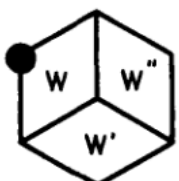
Comme pour tout modèle d'exclusion, les relations trilinéaires sont assez faciles à établir :



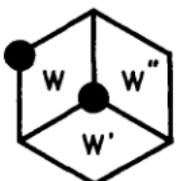
=



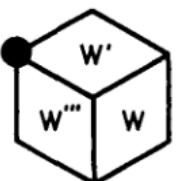
ne fournit pas d'équation.



+

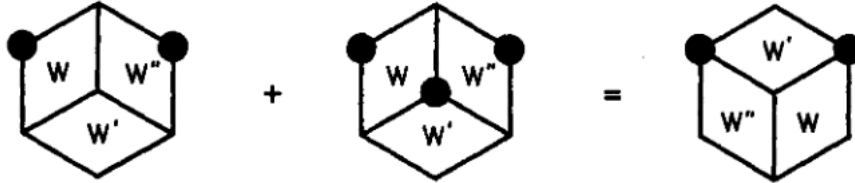


=

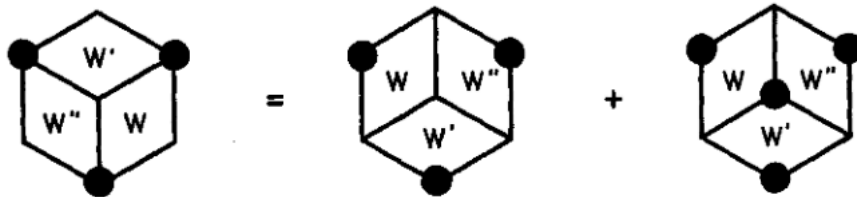


$$e^{Ls^2} + s = (z'z'')^{1/2}$$

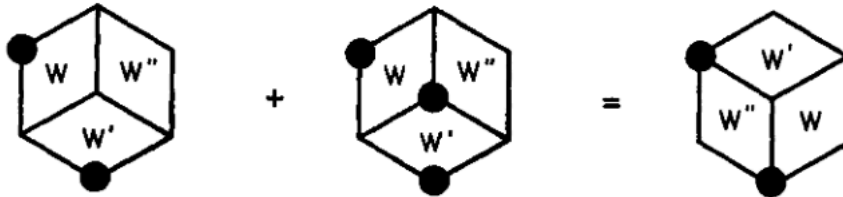
en posant $s = (tt't'')^{-1} \cdot (zz'z'')^{1/4}$,



$$s^2 + s^3 + e^{L+L''} = e^{M'} \cdot z(z'z'')^{1/2}$$



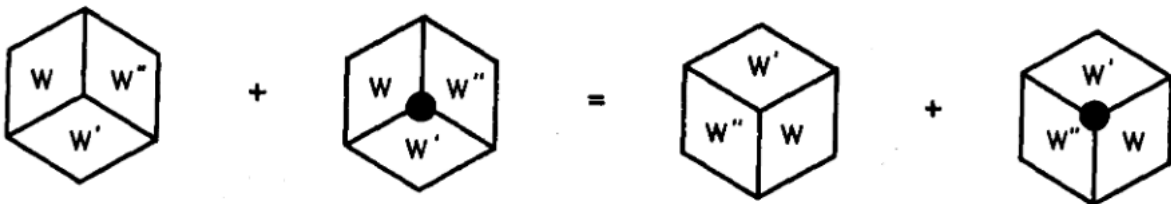
$$e^{M+M'+M''} \cdot (zz'z'') = s^3 + s^4 + e^{L+L'+L''}$$



$$\frac{z^{1/4} z'^{1/4}}{tt'} (1 + s \cdot e^{L+L'}) = e^{M''} tt't''(zz'z'')^{1/4} z''^{1/4} t''$$

$$\Leftrightarrow e^{M''} z''(zz')^{1/2} = s^2 + s^3 e^{L+L'}$$

enfin



ne fournit pas d'équation.

En résumant, nous avons donc les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \quad (z'z'')^{1/2} &= s + s^2 \cdot e^L \\ (2) \quad z(z'z'')^{1/2} e^M &= s^2 + s^3 \cdot e^{L'+L''} \\ (3) \quad zz'z'' \cdot e^{M+M'+M''} &= s^3 + s^4 \cdot e^{L+L'+L''} \end{aligned}$$

ainsi que toutes les équations déduites de celles-ci en permutant W, W' et W''.

Nous utiliserons les notations évidentes :

$$(2') \text{ pour l'équation } z'(zz'')^{1/2} e^{M'} = s^2 + s^3 \cdot e^{L+L''} \text{ et de même } (1'), (1''), (2'').$$

Formons $e^{L'}(2') - e^L(2'')$ nous obtenons :

$$(zz'z'')^{1/2} \left[z'^{1/2} \cdot e^{L'+M'} - z'^{1/2} \cdot e^{L+M} \right] = s^2 (e^{L'} - e^L) \quad (I)$$

D'autre part en formant $(1') - (1)$ nous avons :

$$\begin{aligned} (s + s^2 e^{L'}) - (s + s^2 e^L) &= (zz'')^{1/2} - (z'z'')^{1/2} \\ &= (zz'z'')^{1/2} \left[z'^{-1/2} - z^{-1/2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{d'où } z'^{1/2} \cdot e^{L'+M'} - z'^{1/2} e^{L+M} = z'^{-1/2} - z^{-1/2}$$

$$\Rightarrow z'^{1/2} e^{L'+M'} - z'^{-1/2} = z^{1/2} e^{L+M} - z^{-1/2} = \Delta_1$$

Formons $e^{L'}(1) - e^L(1')$:

$$z''^{1/2} \cdot \left[z'^{1/2} \cdot e^{L'} - z'^{1/2} \cdot e^L \right] = s \cdot (e^{L'} - e^L) \quad (II)$$

Formons $(2') - (2'')$:

$$(zz'z'')^{1/2} \left[z'^{1/2} \cdot e^{M'} - z'^{1/2} \cdot e^M \right] = s^3 e^{L''} (e^L - e^{L'}) \quad (III)$$

$$\begin{aligned}
 & s^2(e^L - e^{L'}) + s^3 e^{L''}(e^L - e^{L'}) \\
 & = s(e^L - e^{L'}) (s + s^2 e^{L''}) = (\text{en utilisant 1''}) \\
 & s(e^L - e^{L'}) (zz')^{1/2} = s(e^L - e^{L'}) \frac{(zz'z'')^{1/2}}{z''^{1/2}}
 \end{aligned}$$

en utilisant maintenant (I), (II) et (III) nous arrivons à l'équation :

$$\begin{aligned}
 & z^{1/2} e^{L+M} - z^{1/2} e^{L'+M'} + z^{1/2} e^{M'} - z^{1/2} e^M - z^{1/2} e^L + z^{1/2} e^{L'} = 0 \\
 \Rightarrow & z^{1/2} (e^{L+M} - e^M - e^L) = z^{1/2} (e^{L'+M'} - e^{M'} - e^{L'}) = \Delta_2
 \end{aligned}$$

Le dernier module Δ_3 vaut :

$$\Delta_3 = z^{-1/2} e^{-L} + z^{-1/2} e^{-M} - z^{-1/2} e^{-L-M} - z^{1/2} \cdot e^{L+M}$$

Ce dernier module est plus compliqué à obtenir que les deux précédents ; il faut en l'occurrence former $e^{-L}(1) - e^{-L'}(1')$ et $e^{-L'}(2'') - e^{-L}(2')$, équations à partir desquelles on obtient l'équation

$$z^{1/2} \cdot e^{M-L'} - z^{1/2} \cdot e^{M'-L} = s(z^{-1/2} \cdot e^{-L'} - z^{-1/2} \cdot e^{-L})$$

Il faut ensuite associer cette équation à l'équation $z^{-1/2} e^{-M}(2'') - z^{-1/2} e^{-M'}(2')$ et à l'équation

$$(z^{1/2} \cdot e^{M-L'} - z^{1/2} \cdot e^{M'-L}) \cdot (2) + (z^{-1/2} \cdot e^{-L-M} - z^{-1/2} \cdot e^{-L'-M'}) \cdot (3)$$

pour aboutir à l'équation $\Delta_3(z, L, M) = \Delta_3(z', L', M')$.

Ces trois invariants induisent (M. Gaudin communication privée) une uniformisation elliptique qui est donnée dans l'appendice 1.

Nous voyons que, si la marche à suivre est a priori simple (éliminer z' , L'' , M'' et surtout s) les calculs sont tout de même assez fastidieux pour réussir à écrire les équations restantes sous une forme "séparée" :

$$\varphi_i(z, L, M) = \varphi_i(z', L', M').$$

En conclusion de cette première partie, nous remarquons que l'existence des invariants algébriques précédents, communs aux trois poids W, W', W'' , est une propriété tout à fait remarquable associée aux relations triangle et plus précisément à leurs équations trilinéaires correspondantes. C'est cette propriété remarquable qui permet l'uniformisation de ces modèles. Dans la recherche de nouvelles relations triangle (et donc de nouveaux modèles exactement solubles) l'obtention de tels modules à partir des relations trilinéaires, ou de toute autre manière, va donc s'avérer une étape capitale et pratiquement obligatoire ; or les exemples que nous avons donnés étaient extrêmement simples : en général la seule écriture des équations trilinéaires s'avère fort longue et fastidieuse, quant à l'obtention d'invariants algébriques éventuels, elle est alors d'un degré supplémentaire de difficulté. De plus, si de tels invariants n'existent pas, il est pratiquement impossible de s'en apercevoir par le calcul. Il est donc important, si l'on désire obtenir de nouvelles relations triangles, qui ne soient pas des généralisations plus ou moins immédiates de relations déjà connues, de mettre au point des méthodes nouvelles permettant de trouver de la façon la plus simple possible ces modules. Nous donnerons quelques unes de ces méthodes dans le paragraphe IV.

b) LA RECHERCHE DE NOUVELLES RELATIONS TRIANGLE

1) La façon la plus simple d'obtenir un nouveau modèle exactement soluble en mécanique statistique est assurément d'obtenir une nouvelle relation triangle et ce bien avant de chercher à effectuer les constructions de vecteurs propres pour les matrices de transfert. La première idée qui vient à l'esprit consiste à généraliser des relations triangles déjà existantes : la matrice S du modèle de Sine-Gordon (modèle à symétrie $O(2)^{(*)}$) étant connue, on a cherché à regarder la propriété de factorisation de la matrice

^(*) Du point de vue Lagrangien la symétrie $O(2)$ de Sine-Gordon est délicate à voir : elle correspond à une symétrie de rotation du paramètre d'ordre. Vu au travers de la correspondance avec le modèle de Thirring elle correspond à l'invariance $\psi \rightarrow e^{i\alpha.\psi}$.

S sur les modèles à symétrie $O(n)$: la matrice S à deux corps doit se développer sur les invariants par $O(n)$:

$$S_{ik}^{jl} = \sigma_1 \cdot \delta_{ik} \cdot \delta_{jl} + \sigma_2 \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} + \sigma_3 \delta_{il} \cdot \delta_{jk}$$

Dans le cas $n = 2$, on peut écrire S_{ik}^{jl} comme une matrice 4×4 :

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & \sigma_2 & 0 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \end{pmatrix}$$

(nous retrouvons la condition $a = b+c+d$ du modèle à 6 vertex symétrique ; la matrice S_{ik}^{jl} pour n quelconque peut également être vue comme le poids de Boltzman associé au vertex d'un modèle de mécanique statistique ayant au lieu de flèches sur les liaisons, des éléments de $\mathbb{Z}_n$). Ensuite, à partir du modèle $O(n)$, il est tentant de regarder les matrices S symétriques pour tous les groupes de Lie possibles ($SU(n)$, $Sp(n)$...). C'est ce qui a été effectué par des auteurs comme Berg, Karowski, Thun, Truong... [6] [27] [28]. L'écriture des relations trilineaires nécessitait l'utilisation de calculs formels sur machines. Cependant tous ces exemples conduisent à une uniformisation rationnelle de ces équations ; ils ne sont donc pas très riches au niveau analytique. Ces modèles sont trop proches du modèle $O(n)$ précédent.

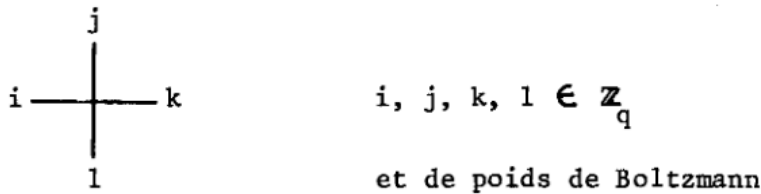
2) D'autres généralisations ont consisté, lorsque l'on dispose d'une relation triangle pour un modèle, à rendre ce modèle supersymétrique : c'est ce qui a été fait par exemple dans le cas du modèle σ non linéaire supersymétrique par Shankar et Witten [29].

3) Un modèle qu'il serait intéressant de généraliser est le modèle à huit vertex symétrique et sa matrice L_n correspondante :

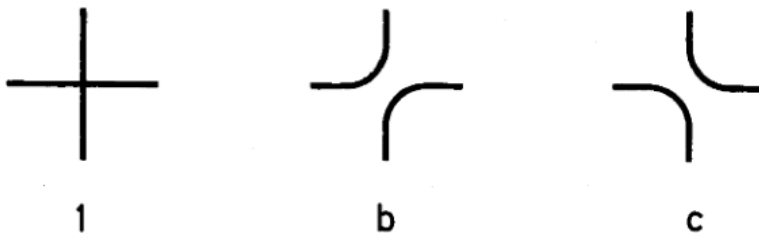
$L_n = \sum_{i=0}^3 W_i \sigma_i \tau_i$. Quelle généralisation donner aux matrices de Pauli ? Le problème est que les matrices de Pauli sont à la fois une représentation des éléments de l'algèbre de Lie de $O(3)$, mais sont également liés aux algèbres

de Clifford et enfin sont reliés au groupe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$: en effet $\{1, \sigma_1 \tau_1, \sigma_2 \tau_2, \sigma_3 \tau_3\}$ s'identifie complètement au groupe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Avant de chercher à généraliser un modèle il faut donc avoir une idée précise des structures algébriques qui sont en jeu. En fait on peut voir, au moins dans les exemples de modèles à vertex faisant intervenir des fonctions Θ d'une ou plusieurs variables, que, ce qui est en jeu, ce sont les groupes de Heisenberg [30].

4) Lorsque l'on dispose de deux formes proches de matrices $S(L_n)$ qui vérifient chacune une relation triangle, il est naturel de se demander si leur réunion ne pourrait elle aussi satisfaire la relation triangle. Illustrons cette idée sur l'exemple du modèle dû à Stroganov [31], qui consiste à considérer le vertex suivant :



1 si $i = j = k = l$, b si $i = j$ et $k = l$, c si $i = l$ et $j = k$ et 0 sinon. Ces diverses configurations seront symbolisées de la façon suivante :



Regardons les équations triangles pour ce modèle en prenant, pour plus de symétrie, des conventions symétriques pour b' , c' et b'' , c'' (i.e. se déduisant par rotation de $2\pi/3$).

Nous avons :

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \\
 cc' = b'' + bb' + (q-2) bb'b''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 5} = \text{Diagram 6} \\
 cc'b'' = cc'b''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} = \text{Diagram 9} + \text{Diagram 10} \\
 1 + (q-1) bb'b'' = (q-1) bb'b'' + 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 11} = \text{Diagram 12} + \text{Diagram 13} + \text{Diagram 14} + \text{Diagram 15} \\
 cc'c'' = bb' + b'b'' + bb'' + (q-3) bb'b''
 \end{array}$$

Nous remarquons immédiatement que les relations deviennent respectivement, si l'on impose les contraintes supplémentaires $c = 1 - b$ sur les trois vertex :

$$cc' = 1 - b - b' + bb' = b'' + bb' + (q-2) bb'b''$$

$$cc'c'' = 1 - (b+b'+b'') + (bb'+b'b''+bb'') - bb'b''$$

$$= bb' + b'b'' + bb'' + (q-3) bb'b''$$

Toutes ces équations (et leurs permutées) se ramènent à l'unique relation :

$$1 = b + b' + b'' + (q-2) bb'b''$$

Il existe donc une solution des équations triangles qui revient à considérer le modèle contraint par la relation $b + c = 1$. Regardons la relation d'inverse sur ce modèle :

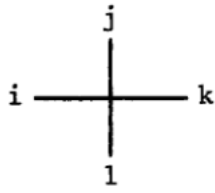
$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} & + & \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \bigcirc \\ \diagup \diagdown \end{array} & = & \begin{array}{c} \big) \big(\end{array} & = & \begin{array}{c} \big) \big) \\ \big(\big(\end{array} \\
 1 & + & (q-1) bb' & = & cc'
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \diagdown \end{array} & + & \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \bigcirc \\ \diagup \diagdown \end{array} & + & \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \bigcirc \\ \diagup \diagdown \end{array} & = & 0 \\
 b & + & b' & + & (q-2) bb' & = & 0
 \end{array}$$

Nous voyons que $(1-b)(1-b') = 1 + (q-1)bb' = cc'$ la condition $c = 1 - b$ est cohérente avec la relation existant sur ce modèle.

La fonction de partition de ce modèle a été donnée par Y. Stroganov [31], en utilisant seulement la relation d'inverse précédente, et la symétrie évidente sur ce modèle $Z(b,c) = Z(c,b)$. Il n'a pas utilisé les méthodes classiques (Bethe ansatz...), en particulier la relation triangle qui existe pourtant.

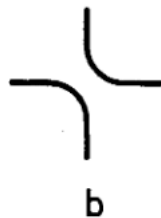
Avec ces mêmes notations regardons la matrice S à deux corps (qui est une restriction de la matrice S du modèle $O(n)$ dont on sait par ailleurs qu'elle vérifie la relation triangle) qui s'écrit :



$$i, j, k, l \in \mathbb{Z}_n$$

$$\begin{aligned} s_{ijkl} &= a \text{ si } i = k \text{ et } j = l \\ &= b \text{ si } i = l \text{ et } j = k \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Ces diverses configurations seront symbolisées de la façon suivante :

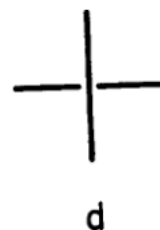
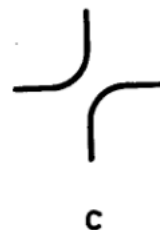
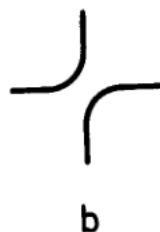
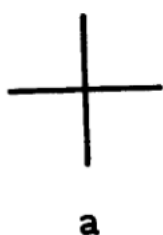


La relation d'inverse s'écrit :

$$ab' + (q-2) bb' + a'b = 0$$

Ce modèle dont la matrice L_n correspond à la combinaison de la matrice identité et de la transposition P_{ij} a déjà été vu comme conduisant à une relation triangle.

Ces deux exemples conduisant à une relation triangle, il est tentant de voir si leur réunion donne un modèle possédant une relation triangle ; soit donc le modèle suivant :



(on remarquera que pour q , nombre d'états sur les différentes liaisons, égal à 2, on retrouve le modèle à 8 vertex symétrique).

Ce modèle possède effectivement une relation triangle, et sa fonction de partition pour $q \neq 2$, a été calculée par C.L. Schultz [32], mais en utilisant seulement la relation d'inverse et les symétries du problème.

Nous n'écrirons pas toutes les équations correspondant à cette relation triangle ; donnons en une seule, pour information :

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \beta \quad \beta \\ \diagdown \quad \diagup \\ \alpha \text{---} \text{---} \gamma \\ \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \quad \gamma \end{array} = \begin{array}{c} \beta \quad \beta \\ \diagdown \quad \diagup \\ \alpha \text{---} \text{---} \gamma \\ \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \quad \gamma \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \\
 & \qquad \qquad \qquad cc'c'' \qquad \qquad \qquad (a+d) \, b'b'' \\
 & + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \\
 & \qquad \qquad \qquad bb''(a'+d') \qquad \qquad \qquad bb'(a''+d'') \\
 & + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \\
 & \qquad \qquad \qquad qbb'b''
 \end{aligned}$$

D'où l'équation :

$$cc'c'' = (a+d) \, b'b'' + (a'+d') \, bb'' + (a''+d'') \, bb' + qbb'b''$$

Face à ces approches qui consistent en quelque sorte à "parier" sur une forme de la matrice S à deux corps (ou de la matrice L_n) pouvant conduire à une relation triangle, on peut opposer l'approche plus systématique qui consiste, lorsqu'on dispose d'une relation triangle, à regarder si celle-ci ne subsiste pas pour un voisinage du modèle précédent : le fait de partir d'une solution qui "marche" et de regarder un voisinage, linéarisant tous les calculs.

Illustrons cette approche sur l'exemple d'une des solutions triviales vérifiant toujours les relations triangles ($a=b$, $c=d$), et regardons si, en considérant un voisinage de ce modèle ($a-b$ petit, $c-d$ petit), on ne pourrait ainsi accéder à la relation triangle sur le modèle à 8 vertex symétrique (cette situation serait particulièrement attrayante car elle se généraliserait aisément en dimension 3 pour la recherche d'une relation tétraèdre non triviale). Nous pouvons profiter du fait que les équations trilineaires ont déjà été écrites dans le cas du modèle à 8 vertex symétrique. Si nous posons $b = a+A$, $c = d+D$, où A et D devront être considérés comme petits, on obtient par simple remplacement dans les équations du modèle à 8 vertex les équations suivantes au premier ordre :

$$\left[\begin{array}{l} dA'a'' + da'A'' = aD'd'' + ad'D'' \quad (1) \\ Ad'a'' + ad'A'' = Da'd'' + da'D'' \quad (2) \\ Aa'd'' + aA'd'' = Dd'a'' + dD'a'' \quad (3) \\ \\ dD'a'' + Aa'd'' = aA'd'' + Dd'a'' \quad (4) \\ da'D'' + Ad'a'' = ad'A'' + Da'd'' \quad (5) \\ dA'a'' + ad'D'' = da'A'' + aD'd'' \quad (6) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} (3) - (4) : aA'd'' = dD'a'' \\ (3) + (4) : Aa'd'' = Dd'a'' \\ (2) - (5) : ad'A'' = da'D'' \\ (2) + (5) : Ad'a'' = Da'd'' \\ (1) - (6) : da'A'' = ad'D'' \\ (1) + (6) : dA'a'' = aD'd'' \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \epsilon \cdot D \\ A' = \epsilon' \cdot D' \\ A'' = \epsilon'' \cdot D'' \\ \frac{a}{d} = \frac{a''}{d''} \cdot \epsilon' \\ \frac{d}{a} = \frac{d''}{a''} \cdot \epsilon \\ \frac{d}{a} = \frac{d''}{a'} \cdot \epsilon'' \\ \epsilon \epsilon' \epsilon'' = 1 \end{array} \right.$$

Nous voyons donc qu'au départ nous avons une relation triangle dans un certain domaine des paramètres ($a=b$, $c=d$, $a'=b'$, $c'=d'$, $a''=b''$, $c''=d''$, a , c , a' , c' , a'' , c'' , quelconques), et, lorsque l'on cherche à étendre ce domaine, on constate que ce domaine dans son entier ne peut pas être étendu, mais c'est seulement un sous-ensemble de ce domaine qui peut être étendu. Cette situation est en fait assez générale et constitue un obstacle supplémentaire dans la recherche des relations triangles.

Nous avons également recherché des voisinages du modèle à 6 vertex symétrique. Le système linéaire associé à la correction du modèle à 6 vertex est rapidement d'une taille importante, il faut utiliser le calcul formel (AMP). Ces calculs n'ont pas donné les résultats escomptés.

c) LA RECHERCHE DE RELATIONS TETRAHEDRE

Le problème de la recherche d'une relation tétraèdre est quelque peu différent de celui de nouvelles relations triangle. Nous allons essayer de l'illustrer sur deux exemples : à la différence des relations triangle, il n'y a pas à l'heure actuelle d'exemple satisfaisant de relation tétraèdre que l'on pourrait essayer éventuellement de généraliser (l'exemple donné par A.B. Zamolodchikov [33] présente certains défauts : notamment les poids statistiques du modèle peuvent être négatifs). Nous allons considérer deux exemples l'un relevant des modèles à vertex, l'autre relevant des modèles à spin.

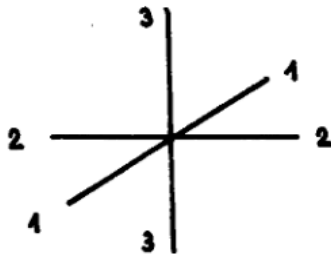
Les équations provenant de la relation tétraèdre sont des équations quadrilinéaires dont la complexité, nous allons le voir, est bien plus grande que celle provenant des relations triangle. Il faut là aussi préciser le modèle que l'on considère : quelle forme algébrique donner a priori à la matrice L_n associée au vertex ? On peut imaginer là encore bien des formes comme, par exemple,

$$L_n = \sum_{i=0}^3 W_i \cdot \sigma_i \cdot \tau_i \cdot \rho_i \quad (\text{où } \sigma_i, \tau_i, \rho_i$$

désignent des matrices de Pauli). Cette forme généraliserait celle du modèle à 8 vertex symétrique. En fait on peut voir que cette forme ne peut conduire à une relation tétraèdre.

1) Il faut procéder de façon plus systématique. En fait nous pouvons rechercher des matrices L_n qui soient là aussi symétriques selon un groupe donné a priori. Si ce groupe est le groupe de Lie $SU(n)$, on sait que tous les opérateurs qui commutent avec l'action du groupe sont les éléments du groupe des permutations (Théorème de Weil pour les groupes compacts). Pour les autres groupes, l'ensemble de ces opérateurs est plus large que le groupe des permutations. Donc a priori on devrait couvrir tous les cas en prenant L_n se décomposant sur l'algèbre du groupe des permutations. En l'occurrence chaque L_n se décomposera a priori sur tous les éléments du groupe S_3 (permutations à 3 éléments). Ceci permettra de faire un calcul universel, ne faisant pas intervenir un groupe de Lie plutôt qu'un autre, et ceci simplifiera aussi les calculs.

Regardons tout d'abord le choix le plus simple possible qui revient à considérer un développement de L_n sur A_3 (groupe alterné).



$$L_n = a \mathbb{1} + a' \cdot \mathbb{C} + a'' \mathbb{C}^2$$

où $\mathbb{C}$ est un cycle d'ordre 3 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

On peut voir, par un calcul que nous ne détaillerons pas, qu'un tel choix ne permet pas d'obtenir une relation tétraèdre. Le choix le plus simple suivant revient à considérer la forme suivante :

$$\begin{aligned} L_n &= a \mathbb{1} + a' (P_{12} + P_{23} + P_{31}) + a'' (\mathbb{1} + \mathbb{C} + \mathbb{C}^2) \\ &= a \mathbb{1} + a' \cdot P_1 + a'' \cdot Q_1 \end{aligned}$$

A partir de l'algèbre S_4 , on peut obtenir tout un ensemble de relations nécessaires au calcul de la relation tétraèdre :

$$\begin{aligned} [P_1, Q_2] &= [Q_1, P_2], [P_2, Q_3] = [Q_2, P_3] \\ [P_1, P_4] &= [Q_1, Q_4] = [P_4, P_3] + [P_4, P_2] \\ [P_3, P_4] &= [Q_3, Q_4] \text{ etc...} \end{aligned}$$

Les P_i et Q_i correspondent aux 4 différents vertex.

Ecrire l'équation tétraèdre revient à écrire la relation :

$$A B C D = D C B A$$

$$\text{avec } A = a \cdot 1 + a' P_1 + a'' Q_1$$

$$B = b \cdot 1 + b' P_2 + b'' Q_2$$

$$C = c \cdot 1 + c' P_3 + c'' Q_3$$

$$D = d \cdot 1 + d' P_4 + d'' Q_4$$

Nous ne détaillerons pas l'ensemble des 12 équations quadrilinéaires provenant de la relation précédente. Donnons simplement pour information l'une de ces 12 équations :

$$\begin{aligned} & d(a''b'c'' - c'b''a') + d'(a''bc'' - cb'a'' - c''b'a) \\ & + d''(a'b''c + ab''c' - c'ba') = 0 \end{aligned}$$

L'ensemble de ces équations ne mène malheureusement pas à un feuilletage de l'espace des paramètres : nous sommes donc conduits à nous intéresser à la forme la plus générale, tout en restant dans le cadre de l'algèbre de S_3 : Les 4 matrices A, B, C, D auront la forme :

$$A = A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot C_1 + A_3 \cdot C_1^2 + A_4 \cdot P_{23} + A_5 \cdot P_{34} + A_6 \cdot P_{24}$$

$$B = B_1 \cdot 1 + B_2 \cdot C_2 + B_3 \cdot C_2^2 + B_4 \cdot P_{14} + B_5 \cdot P_{34} + B_6 \cdot P_{13}$$

$$C = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot C_3 + C_3 \cdot C_3^2 + C_4 \cdot P_{14} + C_5 \cdot P_{12} + C_6 \cdot P_{24}$$

$$D = D_1 \cdot 1 + D_2 \cdot C_4 + D_3 \cdot C_{14} + D_4 \cdot P_{23} + D_5 \cdot P_{12} + D_6 \cdot P_{13}$$

Pour effectuer ce dernier calcul nous utilisons les représentations du groupe S_4 (une représentation de dimension 1, une représentation de dimension 2 et deux représentations de dimension 3).

(Le groupe S_4 peut être vu comme le groupe affine de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, il est donc le produit semi-direct du groupe linéaire de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, qui n'est autre que S_3 , par le groupe $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$: $S_4 = (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) \rtimes S_3$; la représentation de dimension 2 correspondant à ce sous-groupe normal $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$).

Donc en utilisation les représentations du groupe S_4 , on représentera par exemple :

$$A = A_1 \cdot 1 + A_2 C_1 + A_3 C_1^2 + A_4 \cdot P_{23} + A_5 \cdot P_{34} + A_6 \cdot P_{24}$$

par

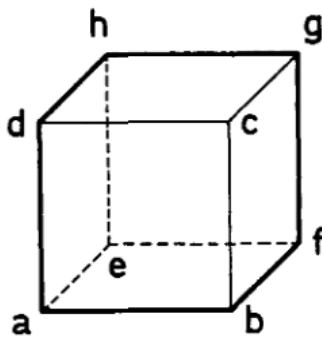
$$\begin{bmatrix} A_5 - A_6 + A_1 - A_2 & -A_5 + A_4 - A_3 + A_2 \\ A_4 - A_6 + A_3 - A_2 & -A_5 + A_6 - A_3 + A_1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} A_1 + A_5 & A_4 + A_2 & A_6 + A_3 \\ A_4 + A_3 & A_6 + A_1 & A_5 + A_2 \\ A_6 + A_2 & A_5 + A_3 & A_4 + A_1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} -A_1 + A_5 & -A_4 + A_2 & A_6 - A_3 \\ -A_4 + A_3 & -A_6 + A_1 & A_5 - A_2 \\ A_6 - A_2 & A_5 - A_3 & -A_4 + A_1 \end{bmatrix}$$

Et de même pour B, C et D ; mais maintenant la relation $A B C D = D B C A$ peut être regardée comme un ensemble de trois relations matricielles correspondant aux trois représentations (dimension 2, 3 et 3) avec la notion naturelle de produit matriciel pour les expressions telles que $A B C D$ et $D C B A$ ce qui facilite les calculs. Ceux-ci ont néanmoins été effectués en utilisant le calcul formel sur machine (A.M.P. en l'occurrence) afin d'écrire explicitement toutes les équations. Celles-ci sont au nombre de douze. Nous donnons l'une de ces équations pour information dans l'appendice 2. Ces équations ont chacune en moyenne de l'ordre de 90 termes. Il devient clair que toute exploitation de ces équations est pratiquement impossible, a fortiori, la recherche d'éventuels modules. Il faut donc mettre en oeuvre d'autres méthodes provenant d'idées entièrement différentes.

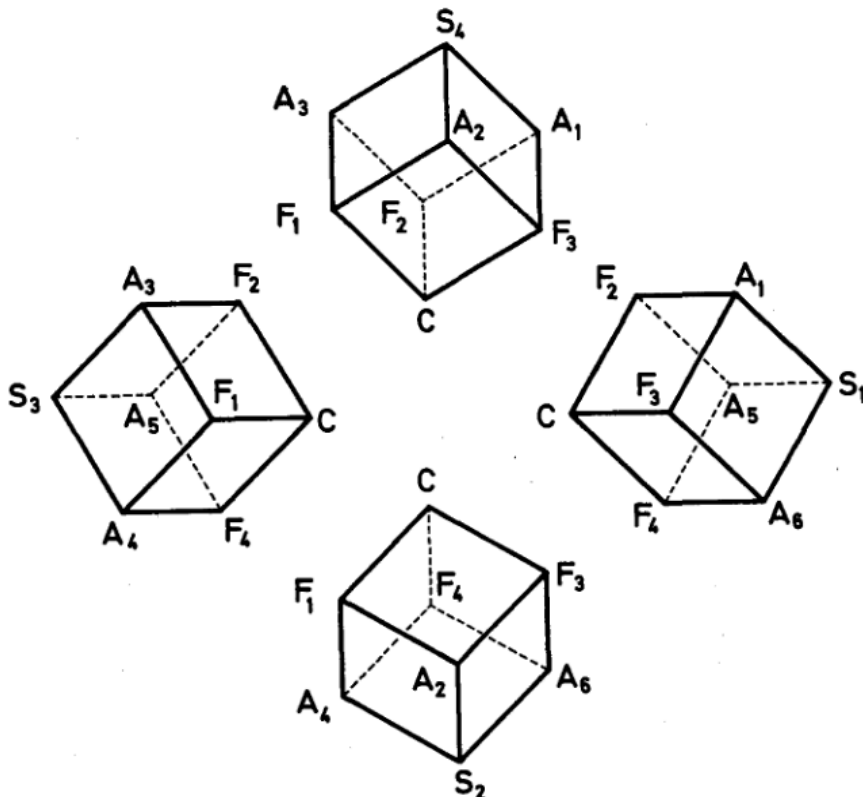
2) Nous avons considéré le cas des relations tétraèdre sur des modèles à vertex et constaté leur extrême complexité. On peut alors chercher à s'intéresser aux modèles à spins et notamment aux modèles d'exclusion comme l'exemple du modèle d'hexagone dur : en effet nous avons vu que l'exclusion avait pour effet de réduire considérablement le foisonnement des équations trilinéaires et, nous allons le voir, quadrilinéaires. Nous allons regarder un modèle qui est une généralisation tridimensionnelle simple du modèle d'hexagone dur (modèle d'exclusion). Le poids de Boltzmann $W(a,b,...h)$



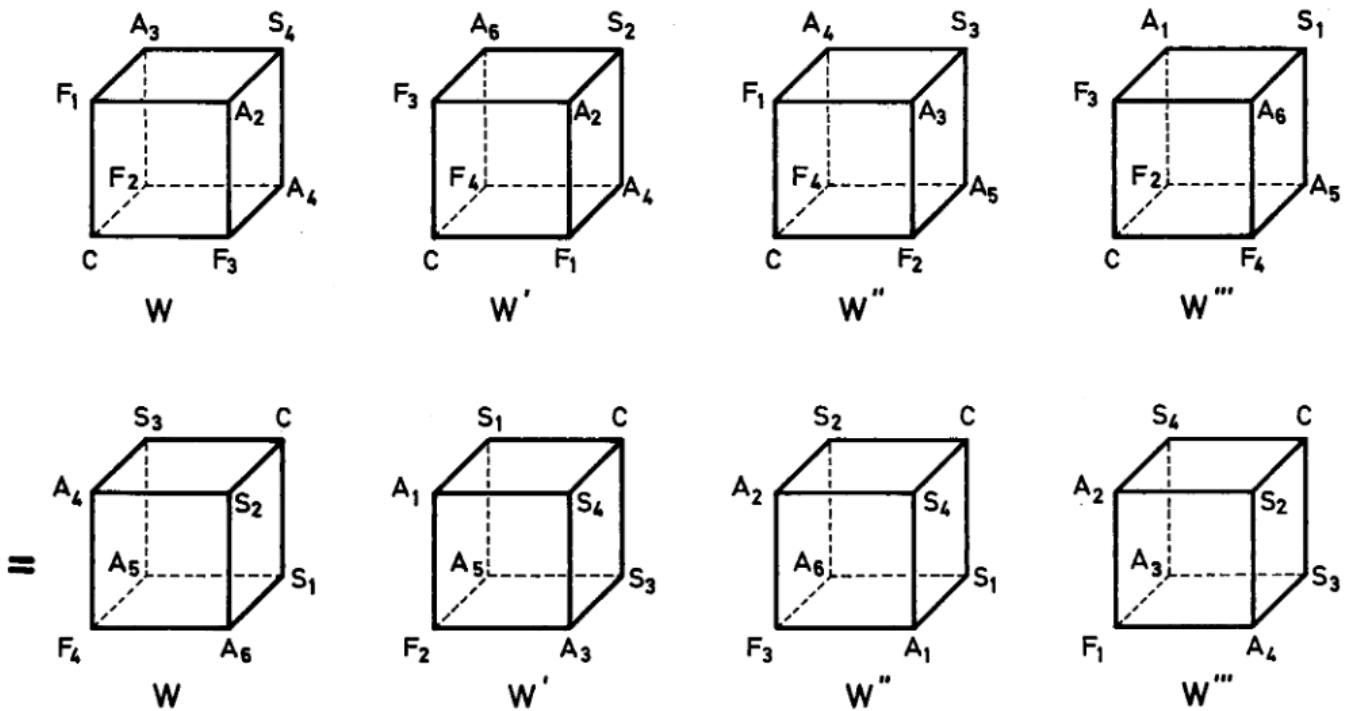
associé à un cube élémentaire est nul si les conditions suivantes ne sont pas satisfaites :

$$\begin{aligned} ab = bc = cd = da = ae = bf = ef = gc \\ = gf = gh = eh = dh = 0 \end{aligned}$$

Dans le cas du modèle d'hexagone dur il fallait accoler trois carrés déformés qui constituaient au total un hexagone ; ici on accole quatre cubes qui au total vont constituer un dodécaèdre rhombique :



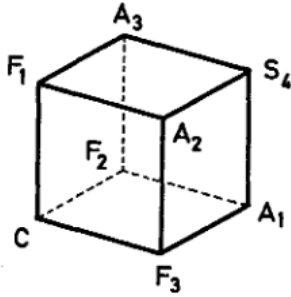
La relation tétraèdre reviendra à écrire :



dont la traduction analytique est la suivante :

$$\begin{aligned}
 & \sum_C W(C, F_3, F_2, A_1, A_3, S_4, F_1, A_2) \cdot W'(C, F_1, F_4, A_2, A_6, S_2, F_3, A_2) \\
 & \cdot W''(C, F_2, F_4, A_5, A_4, S_3, F_1, A_3) \cdot W'''(C, F_4, F_2, A_5, A_1, S_1, F_3, A_3) \\
 = & \sum_C W(F_4, A_6, A_5, S_1, S_3, C, A_4, S_2) \cdot W'(F_2, A_3, A_5, S_3, S_1, C, A_1, S_4) \\
 & \cdot W''(F_3, A_1, A_6, S_1, S_2, C, A_3, S_4) \cdot W'''(F_1, S_4, A_3, S_3, S_4, C, A_2, S_2)
 \end{aligned}$$

Considérons le modèle d'exclusion suivant : il y a exclusion entre sites plus proches voisins tels que (C, F_1)



ou (A_2, S_4) ... Il y a également exclusion entre sites seconds plus proches voisins tels que (C, A_2) , (F_1, F_2) , (A_3, F_3) ... Il y a d'autre part, une diagonale privilégiée (C, S_4) selon laquelle nous avons une exclusion.

Le poids de Boltzmann, en dehors de ces exclusions, n'est plus défini que par quatre fugacités associées aux quatre diagonales du cube :

$$W(C, F_3, F_2, A_1, A_3, S_4, F_1, A_2) = e^{K_1(C+S_3) + K_2(A_1+F_1) + K_3(A_3+F_3) + K_4(A_2+F_2)}$$

avec $CF_3 = F_3A_1 = F_2A_1 = F_2C = CF_1 = A_2F_3 = A_1S_4 = A_3F_2 = F_1A_2 = A_2S_4 =$
 $F_1A_3 = A_3S_4 = CA_2 = F_1F_3 = A_1A_2 = A_1A_3 = F_2S_4 = F_2F_3 = CA_1 = A_2A_3 =$
 $\dots = CS_4 = 0$

$$C, A_1, A_2, A_3, F_1, F_2, F_3, S_4 = 0 \text{ ou } 1.$$

$$(CS_4) : K_1 \quad (A_2F_2) : K_4 \quad (A_3F_3) : K_3 \quad (A_1F_1) : K_2$$

$F_1 = 1$ tous les autres sites $A_i, \dots, S_i, F_{i \neq 1} = 0$ on a alors l'équation

$$e^{K_2 + K'_3 + K''_2} = e^{K'''_1}$$

$F_2 = 1 ; A_i, S_i, F_{i \neq 2} = 0 :$

$$e^{K'''_3 + K_4 + K'''_3} = e^{K'_1}$$

$F_3 = 1 ; A_i, S_i, F_{i \neq 3} = 0 :$

$$e^{K_3 + K'_2 + K'''_2} = e^{K''_1}$$

$F_4 = 1 ; A_i, S_i, F_{i \neq 4} = 0 :$

$$K'_4 + K''_4 + K'''_3 = K_1$$

$F_1 = A_1 = 1$, les autres nuls : $2K_2 + K'_3 + K''_2 + K'''_3 = K'_2 + K''_3 + K'''_1$

$A_1 = 1$, les autres nuls : $K_2 + K'''_3 = K'_2 + K''_3$

$A_2 = 1$, les autres nuls : $K_4 + K'_4 = K''_2 + K'''_2$

$A_3 = 1$, les autres nuls : $K_3 + K''_4 = K'_3 + K'''_4$

$A_4 = 1$, les autres nuls : $K'_2 + K''_3 = K_2 + K'_3$

$A_5 = 1$, les autres nuls : $K''_2 + K'''_2 = K_4 + K'_4$

$A_6 = 1$, les autres nuls : $K_3 + K'_4 = K'_3 + K'''_4$

au total nous avons donc les 7 équations :

$$\begin{cases} K_1''' = K_2 + K_3' + K_2'' \\ K_2''' = K_4 + K_4' - K_2'' = -K_3 - K_2' + K_1'' \\ K_3''' = -K_2 + K_2' + K_3'' = K_1 - K_4' - K_4'' \\ K_4''' = K_3 - K_3' + K_4'' = -K_4 + K_1' - K_3'' \end{cases}$$

Ce qui conduit, entre autre, à l'équation :

$$\begin{aligned} K_1''' + K_2''' + K_3''' + K_4''' &= (K_2 + K_3' + K_2'') + (K_4 + K_4' - K_2'') + (K_1 - K_4' - K_4'') \\ &\quad + (K_3 - K_3' + K_4'') = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 \end{aligned}$$

On peut donc remplacer ces 7 équations par les trois équations :

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 + K_3 + K_4 &= K_1' + K_2' + K_3' + K_4' = K_1'' + K_2'' + K_3'' + K_4'' \\ &= K_1''' + K_2''' + K_3''' + K_4''' \end{aligned}$$

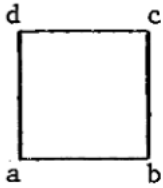
et, par exemple, les 4 équations :

$$\begin{cases} K_1 = K_4' + K_4'' + K_3''' \\ K_1' = K_4 + K_3'' + K_3''' \\ K_1'' = K_3 + K_2' + K_2''' \\ K_1''' = K_2 + K_3' + K_2'' \end{cases}$$

Au départ nous disposons de 16 paramètres contraints par 7 relations, il est donc largement possible de réaliser une relation tétraèdre : on pourra choisir arbitrairement W et W' , et on pourra toujours trouver W'' et W''' en conséquence, tels que la relation tétraèdre soit satisfaite. Nous voyons apparaître ici, une quantité qui ressemble à un invariant, quantité qui doit être commune aux quatre poids : $(K_1 + K_2 + K_3 + K_4)$.

Cependant il est clair que la fonction de partition ne dépend que de cette même somme des fugacités, les différences $K_1 - K_2$, $K_2 - K_3$, $K_3 - K_4$ étant des variables irrelevantes.

Remarquons que cette situation a son pendant en dimension 2 : en effet soit le poids de Boltzmann suivant correspondant au motif carré élémentaire :



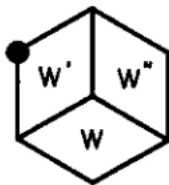
$$W(a,b,c,d) = e^{K_1(b+d) + K_2(a+c)}$$

$$\text{si } ab = cb = cd = da = db = 0$$

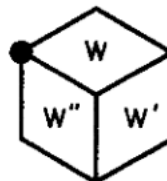
$$W = 0 \text{ sinon } (a, b, c, d = 0 \text{ ou } 1)$$

Ce modèle correspond à un modèle d'exclusion entre sites plus proches voisins sur un réseau triangulaire. (C'est le modèle d'hexagone dur au sens strict).

La relation triangle, si l'on fait jouer un rôle symétrique aux trois poids W, W', W'' , s'écrit :



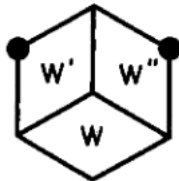
=



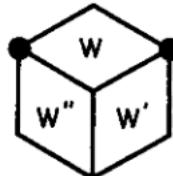
$$e^{K'_1}$$

=

$$e^{K_2 + K''_2}$$



=



$$e^{K'_1 + K''_1}$$

=

$$e^{2K_2 + K'_2 + K''_2}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{W}' \quad \text{W}'' \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{W} \\ \bullet \end{array} & = & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{W} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{W}'' \quad \text{W}' \\ \bullet \end{array} \\
 \text{e}^{K_1 + K_1' + K_1''} & = & \text{e}^{2K_2 + 2K_2' + 2K_2''}
 \end{array}$$

L'ensemble de ces équations et de leurs permutées selon S_3 , reviennent à la première équation et ses permutées :

$$\left[\begin{array}{l} K_1' = K_2 + K_2'' \\ K_1 = K_2' + K_2'' \\ K_1'' = K_2 + K_2' \end{array} \right.$$

On peut également remplacer ces trois équations par les trois équations équivalentes :

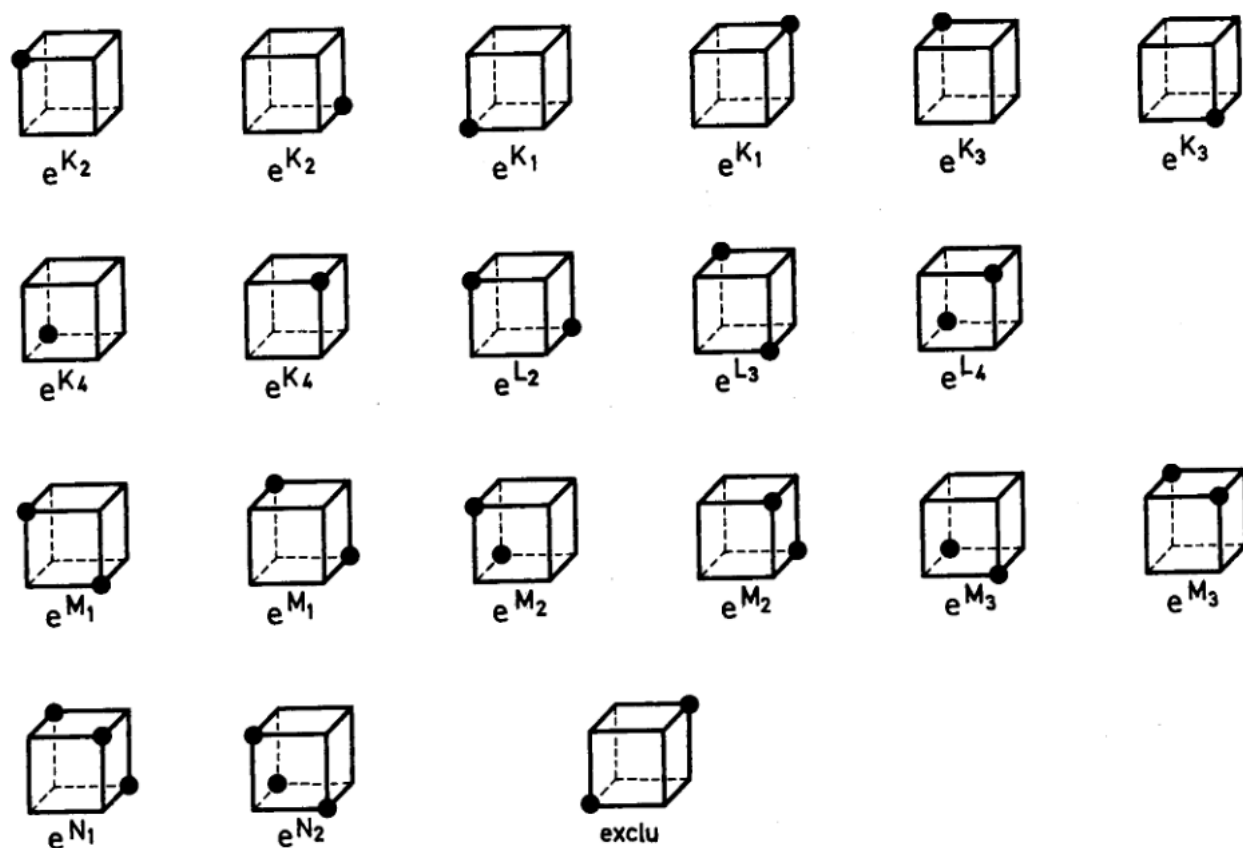
$$\left[\begin{array}{l} K_1' = K_2 + K_2'' \\ K_1 + K_2 = K_1' + K_2' = K_1'' + K_2'' \quad (= K_2 + K_2' + K_2'') \end{array} \right.$$

Ceci n'a rien d'étonnant, en effet, nous l'avons déjà remarqué, la fonction de partition ne dépend que de la somme des fugacités $K_1 + K_2$, la différence $K_1 - K_2$ étant une variable irrelevante ; il est donc naturel de voir la quantité $K_1 + K_2$ jouer un rôle particulier ; en l'occurrence la relation triangle précédente relie trois poids de Boltzmann au même point (dans la seule variable relevante).

Par une procédure que nous avons déjà décrite [3], on peut, à partir de la relation triangle, obtenir la commutation d'une famille dépendant d'un paramètre continu de matrices de transfert et par voie de conséquence, en développant par rapport à ce paramètre, obtenir un nombre infini de

grandeurs en involution. En l'occurrence, pour l'exemple précédent, nous obtenons donc un nombre infini de grandeurs en involution qui sont associées à l'invariance triviale de la fonction de partition par la transformation $K_1 \rightarrow K_1 + \alpha$, $K_2 \rightarrow K_2 - \alpha$. (La variable par rapport à laquelle on développe est justement la variable irrelevante $K_1 - K_2$; la relation de commutation est, elle, $[T(K_1, K_2), T(K_1 + \alpha, K_2 - \alpha)] = 0$). Pour ces raisons on devra considérer que cette relation triangle n'est pas une "bonne" relation triangle, cependant, à l'inverse, il faut rappeler la similitude qui existe avec la situation du modèle à 8 vertex symétrique où l'on a, en introduisant l'uniformisation elliptique, pour chacun des trois poids de Boltzmann des variables α_i , β_i , λ qui sont telles que $\alpha_i + \beta_i = \lambda$ et $\alpha_1 = \beta_2 + \beta_3$ et les équations déduites par permutations (on pourra se reporter à l'article de R.J. Baxter sur la Z-invariance [34]).

On peut chercher à généraliser ce modèle tridimensionnel très simple et considérer le modèle associé aux configurations suivantes, avec leurs 12 paramètres associés :



Les calculs sont assez longs, nous ne les expliciterons pas. On obtient, entre autre, les relations suivantes : $L_1 = L_3 = L_4 = L'_2 = L'_3 = L'_4 = L''_2 = L''_3 = L''_4 = -\infty$

$$M_1 = M'_1 = M''_1 = M_2 = M'_2 = M''_2 = M_3 = M'_3 = M''_3 = -\infty$$

$$N = N' = -\infty$$

qui nous ramènent à l'exemple donné plus haut.

L'analyse de ces équations est assez compliquée ; disons simplement qu'en dehors de l'exemple précédent, la plus grande généralité du modèle ne permet pas d'obtenir de relation tétraèdre. Pourtant ces exemples sont parmi les plus simples que l'on puisse regarder comme relations tétraèdre ; en effet ils se traduisent, du fait des nombreuses exclusions de configurations, par un ensemble d'égalité de deux termes et non pas, comme dans tous les autres exemples que nous avons donnés, par des égalités de somme de plus de deux termes. Nous percevons, là encore, les limites de cette approche.

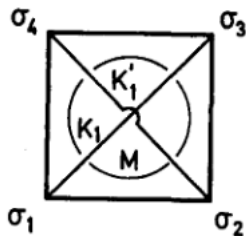
IV - NOUVELLES APPROCHES POUR LA RECHERCHE DE RELATIONS TRIANGLE OU TÉTRAHÈDRE

Nous avons rendu compte de la complexité et des difficultés que l'on rencontrait rapidement dans la recherche de relations tétraèdre ou simplement de nouvelles relations triangle . Nous avons indiqué la nécessité de trouver de nouvelles approches et des idées nouvelles dans la recherche de ces relations, notamment la nécessité de trouver rapidement les "invariants" algébriques de ces modèles sans passer par le calcul classique trop fastidieux. Nous allons indiquer des directions que l'on peut explorer.

a) REFLEXION SUR LA SURDETERMINATION DES EQUATIONS TRIANGLE : UNE IDENTITE ALGEBRIQUE SIMPLE SOUS-JACENTE AU MODELE A 8 VERTEX SYMETRIQUE

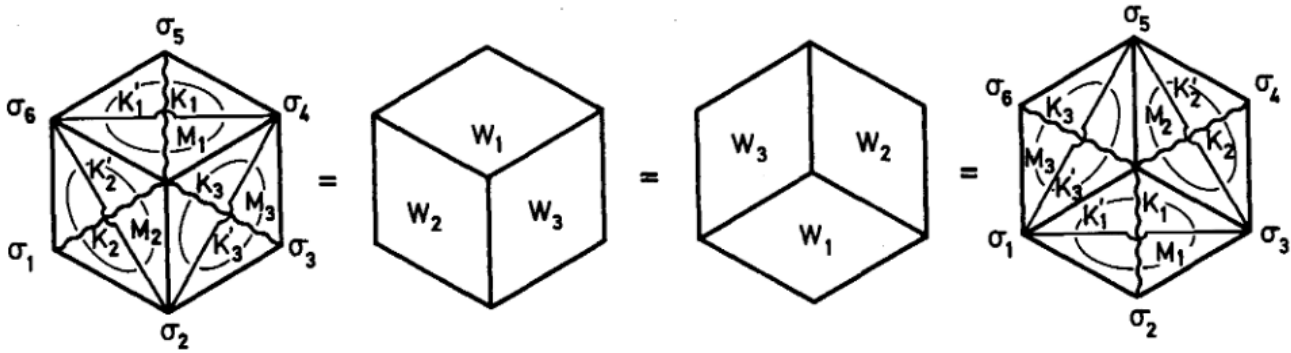
Le détail des équations trilineaires et quadrilineaires, notamment leur écriture explicite, nous a permis de constater (sauf dans quelques cas non génériques) la surdétermination de ces équations : il y a un trop grand nombre d'équations par rapport au nombre de variables. Ceci est particulièrement clair dans le cas des relations tétraèdres. Ainsi, pour que ces relations soient satisfaites, les équations doivent être particulières, par exemple correspondre à certaines identités non triviales..

Nous allons illustrer cette idée sur l'exemple du modèle à 8 vertex symétrique vu comme un modèle à spin :



$$W(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = e^{K_1 \sigma_1 \sigma_3 + K'_1 \sigma_2 \sigma_4 + M \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}$$

La relation triangle-étoile généralisée s'écrit :



qui conduit aux relations suivantes :

$$e^{2K'_j + 2K'_k} = \frac{\text{ch}(K_1 + K_2 + K_3 + M_i - M_j - M_k)}{\text{ch}(K_j + K_k - K_i + M_j + M_k - M_i)}$$

$$e^{2K'_j - 2K'_k} = \frac{\text{ch}(K_i - K_j - K_k + M_j + M_k - M_i)}{\text{ch}(K_i + K_j - K_k - M_i + M_j + M_k)}$$

(i, j, k) étant n'importe quelle permutation de (1, 2, 3).

Puisque $\sigma_1 \dots \sigma_6$ prennent chacun deux valeurs ± 1 , il devrait y avoir 64 équations.

Cependant ces équations sont inchangées en changeant $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5$ en leurs opposés (de même pour $\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6$). Ces 64 équations se réduisent à 16 équations. En fait il y a d'autres symétries (invariance par l'échange de σ_1 et σ_4) qui réduisent le nombre des équations à 6. L'analyse de ces équations amène, pour avoir une solution non triviale, à faire $M_1 = M_2 = M_3$ qui devient ainsi un des invariants. Néanmoins ces équations semblent contraignantes, et nous allons essayer de comprendre comment une solution peut exister : Considérons l'équation :

$$\sum_{g=\pm 1} e^{(K_0 + K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2 + K_3 \lambda_1 \lambda_2)g} = e^{K'_0 + K'_1 \lambda_1 + K'_2 \lambda_2 + K'_3 \lambda_1 \lambda_2} \quad (1)$$

où $\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1$

$$\text{Appelons } f(\lambda_1, \lambda_2) = K_0 + K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2 + K_3 \lambda_1 \lambda_2$$

$$f'(\lambda_1, \lambda_2) = K'_0 + K'_1 \lambda_1 + K'_2 \lambda_2 + K'_3 \lambda_1 \lambda_2$$

et notons $x_1 = f(+1, +1)$ $x_2 = f(+1, -1)$ $x_3 = f(-1, +1)$ $x_4 = f(-1, -1)$

et de même $x'_1 = f'(+1, +1)$ etc...

L'équation précédente s'écrit encore

$$\text{ch} \left[f(\lambda_1, \lambda_2) \right] = e^{f'(\lambda_1, \lambda_2)} \quad \text{quels que soient } \lambda_1, \lambda_2 = \pm 1$$

La correspondance entre x_1, x_2, x_3, x_4 et K_0, K_1, K_2, K_3 est une bijection, de même celle entre $x'_1 \dots x'_4$ et $K'_0 \dots K'_3$, quant au passage de x_i à x'_i c'est un simple changement de variable : $e^{x'_i} = \text{ch} x_i$; la correspondance entre K_0, K_1, K_2, K_3 et K'_0, K'_1, K'_2, K'_3 est donc une bijection.

Cette relation est une généralisation de la relation triangle-étoile, bien connue sur le modèle d'Ising ; en effet si nous posons $\lambda_1 = \sigma_1 \sigma_3$
 $\lambda_2 = \sigma_3 \sigma_5$ ($\lambda_1 \lambda_2 = \sigma_1 \sigma_5$)

Nous obtenons à partir de l'équation précédente l'équation suivante (en posant $g = \sigma \sigma_1 \sigma_3 \sigma_5$) :

$$\sum_{\sigma=\pm 1} e^{\sigma \cdot (K_0 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_5 + K_1 \sigma_5 + K_2 \sigma_1 + K_3 \sigma_3)} = e^{K'_0 + K'_1 \sigma_1 \sigma_3 + K'_2 \sigma_3 \sigma_5 + K'_3 \sigma_1 \sigma_5}$$

(la relation triangle pour le modèle d'Ising [i] correspond à $K_0 = 0$). Si nous superposons tête-bêche telles relations (l'une pour $(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5)$ l'autre pour $(\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6)$) nous obtenons, en faisant le produit, l'égalité :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} e^{K'_1 \sigma_4 \sigma_6 + K_1 \sigma \sigma_5} \cdot e^{K'_2 \sigma_2 \sigma_6 + K_2 \sigma \sigma_1} \cdot e^{K'_3 \sigma_2 \sigma_4 + K_3 \sigma_3 \sigma} \cdot e^{K_0 \sigma \sigma_1 \sigma_3 \sigma_5} \\ = \sum_{\sigma} e^{K_1 \sigma \sigma_2 + K'_1 \sigma_1 \sigma_3} \cdot e^{K'_2 \sigma_3 \sigma_5 + K_2 \sigma \sigma_4} \cdot e^{K_3 \sigma \sigma_6 + K'_3 \sigma_1 \sigma_5} \cdot e^{K_0 \sigma \sigma_2 \sigma_4 \sigma_6} \end{aligned}$$

Nous ne sommes pas très loin de la relation traduisant la relation triangle sur le modèle à 8 vertex symétrique ; il suffirait, à gauche de l'égalité, de remplacer $e^{K_0 \sigma \sigma_1 \sigma_3 \sigma_5}$ par $e^{M \sigma_1 \sigma_5 \sigma_6 \sigma + M \sigma_6 \sigma_1 \sigma_2 \sigma + M \sigma_2 \sigma_3 \sigma_3 \sigma}$, et à droite de l'égalité, de remplacer $e^{K_0 \sigma \sigma_2 \sigma_4 \sigma_6}$ par

$$e^{M \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma + M \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma + M \sigma_5 \sigma_6 \sigma_1 \sigma}.$$

Or, lorsqu'on regarde la relation triangle sur le modèle à 8 vertex symétrique, on voit facilement que la configuration $\sigma_1 \sigma_3 = \sigma_4 \sigma_6$ et $\sigma_2 \sigma_4 = \sigma_1 \sigma_5$ et $\sigma_2 \sigma_6 = \sigma_3 \sigma_5$ ne fournit aucune équation : les deux configurations sont manifestement égales. On peut donc écarter ce cas de figure en écrivant :

$$0 = (1 + \sigma_1 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_6) (1 + \sigma_1 \sigma_5 \sigma_2 \sigma_4) (1 + \sigma_3 \sigma_5 \sigma_2 \sigma_6)$$

$$\Leftrightarrow -1 = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_6 + \sigma_2 \sigma_6 \sigma_3 \sigma_5 + \sigma_1 \sigma_5 \sigma_2 \sigma_4$$

On peut donc remplacer :

$$- \sigma\sigma_1\sigma_3\sigma_5 \text{ par } \sigma\sigma_5\sigma_4\sigma_6 + \sigma\sigma_1\sigma_2\sigma_6 + \sigma\sigma_3\sigma_2\sigma_4$$

$$\text{et } - \sigma\sigma_2\sigma_4\sigma_6 \text{ par } \sigma\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma\sigma_3\sigma_4\sigma_5 + \sigma\sigma_1\sigma_5\sigma_6$$

Ainsi en faisant $M = -K_0$ la relation triangle sur le modèle à 8 vertex se ramène complètement à l'équation (1).

Du fait de cette identification, on ne s'étonnera pas qu'une uniformisation elliptique apparaisse sur une relation aussi simple que l'équation (1) :

$$\text{ch } 2K'_j = ik^{-1} \cdot \text{dn}(i\alpha_j)$$

$$\text{sh } 2K'_j = i/k \text{ sn}(i\alpha_j)$$

$$\text{ch } 2K_j = ik^{-1} \text{ dn}(i\beta_j)$$

$$\text{sh } 2K_j = i/k \text{ sn}(i\beta_j)$$

$$\text{coth } 2M = - \text{dn}(i\lambda)$$

$$\text{sh } 2M = - i/k \text{ sn}(i\lambda)$$

$$\alpha_j + \beta_j = \lambda$$

Cette uniformisation elliptique, remarquons le, apparaissait déjà dans l'appendice du célèbre article de L. Onsager [24] ce qui ne doit pas nous surprendre, le cas du modèle d'Ising correspondant à un cas particulier du modèle précédent ($K_0 = M = 0$).

Au passage, pour clarifier le rôle que jouent les courbes elliptiques dans ces problèmes, signalons que ces fonctions ne doivent pas être confondues avec les fonctions elliptiques qui interviennent de façon manifeste par exemple dans l'expression de la fonction de partition du modèle de Potts sur réseau carré à la température critique :

$$Z = \sqrt{-qq_+} \frac{A(x) A\left(\frac{-q_+}{x}\right)}{A(-q_+x) A\left(\frac{q_+}{x}\right)}$$

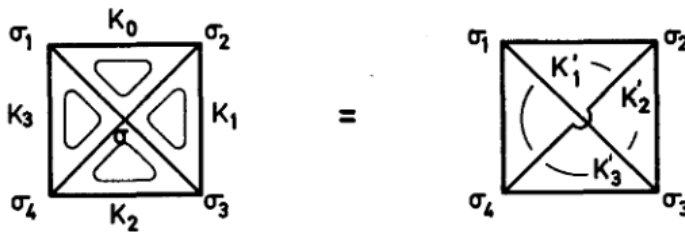
$$\text{avec } A(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1+q_+^{2n-1}.x)}{(1-q_+^{2n}.x)} \quad \text{avec} \quad q_{\pm} = 1 - \frac{q}{2} \pm \sqrt{q(q-4)}$$

La période, qui intervient dans de telles expressions, est reliée au groupe, engendré par l'inverse et la symétrie, vu comme un groupe de translation [2]. Par exemple, dans le cas du modèle à 8 vertex symétrique, la fonction de partition apparaît comme un objet triplement automorphe ; pour reprendre les notations de R.J. Baxter [35] $i\pi, i\pi\tau$ sont les deux périodes des fonctions elliptiques dont nous parlons (et sont également bien sûr des périodes de la fonction de partition), et λ est la pseudo-période reliée à la propriété d'automorphie de Z par le groupe précédent.

L'équation (1), avec ou sans uniformisation elliptique, peut être utilisée de bien d'autres façons : on peut par exemple la réécrire :

$$\sum_{\sigma=\pm 1} e^{K_0 \cdot \sigma\sigma_1\sigma_2 + K_1 \cdot \sigma\sigma_2\sigma_3 + K_2 \cdot \sigma\sigma_1\sigma_4 + K_3 \cdot \sigma\sigma_3\sigma_4} \\ = e^{K'_0 + K'_1 \cdot \sigma_1\sigma_3 + K'_2 \cdot \sigma_2\sigma_4 + K'_3 \cdot \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_4}$$

(il suffit dans l'équation (1) d'effectuer les changements $\lambda_1 = \sigma_1\sigma_3$, $\lambda_2 = \sigma_2\sigma_4$, $g = \sigma\sigma_1\sigma_2$). Cette relation peut être symbolisée par les figures :

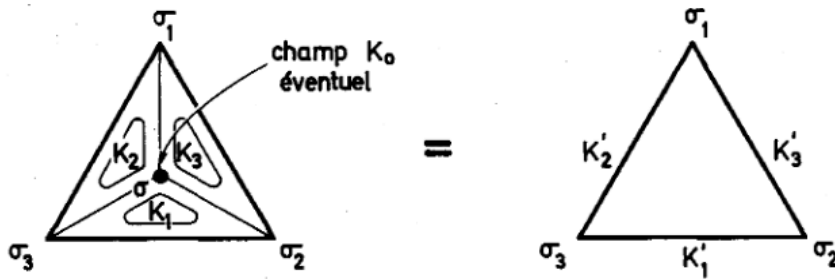


On reconnaît, dans l'expression de droite, le modèle à 8 vertex symétrique exprimé en terme de modèle à spin. Cette équivalence nous assure donc que le modèle à trois spins, correspondant à la première des figures, est un problème complètement intégrable. Une autre interprétation de l'équation (1) est la suivante : $\lambda_1 = \sigma_3\sigma_2$, $\lambda_2 = \sigma_1\sigma_3$

$$\sum_{\sigma=\pm 1} e^{(K_0 + K_1 \sigma_2 \sigma_3 + K_2 \sigma_1 \sigma_3 + K_3 \sigma_1 \sigma_2) \cdot \sigma}$$

$$= e^{K'_0 + K'_1 \sigma_2 \sigma_3 + K'_2 \sigma_1 \sigma_3 + K'_3 \sigma_1 \sigma_2}$$

que nous pouvons symboliser par les figures :



Ce modèle à trois spins (avec un champ éventuel sur un sous-ensemble des spins) est donc équivalent à un modèle d'Ising anisotrope sur réseau triangulaire, donc à un modèle de fermion libre [36].

Revenons à la relation triangle sur le modèle à 8 vertex symétrique. Nous voyons donc, qu'en dernière analyse, la relation triangle sur le modèle à 8 vertex symétrique provient en fait d'une identité algébrique très simple, liée au groupe $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$; il est tentant de généraliser ces idées au groupe $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ en utilisant l'identité :

$$\sum_g e^{g(K_0 + K_1 \cdot \lambda_1 + K_2 \cdot \lambda_2 + K_3 \cdot \lambda_3 + K_{12} \cdot \lambda_1 \lambda_2 + K_{23} \cdot \lambda_2 \lambda_3 + K_{13} \cdot \lambda_1 \lambda_3 + K_4 \cdot \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)}$$

$$= e^{K'_0 + K'_1 \cdot \lambda_1 + K'_2 \cdot \lambda_2 + K'_3 \cdot \lambda_3 + K'_{12} \cdot \lambda_1 \lambda_2 + K'_{23} \cdot \lambda_2 \lambda_3 + K'_{13} \cdot \lambda_1 \lambda_3 + K'_4 \cdot \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \pm 1$.

Cette relation pourrait être à l'origine d'une relation tétraèdre : la démarche est alors en quelque sorte inverse :

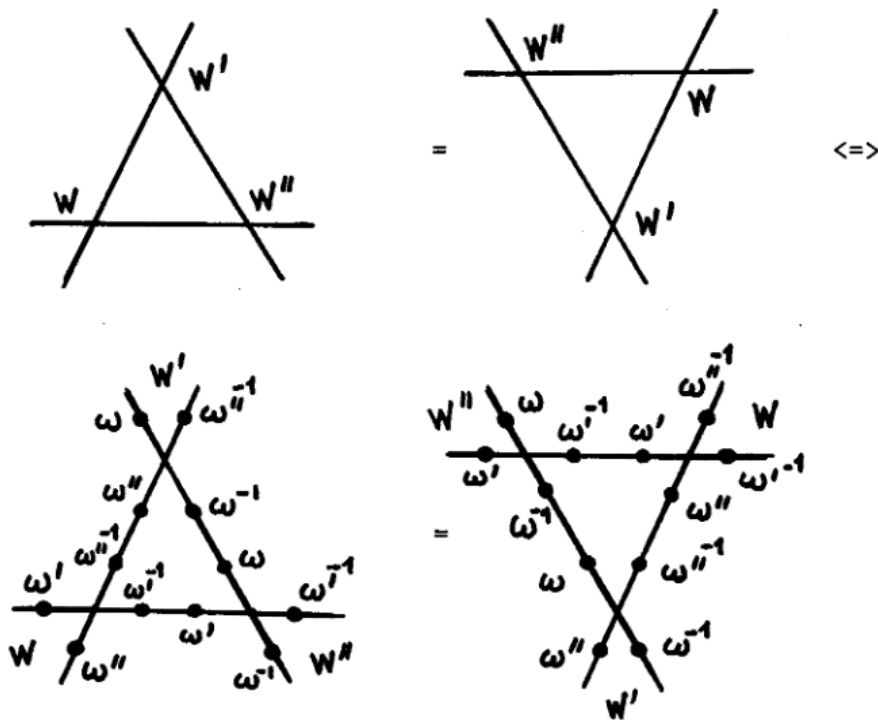
on part d'une identité qui "marche" et l'on essaye de trouver la relation tétraèdre à laquelle elle peut correspondre en jouant sur les interprétations des λ_i : $\lambda_i = \sigma_i \sigma_j$, $\lambda_i = \sigma_i \sigma_j \sigma_k$, $\lambda_i = \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l$ etc...

b) LES RELATIONS TRIANGLE ET L'INVARIANCE PAR LES CONJUGAISONS (WEAK-GRAPH DUALITY)

L'approche que nous venons de discuter, et qui s'appliquait aux modèles à spins, consisterait, nous l'avons dit, à partir d'un identité que l'on sait être satisfaite et à essayer de l'interpréter comme une relation triangle ou tétraèdre. Un autre exemple traduisant ce type de point de vue, mais dans le cadre des modèles à vertex maintenant, nous est fourni par A. Belavin [21] : il part en quelque sorte de la solution, en supposant a priori une uniformisation à l'aide de fonctions Θ (d'une variable fonctions Θ de Jacobi, ou de plusieurs variables [20]) et construit à partir de là, la relation triangle. L'idée repose sur le rôle central qui est joué par les transformations du type "weak-graph duality" (conjugaisons sur L_n) : si l'on considère la matrice S à deux corps S_{ijkl} , ou encore le poids de Boltzmann associé à un vertex $W(i,j,k,l)$, i, j, k, l appartenant pour fixer les idées à $\mathbb{Z}_p$; il est clair que les transformations du type :

$$S_{ijkl} \longrightarrow \sum_{i',j',k',l'} \omega(i,i') \cdot \omega^{-1}(k',k) \omega'(j,j') \omega'^{-1}(l',l) S_{i',j',k',l'}$$

ne modifient pas les fonctions de partition (ou les matrices S) de ces modèles ; en effet les matrices ω et ω^{-1} (resp ω' et ω'^{-1}) se détruisent mutuellement sur le réseau. Toutes les symétries connues de la fonction de partition du modèle à 8 vertex symétrique, par exemple, sont de ce type ($w_i \rightarrow \epsilon_i \cdot w_i$, $\epsilon_i = \pm 1$, permutations des w_i , au total un groupe de symétrie de $2^4 \cdot 4!$ éléments sans compter la dualité haute-basse température). Cependant ces relations jouent, en l'occurrence un rôle fondamental parce qu'elles laissent stable la relation triangle :



L'ensemble des équations provenant de la relation triangle doit donc être stable par ces symétries de conjugaison ; aussi pour exploiter cette stabilité, l'idée de Belavin consiste-t-elle à demander que quatre de ces conjugaisons aient une représentation analytique sur les matrices S à deux corps (matrices L_n) : elles vont toutes les deux se représenter comme les deux translations du paramètre spectral par les deux périodes des fonctions elliptiques (et ce à un facteur près, puisque les équations triangles sont homogènes) :

$$S(u+1) = (g^{(1)})^{-1} \cdot S(u) \cdot g^{(1)} = g^{(2)} \cdot S(u) \cdot (g^{(2)})^{-1}$$

$$S(u+\tau) = \lambda(h^{(1)})^{-1} \cdot S(u) \cdot h^{(1)} = \lambda h^{(2)} \cdot S(u) \cdot (h^{(2)})^{-1}$$

(Ce sont les équations (24) de l'article de Belavin [21]).

A. Belavin effectue alors une démonstration ([21] appendice) où il montre comment ces hypothèses sur la seule matrice S à deux corps (ou sur le seul vertex élémentaire), implique automatiquement la relation triangle. Il retrouve ainsi l'exemple, cité précédemment (II.b), s'uniformisant à l'aide de fonctions Θ de plusieurs variables, mais il trouve également des modèles s'uniformisant à l'aide de fonctions Θ d'une seule variable, plus compliquées que les fonctions Θ de Jacobi :

$$\Theta(u) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(m+\frac{\alpha_2}{N})^2 \tau + 2\pi i(m+\frac{\alpha_2}{N})(u+\frac{\alpha_1}{N})}$$

α_1, α_2

où α_1 et α_2 valent 0, 1, ... N-1.

Ce type de fonctions Θ intervient dans d'autres problèmes par exemple dans le modèle d'hexagone dur ($\alpha_2 = 0$, $N = 5$) (voir appendice 1 communication privée de M. Gaudin).

On peut parfaitement envisager d'étendre l'approche de Belavin en dimension trois (ou plus), les conjugaisons selon les trois directions du vertex se voyant représenter par trois translations (périodes ou pseudo-périodes) sur une ou plusieurs variables spectrales. Cependant le type de fonctions devant uniformiser le problème est loin d'être évident a priori.

c) LE CRITERE $\lambda e' \otimes f' = L \cdot e \otimes f$

1) Introduction du critère

Aussi allons-nous étudier une troisième voie que nous considérons comme peut-être la plus prometteuse : pour la clarté de l'exposition nous

allons développer ces idées sur l'exemple très simple du modèle à 8 vertex symétrique dont nous rappelons la matrice 4x4 :

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Considérons le problème suivant : déterminer les vecteurs e, f, e', f' tel que l'on aie la propriété suivante :

$$L [e \otimes f] = \lambda \cdot e' \otimes f'$$

Ecrivons e sous la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ r \\ p \\ pr \end{pmatrix}$ et e' sous la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ r' \\ p' \\ p'r' \end{pmatrix}$, $f : \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$ et $f' : \begin{pmatrix} 1 \\ p' \end{pmatrix}$.

La propriété s'écrit encore :

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ p \\ pr \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ r' \\ p' \\ p'r' \end{bmatrix}$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ pe \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} e' \\ p'e' \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & d \\ c & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

On peut éliminer e' ce qui revient alors à dire qu'il existe e tel que

$$[C + pD - p'(A+pB)] e = 0 \Leftrightarrow$$

$$\det [C + pD - p'(A+pB)] = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -p'a+pb & c-pp'd \\ -pp'c+d & pa-p'b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (p^2 p'^2 + 1) cd - (p^2 + p'^2) ab + pp'(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) = 0$$

On constate qu'on retrouve ainsi, de très simple façon, les invariants du modèle à 8 vertex symétrique $\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab}$ et $\frac{ab}{cd}$.

Ces invariants étant donnés, il est connu que des transformations telles que la précédente, liant p à p' , s'uniformisent grâce à des fonctions elliptiques : si $p = k^{1/2} \cdot \text{sn } u$
alors $p' = k^{1/2} \cdot \text{sn}(u \pm 2\eta)$

(où k et η ont les mêmes définitions que précédemment).

Considérons l'exemple encore plus simple du modèle à 6 vertex ($d = 0$) : on trouve alors l'équation :

$$(p^2 + p'^2) ab - pp'(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

mais également l'équation $pr = p'r'$.

Si nous posons $p' = -p \cdot t$, la première relation revient à définir un nouvel invariant pour le modèle :

$$a^2 + b^2 - c^2 + ab(t + \frac{1}{t}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + tb) (a + \frac{b}{t}) = c^2$$

Nous voyons que nous pouvons encore poser du fait de l'équation précédente

$$\begin{cases} a + \frac{b}{t} = c/x \\ a + tb = cx \end{cases} \quad \text{ce qui revient à dire}$$

que $r = -pt/x$, $r' = p/x = -p'/xt$, ainsi que $\lambda = a$.

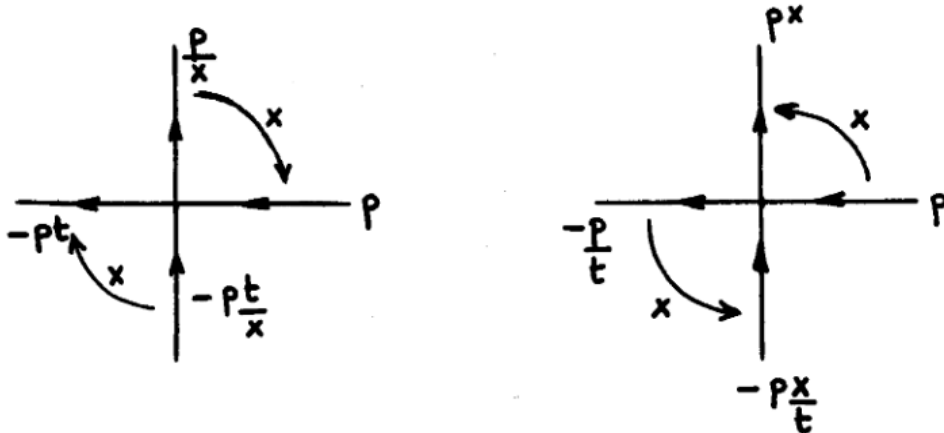
En effet, on a alors :

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ p/x \\ -pt \\ -p^2t/x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -pt/x \\ p \\ -p^2t/x \end{pmatrix}$$

On pouvait également envisager de poser $p' = -p/t$, auquel cas on aurait eu :

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ px \\ -p/t \\ -p^2x/t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -px/t \\ p \\ -p^2x/t \end{pmatrix}$$

Nous conviendrons pour la suite de symboliser ces égalités par :



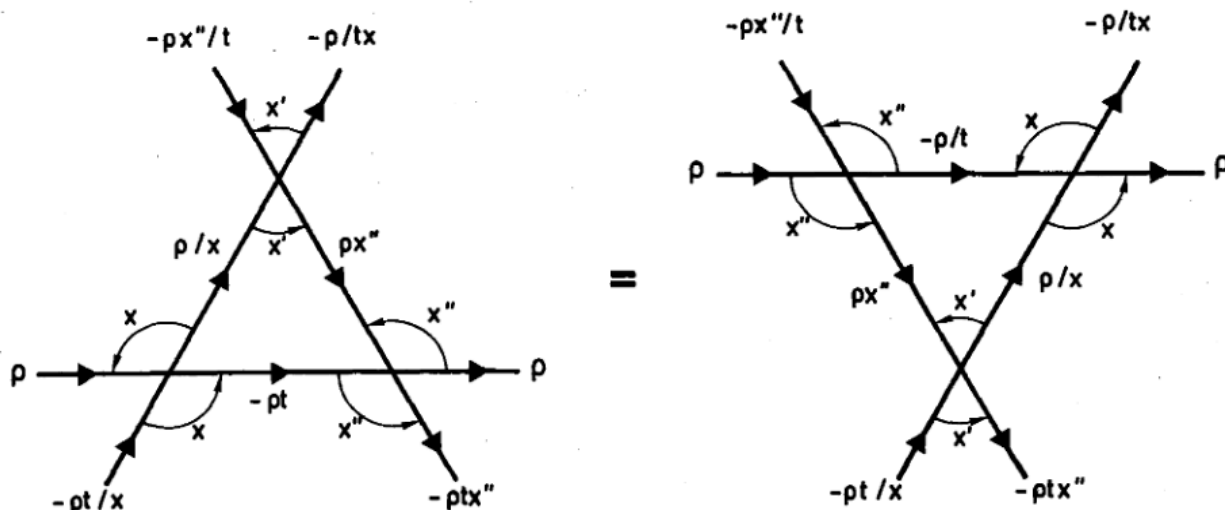
pour la deuxième convention.

Nous retrouvons donc très naturellement l'uniformisation rationnelle qu'introduisaient par exemple Sklyanin, Takhtajan et Faddeev lorsqu'ils écrivaient [26] :

$$\begin{cases} \mu = \lambda b + e^{-i\gamma} \cdot \mu c \\ \frac{1}{\mu} = b/\lambda + e^{i\gamma} \cdot c/\mu \end{cases}$$

(si l'on considère, au lieu de la variable x , la variable θ telle que $e^{\theta} = x$, on réobtient l'uniformisation bien connue à l'aide des sinus ou des sinus hyperboliques [37]).

Nous allons voir qu'on peut à partir de cette propriété sur la seule matrice à deux corps (resp. le seul poids de Boltzmann du vertex), obtenir la relation triangle dans le cas du modèle à 6 vertex symétrique : en effet, à partir de cette propriété, on peut écrire l'égalité entre les figures suivantes :



sous réserve que $xx'' = x'$

Avec ces conventions nécessaires pour écrire des produits matriciels, mais qui dissymétrisent les rôles joués par W , W' et W'' , les équations trilinéaires s'écrivent :

$$\begin{cases} ac'c'' + cb'b'' = ca'a'' \\ ac'b'' + cb'c'' = bc'a'' \\ ab'c'' + cc'b'' = ba'c'' \end{cases}$$

avec le changement de variable précédent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{x} = a + \frac{b}{t} \\ cx = bt + a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{a} = -\frac{1}{t} \frac{(1-x^2)}{1 - \frac{x^2}{t^2}} = (-t) \frac{(1-x^2)}{(t^2-x^2)} \\ \frac{c}{a} = \frac{x(1-1/t^2)}{1 - x^2/t^2} = \frac{x(t^2-1)}{(t^2-x^2)} \end{array} \right.$$

On peut vérifier facilement que les trois équations précédentes donnent effectivement $xx' = x''$. Nous voyons, sur cet exemple, la simplicité d'utilisation de ce critère qui induit (mais n'implique pas stricto sensu, nous reviendrons sur ce point) la relation triangle. Ce qui apparaît également clairement est la rapidité avec laquelle, utilisant ce critère on peut obtenir les invariants algébriques d'un modèle. Illustrons cette affirmation sur le modèle à 8 vertex le plus général et sur le modèle à 16 vertex :

Dans le cas plus simple du modèle à huit vertex quelconque

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & \omega_7 \\ 0 & \omega_4 & \omega_5 & 0 \\ 0 & \omega_5 & \omega_3 & 0 \\ \omega_7 & 0 & 0 & \omega_2 \end{pmatrix}$$

ce même critère conduit à l'équation :

$$\begin{vmatrix} p\omega_3 - p'\omega_1 & \omega_5 & -pp'\omega_7 \\ \omega_7 & -pp'\omega_5 & p\omega_2 - p'\omega_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 0 = & -p^2 p'^2 \omega_5 \omega_7 + pp'(\omega_5^2 + \omega_7^2 - \omega_1 \omega_2 - \omega_3 \omega_4) \\ & + p^2 \omega_2 \omega_3 + p'^2 \omega_1 \omega_4 - \omega_5 \omega_7 \end{aligned}$$

Cette équation nous fournit la généralisation des invariants

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab} \text{ et } \frac{cd}{ab}, \text{ en l'occurrence, } \frac{\omega_5^2 - \omega_7^2 - \omega_1\omega_2 - \omega_3\omega_4}{\omega_1\omega_4 + \omega_2\omega_3}, \frac{\omega_5\omega_7}{\omega_1\omega_4} \text{ et } \frac{\omega_1\omega_4}{\omega_2\omega_3}.$$

Nous avons donc un invariant de plus : $\frac{\omega_1\omega_4}{\omega_2\omega_3}$. Deux remarques s'imposent : on retrouve dans le cas du modèle à 6 vertex asymétrique (auquel est associé une famille de matrice de transfert qui commutent, dépendant de deux paramètres [37] ($\omega_7 = 0, \omega_1 = \omega_2$)) les deux invariants connus pour ce modèle à savoir :

$$\frac{\omega_5^2 - \omega_1\omega_2 - \omega_3\omega_4}{\omega_1\omega_4 + \omega_2\omega_3} \text{ et } \frac{\omega_1\omega_4}{\omega_2\omega_3}$$

Nous voyons d'autre part qu'en effectuant la transformation simple

$$p \rightarrow \sqrt{\frac{\omega_1\omega_4}{\omega_2\omega_3}} \cdot p \text{ l'équation précédente se ramène à la forme}$$

$\alpha + \beta(p^2 + p'^2) + \gamma pp' + \alpha p^2 p'^2 = 0$ qui, nous le savons, appelle une uniformisation elliptique : nous en venons à la conclusion que l'on peut introduire une uniformisation elliptique sur le modèle à 8 vertex non symétrique.

Appliquons maintenant ce critère ($\lambda e' \otimes f' = Le \otimes f$) à un modèle déjà compliqué, le modèle à 16 vertex. Tout comme Gaaf et Hijmans [38], nous utilisons l'invariance par les conjugaisons (weak-graph duality) pour ramener la matrice 4x4 à la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_{14} & \omega_{10} & \omega_7 \\ \omega_{13} & \omega_4 & \omega_5 & \omega_{10} \\ \omega_9 & \omega_5 & \omega_3 & \omega_{14} \\ \omega_7 & \omega_9 & \omega_{13} & \omega_2 \end{pmatrix}$$

Le critère précédent conduit à l'équation :

$$\det [C + pD - p'(A+pB)] = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \omega_9 + p\omega_3 - p'\omega_1 - pp'\omega_{10} & \omega_5 + p\omega_{14} - p'\omega_{14} - pp'\omega_7 \\ \omega_7 + p\omega_{13} - p'\omega_{13} - pp'\omega_5 & \omega_9 + p\omega_2 - p'\omega_4 - pp'\omega_{10} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (\omega_9^2 - \omega_5\omega_7) + p(\omega_2\omega_9 - \omega_7\omega_{14} + \omega_3\omega_9 - \omega_5\omega_{13}) \\ & + p'(\omega_7\omega_{14} + \omega_5\omega_{13} - \omega_4\omega_9 - \omega_1\omega_9) \\ & + pp'(\omega_7^2 + 2\omega_{13}\omega_{14} + \omega_5^2 - \omega_3\omega_4 - 2\omega_9\omega_{10} - \omega_1\omega_2) \\ & + p^2(\omega_3\omega_2 - \omega_{13}\omega_{14}) \\ & + p'^2(\omega_1\omega_4 - \omega_{13}\omega_{14}) \\ & + pp'^2(\omega_4\omega_{10} + \omega_1\omega_{10}) \\ & - p^2p'(\omega_3\omega_{10} + \omega_2\omega_{10}) \\ & + p^2p'^2(\omega_{10}^2 - \omega_5\omega_7) = 0 \end{aligned}$$

Les quotients des coefficients des divers monômes p^2 , p'^2 , pp'^2 etc... fournissent des invariants algébriques du modèle (en supposant que le modèle est susceptible de supporter une relation triangle bien sûr).

2) Lien avec l'algèbre de Zamolodchikov

Comparons cette propriété de la matrice L qui consiste à transformer un projecteur $(e \otimes f)$ en un autre projecteur $(e' \otimes f')$ avec la notion d'algèbre de Zamolodchikov. A.B. Zamolodchikov et A.B. Zamolodchikov ont introduit [18] cette notion parce qu'elle assure automatiquement la réalisation de la relation triangle : en effet considérons la relation :

$$A_i(\theta_m) A_j(\theta_n) = S_{ijkl}(\theta_m - \theta_n) \cdot A_k(\theta_n) \cdot A_l(\theta_m) \quad (2)$$

où les A_i appartiennent à une certaine algèbre et dépendent d'un paramètre (nous n'écrivons pas les sommations : on doit sommer sur tout indice répété). Si l'on considère le produit $A_x(\theta_1)$, $A_y(\theta_2)$, $A_z(\theta_3)$, il y a deux façons de le développer : soit en écrivant

$$\begin{aligned} A_x(\theta_1) A_y(\theta_2) A_z(\theta_3) &= S_{xy}^{ab}(\theta_1 - \theta_2) A_a(\theta_2) A_b(\theta_1) A_z(\theta_3) \\ &= S_{xy}^{ab}(\theta_1 - \theta_2) S_{bz}^{cv}(\theta_1 - \theta_3) A_a(\theta_2) A_c(\theta_3) A_v(\theta_1) \\ &= S_{xy}^{ab}(\theta_1 - \theta_2) S_{bz}^{cv}(\theta_1 - \theta_3) S_{ac}^{tu}(\theta_2 - \theta_3) A_t(\theta_3) A_u(\theta_2) A_v(\theta_1) \end{aligned}$$

soit en écrivant

$$A_x(\theta_1) A_y(\theta_2) A_z(\theta_3) = S_{yz}^{ab}(\theta_2 - \theta_3) A_x(\theta_1) A_a(\theta_3) A_b(\theta_2)$$

et en continuant de manière analogue. Ceci conduit à l'équation :

$$\begin{aligned} S_{xy}^{ab}(\theta_1 - \theta_2) S_{bz}^{cv}(\theta_1 - \theta_3) S_{ac}^{tu}(\theta_2 - \theta_3) A_t(\theta_3) A_u(\theta_2) A_v(\theta_1) \\ = S_{yz}^{ab}(\theta_2 - \theta_3) S_{xa}^{tc}(\theta_1 - \theta_3) S_{cb}^{uv}(\theta_1 - \theta_2) A_t(\theta_3) A_u(\theta_2) A_v(\theta_1) \end{aligned}$$

qui assure l'existence de la relation triangle suivante (factorisation de la matrice S) :

$$S_{xy}^{ab}(\theta_1 - \theta_2) S_{bz}^{cv}(\theta_1 - \theta_3) S_{ac}^{tu}(\theta_2 - \theta_3) = S_{yz}^{ab}(\theta_2 - \theta_3) S_{xa}^{tc}(\theta_1 - \theta_3) S_{cb}^{uv}(\theta_1 - \theta_2)$$

En fait, pour être rigoureux, il faut s'assurer que les différents $A_c(\theta_3) A_u(\theta_2) A_v(\theta_1)$ forment un ensemble de vecteurs indépendants, ce qui est assez difficile en général.

Remarquons qu'une difficulté analogue existe pour démontrer la relation triangle à partir du critère précédent ($\lambda e' \otimes f' = Le \otimes f$). En effet ce que nous démontrons c'est que deux matrices donnent le même résultat lorsqu'elles agissent sur le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -px'' \\ t \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -pt \\ x \end{pmatrix}$ et ce quel que soit p

(x, t, x'' sont fixés). Ceci n'implique pas, a priori, l'égalité de ces matrices (matrices S à trois corps). Cependant ce vecteur possède huit composantes dont trois sont proportionnelles à p, trois à p², une à p³, une constante en p. Cette notion d'homogénéité en p permet de voir facilement quelles sont les relations existant entre ces deux matrices.

De plus on peut trouver d'autres configurations analogues à celles de la figure précédente : le problème est ici de savoir si la réunion de toutes ces contraintes implique effectivement l'identité de ces deux matrices.

Nous allons voir, sur l'exemple du modèle à 8 vertex symétrique, qu'en fait le critère que nous avons introduit s'identifie avec une représentation fonctionnelle de l'algèbre de Zamolodchikov : en effet on peut voir que si l'on représente $A_i(\theta_1)$ comme l'opérateur

$$A_i(\theta_1) f(z) = f_i(z-\theta_1) f(z-\eta)$$

où $i = 1, 2$, $f_1(z) = \theta_1(2z, q^2)$, $f_2(z) = \theta_4(2z, q^2)$

$q = e^{i\pi\tau}$, on peut vérifier que la relation sur l'algèbre de Zamolodchikov revient à la relation

$$f_i(z-\theta_1) f_j(z-\theta_2-\eta) = S_{ij}^{kl}(\theta_1-\theta_2) f_k(z-\theta_2) f_l(z-\theta_1-\eta) \quad (3)$$

Or si l'on impose que $S_{ij}^{kl}(v)$ est égal à $\frac{f_{j+1}(v) \cdot f_{i+1}(\eta)}{f_2(0) \cdot f_{i+j}^{(v+\eta)}}$ ($j+1, i+1, i+j$ doivent être regardés modulo 2) si $i+k = j+1$ (mod 2), S_{ij}^{kl} est nul sinon, la relation est une identité vérifiée par les fonctions θ de Jacobi. Il est alors facile de voir que l'identité précédente revient à écrire $\lambda e' \otimes f' = L.e \otimes f$ où L s'identifie à S_{ij}^{kl} vu comme une matrice 4×4

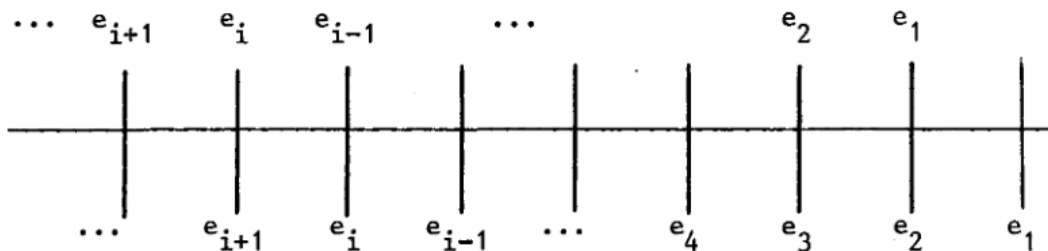
$$\text{et } e = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_1 \\ \frac{\theta_1}{\theta_4} (z-\theta_2) \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_1 \\ \frac{\theta_1}{\theta_4} (z-\theta_1-\eta) \end{pmatrix}$$

$$e' = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_1 \\ \frac{\theta_1}{\theta_4} (z-\theta_1) \end{pmatrix}, \quad f' = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_1 \\ \frac{\theta_1}{\theta_4} (z-\theta_2-\eta) \end{pmatrix}$$

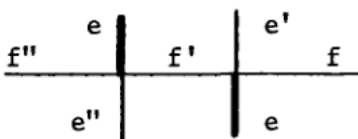
Comme $\frac{\theta_1}{\theta_4}(u) = k^{1/2} \operatorname{sn}(u)$ nous avons dans le cadre de cette uniformisation elliptique complètement identifié ces deux critères. Cependant l'algèbre de Zamolodchikov est une notion abstraite qui ne devient vraiment utile que lorsqu'on a pu lui associer une représentation analytique précise : or "deviner" une relation telle que (3) est au moins aussi difficile que de vérifier la relation triangle pour le modèle à 8 vertex symétrique par la méthode classique qui fait intervenir certaines identités sur les fonctions elliptiques (relations quartiques de Riemann). Le critère que nous avons mis en avant présente l'avantage de permettre de conduire tous les calculs même si l'on a pas vu l'uniformisation elliptique (ou tout autre) sous jacente.

3) Les liens avec l'ansatz de Bethe et l'existence d'un pseudo-vide

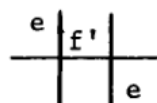
Nous allons maintenant voir qu'il existe des liens étroits entre le critère $\lambda e' \otimes f' = L.e \otimes f$ et la construction des vecteurs propres de l'ansatz de Bethe. Cette construction repose [37] sur l'existence d'un vecteur, le pseudo-vide, qui est un pur produit tensoriel, et qui est tel qu'il se transforme par l'action de la matrice de transfert en lui-même, translaté d'un pas du réseau :



Une condition suffisante pour obtenir ce pseudo-vide est que, dans le cadre de la propriété précédente, on puisse avoir le même vecteur sur les deux branches notées par un trait plus fort :

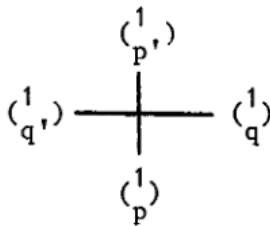


En fait les expressions exactes de e' , f , e'' , f'' sont secondaires, ce qui importe étant la cohérence que nous symbolisons par :



Nous nous plaçons dans le cadre du modèle à 16 vertex :

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ p' \\ q' \\ p'q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_{14} & \omega_{10} & \omega_7 \\ \omega_{13} & \omega_4 & \omega_5 & \omega_{10} \\ \omega_9 & \omega_5 & \omega_3 & \omega_{14} \\ \omega_7 & \omega_9 & \omega_{13} & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ q \\ pq \end{pmatrix}$$



Nous avons les équations suivantes :

$$q' = \frac{(\omega_9 + \omega_5 p) + q(\omega_3 + \omega_{14} p)}{(\omega_1 + \omega_{14} p) + q(\omega_5 + \omega_7 p)} = \frac{(\omega_7 + \omega_9 p) + q(\omega_{13} + \omega_2 p)}{(\omega_{13} + \omega_4 p) + q(\omega_5 + \omega_{10} p)}$$

$$p' = \frac{(\omega_{13} + \omega_5 q) + p(\omega_4 + \omega_{10} q)}{(\omega_1 + \omega_{10} q) + p(\omega_{14} + \omega_7 q)} \\ = \frac{(\omega_7 + \omega_{13} q) + p(\omega_9 + \omega_2 q)}{(\omega_9 + \omega_3 q) + p(\omega_5 + \omega_{14} q)}$$

Des premières équations nous obtenons q en fonction de p et q'

$$q = \frac{(\omega_9 + \omega_5 p) - q'(\omega_1 + \omega_{14} p)}{(\omega_{10} + \omega_7 p) q' - (\omega_3 + \omega_{14} p)} = \frac{(\omega_7 + \omega_9 p) - (\omega_{13} + \omega_4 p) q'}{(\omega_5 + \omega_{10} p) q' - (\omega_{13} + \omega_2 p)}$$

Cette dernière équation nous donne la condition de cohérence suivante pour qu'un pur produit tensoriel $e \otimes f$ donne un pur produit tensoriel $e' \otimes f'$ par action de la matrice L :

$$\begin{aligned}
 & (\omega_9 + \omega_5 p - \omega_1 q' - \omega_{14} p q') (\omega_5 q' + \omega_{10} p q' - \omega_{13} - \omega_2 p) \\
 & = (\omega_7 + \omega_9 p - \omega_{13} q' - \omega_4 p q') (\omega_{10} q' + \omega_7 p q' - \omega_3 - \omega_{14} p)
 \end{aligned} \quad (A)$$

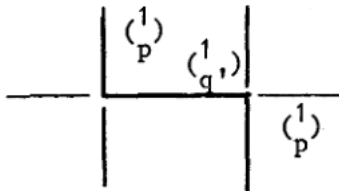
On peut également obtenir l'expression de p en fonction de q et p' :

$$p = \frac{(\omega_{13} + \omega_5 q) - (\omega_1 + \omega_{10} q) p'}{(\omega_{14} + \omega_7 q) p' - (\omega_4 + \omega_{10} q)} = \frac{(\omega_7 + \omega_{13} q) - (\omega_9 + \omega_3 q) p'}{(\omega_5 + \omega_{14} q) p' - (\omega_9 + \omega_2 q)}$$

qui conduit à la condition de cohérence suivante s'exprimant cette fois-ci en fonction de q et p' :

$$\begin{aligned}
 & (\omega_{13} + \omega_5 p - \omega_1 p' + \omega_{10} q p') (\omega_5 p' + \omega_{14} q p' - \omega_9 - \omega_2 q) = \\
 & (\omega_7 + \omega_{13} q - \omega_9 p' - \omega_3 q p') (\omega_{14} p' + \omega_7 q p' - \omega_4 - \omega_{10} q)
 \end{aligned} \quad (B)$$

Nous voulons réaliser la cohérence suivante



Ce qui nécessite l'équation (A) sur p et q' mais également que l'équation (B) soit satisfaite q' remplaçant q et p remplaçant p' ; nous appellerons cette dernière équations (C) :

$$\begin{aligned}
 & (\omega_{13} + \omega_5 q' - \omega_1 p - \omega_{10} p q') (\omega_5 p + \omega_{14} q' p - \omega_9 - \omega_2 q') \\
 & = (\omega_7 + \omega_{13} q' - \omega_9 p - \omega_3 p q') (\omega_{14} p + \omega_7 p q' - \omega_4 - \omega_{10} q')
 \end{aligned} \quad (C)$$

Pour que les équations (A) et (C) soient simultanément vérifiées une condition suffisante est que les coefficients des divers monômes p^2 , q'^2 , p , q' , $p^2 q'$ etc... soient égaux. Ceci nous conduit aux diverses équations.

En posant $\Omega = \omega_4 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_1$

terme en q' :

$$\omega_{13} \Omega - 2 \omega_5 \omega_9 + 2 \omega_7 \omega_{10} = 0 \quad (1)$$

terme en p :

$$\omega_9 \Omega - 2 \omega_5 \omega_{13} + 2 \omega_7 \omega_{14} = 0 \quad (2)$$

terme en $p^2 q'$:

$$\omega_{14} \Omega - 2 \omega_5 \omega_{10} + 2 \omega_7 \omega_9 = 0 \quad (3)$$

terme en $p q'^2$:

$$\omega_{10} \Omega - 2 \omega_5 \omega_{14} + 2 \omega_7 \omega_{13} = 0 \quad (4)$$

terme en p^2 et q'^2 :

$$(\omega_1 - \omega_2) \cdot \omega_5 = 0 \quad (5)$$

terme constant :

$$(\omega_4 - \omega_3) \cdot \omega_7 = 0 \quad (6)$$

(le terme en $p q'$ ne conduit à aucune équation).

Etudions tout d'abord les quatre premières équations.

1) Si Ω est nul, les quatre premières équations se ramènent à

$$\omega_5 \omega_9 = \omega_7 \omega_{10}, \quad \omega_5 \omega_{13} = \omega_7 \omega_{14}$$

$$\omega_5 \omega_{10} = \omega_7 \omega_9, \quad \omega_5 \omega_{14} = \omega_7 \omega_{13}$$

a) Si ω_5, ω_7 sont tous deux non nuls, ces équations se ramènent à

$$\omega_5 = \omega_7, \omega_9 = \omega_{10}, \omega_{13} = \omega_{14}$$

b) Si $\omega_5 = 0$ et $\omega_7 = 0$, les équations sont satisfaites.

c) Si $\omega_5 = 0, \omega_7 \neq 0$, alors $\omega_9 = \omega_{10} = \omega_{13} = \omega_{14} = 0$

d) Si $\omega_7 = 0, \omega_5 \neq 0$, alors $\omega_9 = \omega_{10} = \omega_{13} = \omega_{14} = 0$

2) Si Ω est non nul

a) Supposons ω_{10} et $\omega_{14} \neq 0$

alors de (2) et (4) nous tirons

$$\frac{\omega_9}{\omega_{10}} = \frac{\frac{\omega_{13}}{\omega_{14}} - \frac{\omega_7}{\omega_5}}{1 - \frac{\omega_7}{\omega_5} \frac{\omega_{13}}{\omega_{14}}} \quad (7)$$

et de (1) et (3) nous tirons

$$\frac{\omega_{13}}{\omega_{14}} = \frac{\frac{\omega_9}{\omega_{10}} - \frac{\omega_7}{\omega_5}}{1 - \frac{\omega_7}{\omega_5} \frac{\omega_9}{\omega_{10}}} \Rightarrow \frac{\omega_9}{\omega_{10}} = \frac{\frac{\omega_{13}}{\omega_{14}} + \frac{\omega_7}{\omega_5}}{1 + \frac{\omega_7}{\omega_5} \frac{\omega_{13}}{\omega_{14}}} \quad (8)$$

De (7) et (8) nous tirons que soit

$$\frac{\omega_7}{\omega_5} = 0, \text{ soit } \frac{\omega_{13}}{\omega_{14}} = \epsilon = \pm 1 = \frac{\omega_9}{\omega_{10}}.$$

$$\text{Si } \omega_7 = 0 \quad (7) \text{ ou } (8) \Rightarrow \frac{\omega_9}{\omega_{10}} = \frac{\omega_{13}}{\omega_{14}}$$

$$(3) \text{ et } (4) \Rightarrow \frac{\omega_{14}}{\omega_{10}} = \varepsilon' = \pm 1$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \omega_{13} = \omega_9 = 0 \text{ ou } \frac{\omega_{13}}{\omega_9} = \varepsilon'' = \pm 1$$

$$\text{Si } \omega_9 \text{ et } \omega_{13} \neq 0 \quad \frac{\omega_{13}}{\omega_{14}} \frac{\omega_{10}}{\omega_9} = 1 = \varepsilon' \varepsilon''$$

$$(1) \text{ ou } (2) \text{ ou } (3) \text{ ou } (4) \Rightarrow \Omega - 2 \varepsilon' \omega_5 = 0$$

$$\text{Si } \omega_9 = \omega_{13} = 0 \quad (3) \text{ ou } (4) \Rightarrow \Omega - 2 \varepsilon' \omega_5 = 0$$

$$\text{Si } \frac{\omega_{13}}{\omega_{14}} = \frac{\omega_9}{\omega_{10}} = \varepsilon \quad \left. \begin{array}{l} (1) \text{ et } (3) \Rightarrow \frac{\omega_{13}}{\omega_9} \Omega = 2(\omega_5 - \varepsilon \omega_7) \\ (2) \text{ et } (4) \Rightarrow \frac{\omega_9}{\omega_{13}} \Omega = 2(\omega_5 - \varepsilon \omega_7) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_{13}}{\omega_9} = \varepsilon' = \pm 1$$

$$(1) \text{ ou } (2) \text{ ou } (3) \text{ ou } (4) \Rightarrow \Omega - 2 \varepsilon' \omega_5 + 2 \varepsilon \varepsilon' \omega_7 = 0$$

b) Supposons que $\omega_{10} = \omega_{14} = 0$

$$(3) \text{ et } (4) \Rightarrow \omega_7 \omega_9 = 0 = \omega_7 \omega_{13}$$

Soit $\omega_7 = 0$ (1) et (2) se réduisent à

$$\omega_{13} \Omega = 2 \omega_5 \omega_9 \text{ et } \omega_9 \Omega = 2 \omega_5 \omega_{13}$$

$$\text{si } \omega_9 = 0 \Rightarrow \omega_{13} = 0$$

$$\text{si } \omega_9 \neq 0 \Rightarrow \frac{\omega_9}{\omega_{13}} = \varepsilon = \pm 1 \Rightarrow \Omega - 2 \varepsilon \omega_5 = 0$$

Soit $\omega_9 = \omega_{13} = 0$ les équations sont automatiquement satisfaites.

$$e) \omega_9 = \omega_{10} = \omega_{13} = \omega_{14},$$

$$\omega_4 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_1 - 2\omega_5 + 2\omega_7 = 0$$

$$\text{et, } \omega_1 = \omega_2 \text{ et } \omega_3 = \omega_4, \text{ ou } \omega_1 = \omega_2 \text{ et } \omega_7 = 0.$$

$$f) \omega_1 = \omega_2, \omega_3 = \omega_4, \omega_5 = \omega_{10} = \omega_{13} = 0, \omega_9 = \omega_{14}$$

$$(\omega_3 - \omega_1) + \omega_7 = 0$$

$$g) \omega_5 = \omega_7, \omega_9 = \omega_{10}, \omega_{13} = \omega_{14},$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4$$

La solution c) ($\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4, \omega_5 = \omega_7 = 0$) conduit à une matrice L_n qui écrite en tant que matrice développée sur les matrices de Pauli est égal

$$L_n = \sum_{i=0, j=0}^3 W_{ij} \sigma_i \tau_j = W_{00} \sigma_0 \tau_0 + \sum_{i=1}^3 W_{0i} \sigma_0 \tau_i$$

$$+ \sum_{j=1}^3 W_{j0} \sigma_j \tau_0 = A \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes B$$

$$\text{où } A = \frac{1}{2} W_0 \tau_0 + \sum_{i=1}^3 W_{0i} \tau_i$$

$$B = \frac{1}{2} W_0 \sigma_0 + \sum_{j=1}^3 W_{j0} \sigma_j$$

Si nous écrivons L_n comme une matrice 4x4, nous voyons qu'elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_{14} & \omega_{10} & 0 \\ \omega_{13} & \omega_4 & 0 & \omega_{10} \\ \omega_9 & 0 & \omega_3 & \omega_{14} \\ 0 & \omega_9 & \omega_{13} & \omega_2 \end{pmatrix}$$

où X, Y, Z, T sont quatre matrices qui peuvent être mises simultanément sous forme triangulaire supérieure (resp. inférieure) (en effet elles peuvent même

c) Supposons $\omega_{10} = 0$, $\omega_{14} \neq 0$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \text{ et } (3) \Rightarrow \frac{\omega_{13}}{\omega_{14}} = -\frac{\omega_5}{\omega_7} \\ (4) \Leftrightarrow \omega_7 \omega_{13} = \omega_5 \omega_{14} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_{13} = 0 = \omega_5$$

$$(2) \Leftrightarrow \omega_9 \Omega = -2\omega_7 \omega_{14}$$

$$(2) \text{ et } (3) \Rightarrow \omega_9 = \omega_{14}$$

d) Supposons $\omega_{14} = 0$, $\omega_{10} \neq 0$

$$\left. \begin{array}{l} (2) \text{ et } (4) \Rightarrow \frac{\omega_9}{\omega_{10}} = -\frac{\omega_5}{\omega_7} \\ (3) \Leftrightarrow \omega_7 \omega_9 = \omega_5 \omega_{10} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_5 = 0 = \omega_9$$

$$(1) \Leftrightarrow \omega_{13} \Omega = -2\omega_7 \omega_{10}$$

$$(1) \text{ et } (4) \Rightarrow \omega_{10} = \omega_{13}$$

Si nous faisons maintenant intervenir les équations (5) et (6) dont les solutions sont $\omega_1 = \omega_2$ et $\omega_3 = \omega_4$ ou $\omega_1 = \omega_2$ et $\omega = 0$ ou $\omega_3 = \omega_4$ et $\omega_5 = 0$ ou $\omega_5 = \omega_7 = 0$, nous obtenons les solutions du système des 6 équations initiales. Parmi toutes ces solutions donnons en certaines :

Nous avons tout d'abord les solutions bien connues :

a) $\omega_9 = \omega_{10} = \omega_{13} = \omega_{14} = 0$ et $\omega_1 = \omega_2$ et $\omega_3 = \omega_4$ (modèle à 8 vertex symétrique).

b) $\omega_9 = \omega_{10} = \omega_{13} = \omega_{14} = 0$ et $\omega_1 = \omega_2$ et $\omega_7 = 0$ (modèle à 6 vertex asymétrique connu pour avoir une famille de matrice de transfert commutante, famille dépendant de deux paramètres [37] mais également :

$$c) \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4, \omega_5 = \omega_7 = 0$$

$$d) \omega_9 = \omega_{10} = \omega_{13} = \omega_{14} = 0 = \omega_7, \omega_1 = \omega_2$$

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$$

être simultanément diagonalisées car $X = T + \lambda \mathbb{1}$ et Z et Y sont proportionnels à la matrice identité). Le modèle satisfait donc les conditions de J. Rae [25] et correspond donc à un modèle unidimensionnel dont on peut même donner la fonction de partition :

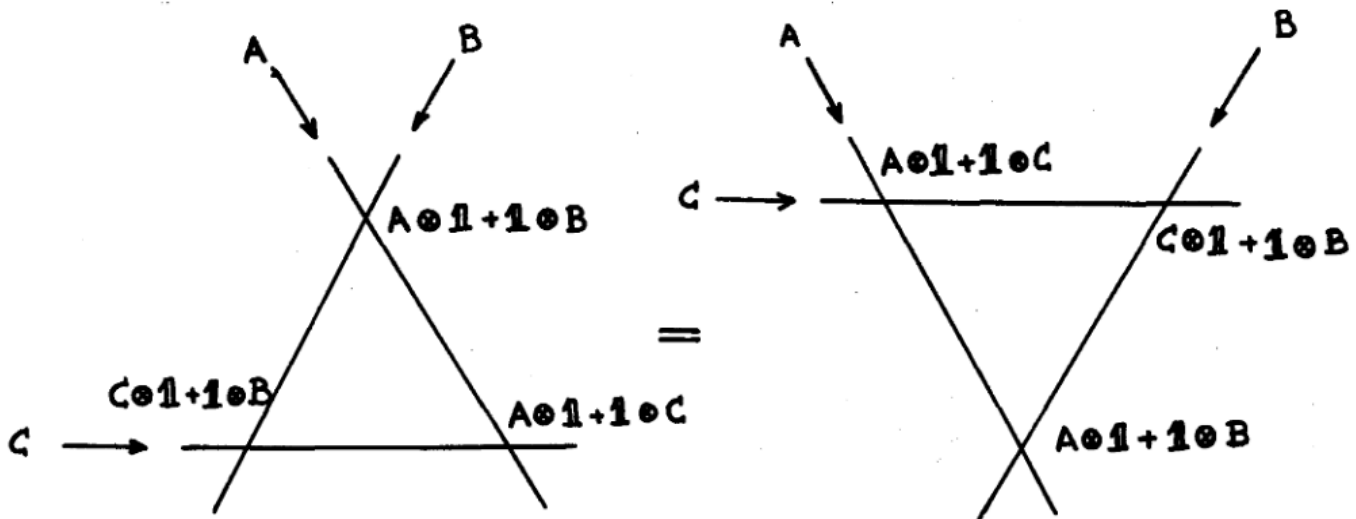
$$\Lambda = \frac{1}{2} \left\{ \lambda_1(X) + \lambda_1(T) + \sqrt{(\lambda_1(X) - \lambda_1(T))^2 + 4\lambda_1(Z) \lambda_1(Y)} \right\}$$

avec $\lambda_1(T) = \omega_3 - \omega_1 + \lambda_1(X)$

$$\lambda_1(X) = \frac{1}{2} \left\{ \omega_1 + \omega_4 + \sqrt{(\omega_1 - \omega_4)^2 + 4\omega_{13}\omega_{14}} \right\}$$

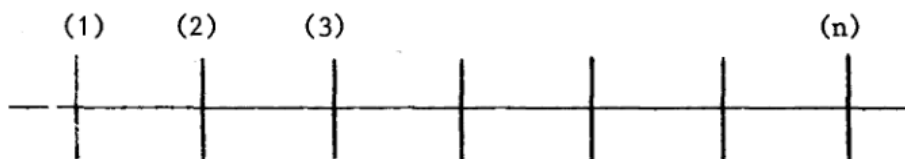
$$\lambda_1(Z) = \omega_9, \quad \lambda_1(Y) = \omega_{10}$$

Remarquons qu'un problème dont la matrice L_n s'écrit $A \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes B$ vérifie automatiquement la relation triangle (ceci nous fournit un exemple supplémentaire de relation triangle "triviale") :



La solution g) correspond à la forme suivante : $X = T$, $Y = Z$ où X et Y sont combinaison linéaire de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et de la matrice identité, ces quatre matrices sont donc simultanément diagonalisables, on retombe là encore sur un modèle unidimensionnel.

Classiquement la construction du pseudo-vide de l'ansatz de Bethe est présentée de la façon suivante :



Lorsque nous écrivons $L_n = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et écrivons la

matrice de transfert comme $T = \text{Tr} \prod_n L_n$, le produit matriciel en question est le produit des matrices L_n vu comme des matrices 2×2 , et lorsqu'au court de ces divers produits on obtient des termes comme $A_1 A_2 C_3 \dots$ il faut regarder le produit comme un produit tensoriel : les divers $A_n, B_n \dots$ opèrent pour des n différents sur des espaces différents. Si nous prenons un pseudo-vide a priori de la forme $\psi = \bigotimes_i e_i$ (comme auparavant) nous obtenons :

$$T\psi = \text{Tr} \prod_n \begin{pmatrix} A_n e_n & B_n e_n \\ C_n e_n & D_n e_n \end{pmatrix}$$

Si $C_n e_n$ était nul nous aurions (puisque c'est la trace qui intervient) :

$$T\psi = \bigotimes_n A_n e_n + \bigotimes_n D_n e_n$$

ce n'est en général pas le cas et l'on recherche à trianguler la matrice $L_n e_n$ en utilisant les conjugaisons les plus générales : $L_n e_n \rightarrow M_n^{-1} \cdot L_n e_n \cdot M_{n+1}$ avec la condition $M_{N+1} = M_1$, conjugaisons qui laissent stable la trace. La recherche de ces matrices $2 \times 2 (M_n)$ conduit à l'équation

$$\alpha + \beta(p^2 + p'^2) + \gamma p p' + \alpha p^2 p'^2 = 0$$

Le lecteur désireux d'approfondir cette question, qui est le point de départ de l'ansatz de Bethe sur le modèle à 8 vertex symétrique, pourra se reporter à l'excellente revue de P.W. Kasteleyn [37]. En fait on peut voir, en rentrant dans les détails, que la première colonne (resp. la seconde) de

la matrice M_n s'identifie avec les vecteurs que nous avons notés $(\begin{smallmatrix} 1 \\ f \end{smallmatrix})$ et $(\begin{smallmatrix} 1 \\ f' \end{smallmatrix})$. Ceci achève de montrer que le critère que nous avons introduit s'identifie avec la possibilité de trianguler la matrice $L_n e_n$, propriété fondamentale pour l'ansatz de Bethe.

Notre critère s'identifie à une représentation analytique de l'algèbre de Zamolodchikov et au travers de cette algèbre, ou directement, nous l'avons vu, est lié à l'existence d'une relation triangle étoile sur le modèle.

Via notre nouveau critère, nous voyons que nous avons établi des correspondances entre des notions a priori éloignées (ansatz de Bethe, relation triangle, algèbre de Zamolodchikov, triangulation de la matrice $L_n e_n$). D'autre part nous avons rappelé précédemment tout le parti qu'avait tiré A. Belavin de l'utilisation des conjugaisons sur les modèles à vertex intégrables. En fait la notion d'invariance par les conjugaisons (weak-graph duality) est parfaitement compatible avec notre critère. En effet si l'on a :

$$\lambda e' \otimes f' = L_n . e \otimes f$$

on est alors assuré d'avoir cette même propriété pour $L'_n = M \otimes N . L_n . M^{-1} \otimes N^{-1}$ il suffira de prendre au lieu de (e', f', e, f) le quadruplet (Me', Nf', Me, Nf) .

Ce critère est donc au carrefour de tous les concepts clefs qui interviennent dans les modèles intégrables, et il a l'avantage de conduire aux calculs les plus simples.

4) Autres applications du critère qu'au modèle à 16 vertex et ses dégénérescences

Nous avons explicité la condition $\lambda e' \otimes f' = L e \otimes f$ sur des exemples faisant intervenir des variables du type Ising (appartenant à $\mathbb{Z}_2$). Regardons ce qu'il peut advenir de cette même condition sur un exemple simple de modèle où interviennent des variables appartenant à $\mathbb{Z}_q$. Nous revenons à l'exemple dû à Y. Stroganov [31] que nous savons être complètement intégrable et admettre une relation triangle :

$$S_{ij,kl} = \sigma \delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{kl} + \sigma_1 \delta_{ik} \delta_{jl} + \sigma_2 \delta_{ij} \delta_{kl}$$

Pour $q = 3$, $i, j, k, l \in \mathbb{Z}_3$, la matrice $S_{ij,kl}$ peut être explicitée sous la forme d'une matrice 9×9 (on notera $a = \sigma_1 + \sigma_3 + \sigma$, $b = \sigma_1$, $c = \sigma_2$) :

$$S = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Si nous notons $f = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ q \end{pmatrix}$ et $f' = \begin{pmatrix} 1 \\ p' \\ q' \end{pmatrix}$ nous obtenons les deux équations suivantes : $\det M = 0$ et $\det N = 0$ où M et N sont les deux matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} ap' - pb & -c & 0 \\ pp'c & bp' - pa & 0 \\ qp'c & -cq & b(p' - p) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } N = \begin{pmatrix} aq' - qb & 0 & -c \\ pq'c & b(q' - q) & -cp \\ qq'c & 0 & bq' - qa \end{pmatrix}$$

Ces deux équations sont les suivantes :

$$(p^2 + p'^2) ab - pp'(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

$$(q^2 + q'^2) ab - qq'(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

Elles définissent les transformations faisant passer de p à p' , et également de q à q' , exhibent le module du problème $\frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab}$, et indiquent également que ce problème fera intervenir une uniformisation rationnelle. En fait ce que nous venons d'exposer pour $q = 3$ est valable quel que soit q : ainsi pour $q = 4$ nous aurons avec

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f' = \begin{pmatrix} 1 \\ p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix}$$

trois équations, les deux premières étant identiques aux deux précédentes, la troisième n'étant autre que $(r^2 + r'^2) ab - rr'(c^2 - a^2 - b^2) = 0$.

5) Les perspectives

Nous avons vu que le critère que nous avons introduit permet de trouver très rapidement les invariants des modèles (modules, point de normalisation, ...), à supposer bien sûr que les modèles soient des modèles complètement intégrables. Il permet également de simplifier considérablement la recherche du pseudo-vide. En ce qui concerne la recherche des relations triangle nous avons vu sur l'exemple du modèle à 6 vertex symétrique que, à la différence des approches classiques, on obtenait d'entrée de jeu l'équation $xx'' = x'$ (dans les approches classiques on obtient cette équation en dernier). Dans cette approche les bonnes variables, et leurs relations mutuelles nécessaires pour avoir une relation triangle, sont obtenues très rapidement. Il reste à vérifier que la solution que l'on présente ainsi a priori est bien une solution effective. Dans cette approche nous voyons que nous sommes amenés à définir le modèle non pas de la façon classique ($\omega_1 = \omega_2$, $\omega_3 = \omega_4$, $\omega_7 = 0 = \omega_{13} = \dots$ etc) mais en quelque sorte à "l'envers" par sa paramétrisation. Par exemple dans le cas du modèle à 6 vertex symétrique, le modèle serait défini au départ comme satisfaisant $\lambda e' \otimes f' = L e \otimes f$, et possédant deux paramètres t (le module) et x (le paramètre spectral). La matrice 4×4 de ce modèle s'écrit alors nécessairement :

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_{14} & \omega_{14} \frac{x}{t} & 0 \\ 0 & \omega_4 & \omega_5 & 0 \\ 0 & \omega_5 & \omega_3 & 0 \\ 0 & \omega_9 & \omega_9 \frac{x}{t} & \omega_1 \end{pmatrix}$$

avec $0 = (\omega_1^2 + \omega_3\omega_4 - \omega_5^2) + \frac{\omega_1\omega_4}{t} + \omega_1\omega_3 \cdot t$

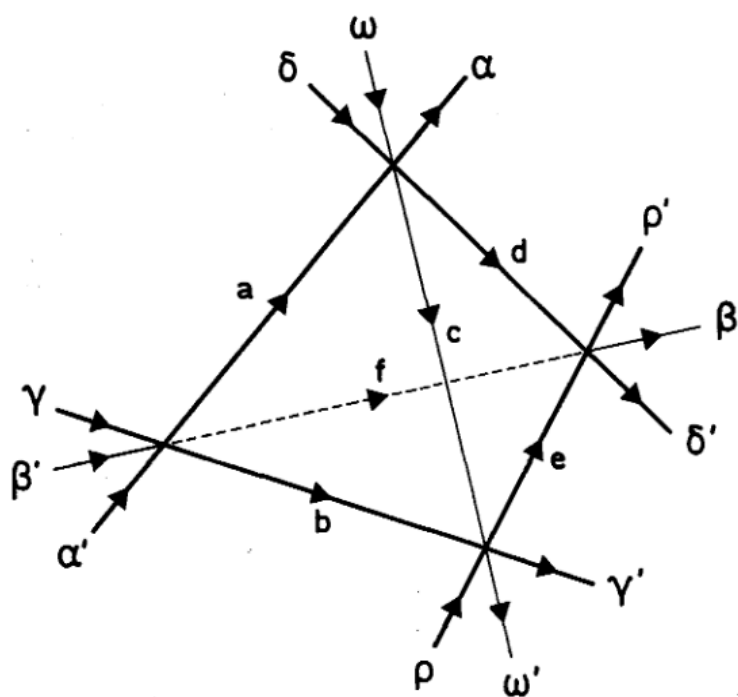
Il faut alors écrire la relation triangle pour ce modèle plus large que le modèle à 6 vertex symétrique ; les contraintes provenant de la relation triangle imposeront $\omega_{14} = \omega_9 = 0$, $\omega_3 = \omega_4$.

Autrement dit, dans cette approche, nous partons de la solution et ajustons les paramètres supplémentaires dont nous disposons pour préciser cette solution afin qu'elle vérifie en toute rigueur la relation triangle. On comparera cette approche à l'approche classique où les équations triangle apparaissent généralement surdéterminées (le nombre d'équations est d'ordinaire plus grand que le nombre de variables).

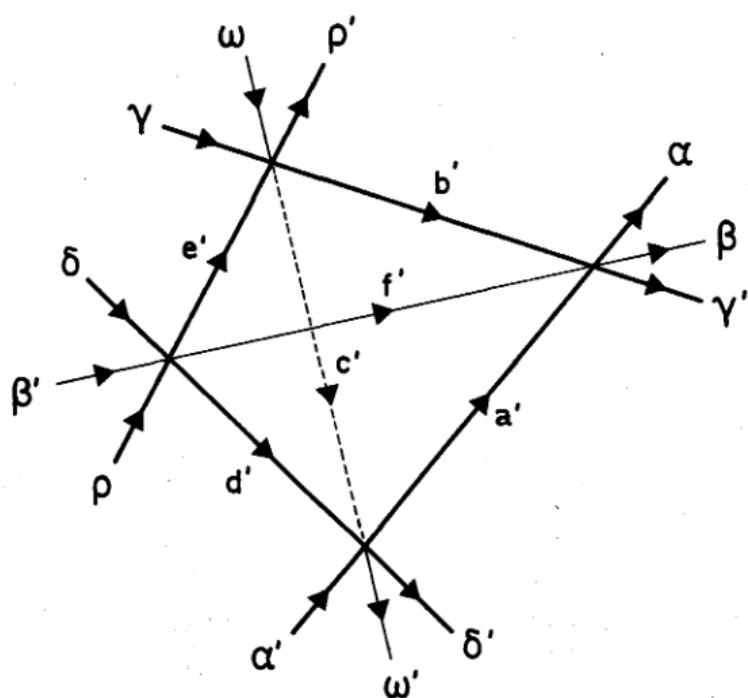
D'autre part, un des intérêts de ce critère réside dans le fait qu'il se généralise de façon extrêmement naturelle en dimension supérieure ; si nous considérons les matrices L correspondant au vertex tridimensionnel, nous lui associerons la propriété suivante :

$$\lambda e' \otimes f' \otimes g' = L e \otimes f \otimes g$$

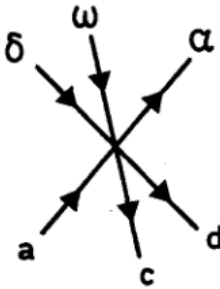
et nous seront amenés à chercher à obtenir les relations suivantes (relation tétraèdre sur des états particuliers) :



=



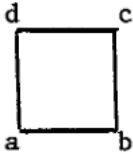
Les notations sont les mêmes que celles introduites sur la relation triangle :



signifie que l'état rentrant

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix}$$

Une autre direction à explorer est l'extension de ce critère aux modèles que nous avons convenu d'appeler modèles à spins. Une extension possible consisterait pour un modèle à spin défini sur un réseau carré par le poids suivant $W(a,b,c,d)$ associé à tous les carrés élémentaires,



$$W(a,b,c,d)$$

à demander la réalisation de la propriété suivante :

$$\lambda e'(b,c) \otimes f'(a,b) = \sum_d W(a,b,c,d) e(a,d) \otimes f(d,c)$$

si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$, e dépend d'un élément de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ c'est donc un vecteur à 4 composantes ; on remarque que $e(a,d), f(d,c)$ ne sont pas indépendants puisque d intervient dans e et dans f (et de même b dans e' et f'). Il serait important de pouvoir, à partir d'une propriété semblable, retrouver l'uniformisation elliptique intervenant dans le modèle d'hexagone dur.

Une dernière direction à explorer consiste (puisque nous avons vu qu'il était assez facile d'exhiber les modèles pour lesquels il existait un pseudo-vide $\psi = \bigotimes_i e_i$ qui, par l'action de la matrice de transfert du modèle, donne un pseudo-vide semblable $\psi' = \bigotimes_i e_{i+1}$) à regarder les conséquences de cette propriété : assurément cette propriété est plus faible que la complète intégrabilité mais elle est tout de même assez contraignante. Sur les états $\psi = \bigotimes_i e_i$ qui dépendent d'un paramètre continu (noté p dans le texte) on peut voir notamment de façon immédiate la commutation des matrices de transfert, bien sûr l'ensemble de ces états ne forme pas une base de l'espace vectoriel total (sinon nous aurions démontré à partir de cette propriété l'existence

d'une famille de matrice de transfert qui commute, propriété très forte). Il peut donc être intéressant d'étudier cette propriété et la classe des modèles qui la possèdent (et ce en toute dimension) car cette classe est plus large que la classe des modèles intégrables. Ceci rejoint le point de vue que nous avons développé sur les modèles possédant la seule relation d'inverse en les voyant comme un ensemble plus vaste que les modèles intégrables [1] [2] [9].

CONCLUSION

Les équations de factorisation, appelées parfois équations de Yang-Baxter [22], ainsi que leurs généralisations en dimensions supérieures (équations tétraèdre) jouent un rôle fondamental pour les modèles exactement solubles en mécanique statistique, et dans d'autres domaines (la méthode de scattering inverse quantique entre autres). Nous avons en nous appuyant sur le plus grand nombre d'exemples possible montré les problèmes que l'on pouvait rencontrer dans la recherche de ces équations de Yang-Baxter. Nous avons discuté de l'existence de nombreuses solutions malheureusement triviales qu'il convient d'éviter.

Nous avons ensuite illustré la lourdeur des calculs rencontrés dans une recherche des équations de Yang-Baxter que nous qualifierons de "classique", et dont on peut considérer que les exemples les plus achevés sont fournis par les articles de H.C. Ottinger et J. Honerkamp [22] ainsi que celui de V.V. Bazhanov et Y.G. Stroganov [39]. Nous avons enfin proposé des idées ou des méthodes permettant éventuellement de simplifier cette approche classique. Nous avons surtout dégagé un critère très simple permettant d'obtenir facilement les quadriques intervenant dans ces problèmes,

Nous avons montré les liens existant entre ce critère simple et l'algèbre de Zamolodchikov. Les liens entre ce critère et la construction explicite, de l'ansatz de Bethe, et plus précisément l'existence du pseudo-vide ont également été indiqués. Ce critère s'avère prometteur de par la simplicité des calculs qu'il induit, ainsi que par sa généralisation immédiate en dimension supérieure à deux. Il reste à développer ces idées sur l'exemple de la relation tétraèdre ainsi qu'à les généraliser aux modèles à spins notamment au modèle d'hexagone dur.

APPENDICE

APPENDICE 1

Les invariants algébriques qui interviennent dans le modèle d'hexagone dur sont :

$$(1) \quad \Delta_1 = z^{-1/2} (1 - z \cdot e^{L+M}) = \frac{\omega_1^2 - \omega_4 \omega_5}{\omega_2 \omega_3}$$

$$(2) \quad \Delta_3 = \frac{\omega_1^3 - \omega_4 \omega_3^2 - \omega_5 \omega_2^2}{\omega_1 \omega_2 \omega_3}$$

$$(3) \quad \Delta_2 = \frac{\omega_4 \omega_5}{\omega_1^2} (\omega_1 - \omega_3) + \frac{\omega_2 \omega_3}{\omega_1^2}$$

Ils sont de plus contraints par les conditions

$$\Delta_2 = 1/\Delta_1 \quad \text{et} \quad \Delta_3 = \Delta_1 - \Delta_2$$

Si (1) et (3) sont deux équations différentes, alors la seule solution est la solution triviale.

Si (1) et (3) sont les mêmes équations alors (2) se réécrit

$$\omega_4 (\omega_3^2 - \omega_1 \omega_5) = \omega_2 \left(\frac{1}{\Delta_1} \omega_1 \omega_3 - \omega_2 \omega_5 \right)$$

qui se découple en

$$\omega_3^2 = \omega_1 \omega_5 - \frac{1}{\Delta} \omega_2 \omega_4$$

$$\text{et} \quad \omega_4^2 = \Delta \omega_2 \omega_5 - \frac{\Delta}{\Delta_1} \omega_1 \omega_3$$

pour un certain Δ fixe.

Nous avons alors le jeu de trois équations suivant :

$$\omega_1^2 = \omega_4 \omega_5 + \Delta_1 \omega_2 \omega_3$$

$$\omega_3^2 = \omega_1 \omega_5 - \frac{1}{\Delta} \omega_2 \omega_4$$

$$\omega_4^2 = \Delta \omega_2 \omega_5 - \frac{\Delta}{\Delta_1} \omega_1 \omega_3$$

Si nous posons $\omega_i = \alpha_i \cdot \theta_i$ on peut s'apercevoir par un calcul simple que si

$$\frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_2^2} = \frac{\alpha_1 \alpha_5}{\alpha_3^2} \equiv \delta$$

et $\frac{\alpha_1^4}{\alpha_2^2 \alpha_3^2} = -\delta^3$ les équations précédentes se réécrivent

$$\theta_1^2 = \delta \cdot \theta_2 \theta_3 - \delta^{-1} \cdot \theta_4 \theta_5$$

$$\theta_3^2 = \delta \cdot \theta_1 \theta_5 - \delta^{-1} \cdot \theta_2 \theta_4$$

$$\theta_4^2 = \delta \cdot \theta_2 \theta_5 - \delta^{-1} \cdot \theta_1 \theta_3$$

On reconnaît alors les relations quadratiques satisfaites par θ_1 la fonction θ usuelle impaire de période 2π , $\theta_2(u) = \theta_1(u - \frac{4\pi}{5})$,

$$\theta_3(u) = \theta_1(u + 4\pi/5), \theta_4(u) = \theta_1(u + 2\pi/5),$$

$$\theta_5(u) = \theta_1(u - 2\pi/5) \text{ avec}$$

$$\delta = \frac{\theta_1(2\pi/5)}{\theta_1(\pi/5)}$$

Les équations se déduisent de la première équation en faisant agir successivement le cycle d'ordre 5 sur les indices :

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. On trouvera ainsi deux équations compatibles avec le jeu de trois équations précédentes :

$$\theta_2^2 = \delta \cdot \theta_1 \theta_4 - \delta^{-1} \cdot \theta_5 \theta_3$$

et $\theta_5^2 = \delta \cdot \theta_4 \theta_3 - \delta^{-1} \cdot \theta_2 \theta_1$

Cette uniformisation elliptique appelle plusieurs commentaires : tout d'abord l'existence d'une transformation d'ordre 5 (la translation du paramètre spectral de $2\pi/5$) est à mettre en relation avec l'existence de 5 phases, 5 domaines analytiques dans ce problème. Cette situation généralise celle bien connue où l'on dispose d'une transformation d'ordre 2, la dualité de Kramers-Wannier. De plus de telles uniformisations par un jeu analogue de fonction θ (la fonction θ_1 et ses translatées de $2\pi/q$) interviennent dans des modèles à vertex où les liaisons prennent q couleurs, ainsi que l'a indiqué Belavin [21]. Enfin cette translation du paramètre spectral de $2\pi/q$ se rencontre encore, mais avec une uniformisation rationnelle cette fois-ci, dans le problème de Toda quantique ; ainsi par exemple A.E. Arinshtein, V.A. Fateyev et A.B. Zamolodchikov ont indiqué [40] que pour l'exemple $N = 3$, la matrice S s'écrivait :

$$S = \frac{\text{sh}(\theta/2+i\pi/3) \text{ sh}(\theta/2-i\pi/3+ib/2) \text{ sh}(\theta/2-ib/2)}{\text{sh}(\theta/2-i\pi/3) \text{ sh}(\theta/2+i\pi/3-ib/2) \text{ sh}(\theta/2+ib/2)}$$

Le fait physique important à remarquer étant l'existence d'états liés justement pour $\theta = 2\pi i/3$ (pôles dans la matrice S) ce pôle pour la matrice S étant permis du fait de la symétrie $\mathbb{Z}_3$.

APPENDICE 2

L'une des douze équations quadrilinéaires correspondant au modèle à vertex décrit page 41 est obtenue en écrivant l'annulation de l'expression ci-dessous.

EQUATION NUMERO 3, COEFF DE MU=1 RO=1 :--(A4 B3 C1 C1) + A6 B3 C1 D1 + A3 B4 C1 D1-(A3 B6 C1 D1) + A4 B1 C3 D1-(A5 B3 C3 C1)-(A6 B3 C3 D1) + A3 B5 C3 D1-(A1 E6 C3 D1)-(A2 B6 C2 D1) + A3 B1 C4 D1-(A3 B3 C4 D1) + A6 B5 C4 D1-(A4 B6 C4 C1) + A4 B4 C5 D1-(A6 B6 C5 D1)-(A1 B3 C6 D1)-(A5 B6 C6 D1)-(A6 B1 C1 D3) + A5 B3 C1 D3-(A1 B4 C1 C3) + A3 B5 C1 D2-(A4 B1 C3 D3) + A4 B3 C3 D2 + 2 A6 B3 C3 D3 + A1 B4 C3 D3-2 A3 B4 C3 D3 + A3 B5 C3 D3 + A1 B6 C3 D2 + A3 B6 C3 D3-(A1 B1 C4 D3) + A3 B3 C4 D3-(A6 B4 C4 D3) + A5 B6 C4 D3-(A3 B1 C5 D3) + A1 B3 C5 D3-(A5 B4 C5 D3) + A6 B5 C5 D3 + A1 B1 C6 C3-(A3 B1 C6 C3) + 2 A3 B3 C6 D3-(A4 B4 C6 D3) + A5 B4 C6 D3 + A6 B5 C6 D3 + A4 B6 C6 D3-(A1 B3 C1 C4) + A3 B3 C1 D4 + A5 B4 C1 D4 -(A6 B6 C1 C4) + A1 B1 C3 D4-2 A3 B3 C3 D4 + A6 B5 C3 D4-(A4 B6 C3 D4)-(A5 E6 C3 D4) + A5 B1 C4 D4-(A6 B3 C4 D4) + A3 B5 C4 D4-(A1 B6 C4 D4)-(A5 B3 C5 D4) + A6 B3 C5 D4 + A1 B4 C5 D4-(A3 B6 C5 D4)-(A4 B3 C6 D4)-(A3 B6 C6 D4) + A3 B1 C3 D5 + A1 B3 C3 D5 + A3 B3 C3 D5 + A4 B4 C3 D5 + A6 B5 C3 D5 + A5 B6 C3 D5 + A4 B1 C6 D5 + A5 B3 C6 D5 + A6 B2 C6 D5 + A3 B4 C6 D5 + A3 B5 C6 D5 + A1 B6 C6 D5-(A3 B1 C1 D6) + A3 B3 C1 D6-(A4 B4 C1 D6) + A6 B5 C1 D6-(A1 B1 C3 D6)-(A3 B1 C3 D6) + A3 B3 C3 D6-(A5 B4 C3 D6)-(A6 B4 C3 D6) + A4 B6 C3 D6-(A4 B1 C4 D6) + A6 B3 C4 D6-(A2 B4 C4 D6) + A3 B6 C4 D6-(A6 B1 C5 C6) + A4 B3 C5 D6-(A2 B4 C5 D6) + A3 B5 C5 D6-(A5 B1 C6 D6)-(A1 B4 C6 D6)

AMPO0041 END OF FILE

RÉFÉRENCES

- [1] M.T. Jaekel, J.M. Maillard (1982), J. Phys. A 15 1309.
- [2] M.T. Jaekel, J.M. Maillard (1982), J. Phys. A 15 2241.
- [3] M.T. Jaekel, J.M. Maillard Séminaire E.N.S. 1979-1980.
- [4] P.P. Kulish, N.Y. Reshetikhin, E.K. Sklyanin Lett. in Math. Phys. 5 (1981) 393.
- [5] C.N. Yang Phys. Rev. (1968) 168 1920-1923.
- [6] B. Berg, P. Weisz (1979) Commun Math. Phys. 67 241-250.
- [7] S.T. Chui, J.D. Weeks (1976) Phys. Rev. B14, 4978-4982.
- [8] M. Gaudin Note CEA-N-1559 (2) Modèles exacts en mécanique statistique : la méthode de Bethe et ses généralisations.
- [9] J.M. Maillard Note CEA-S82/76 Relations d'inverse en mécanique statistique (1983)
- [10] L.P. Kadanoff, F.J. Wegner (1971) Phys. Rev. B4, 3989.
- [11] R.J. Baxter (1980) J. Phys. A13 L61-70.
- [12] D.W. Wood, M. Goldfinch (1980) J. Phys. A13, 2781-2794.
- [13] R.K. Bullough, P.J. Caudrey, Solitons, Topics in current Physics, Vol. 17.
- [14] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur Phys. Rev. Lett. (1973) 30, 1262-1264.
- [15] P.D. Lax (1975) commun. on Pure and Applied Math, XXVIII, 141-188.

- [16] V. Zakharov, A. Shabat, (1974), *Funct. Anal. and Appl.* 8, 43.
- [17] M. Boiti, F. Pempinelli, *Il. Nuov. Cini* (1979) 518, 70.
- [18] A.B. Zamolodchikov, A.B. Zamolodchikov, (1979) *Annals of Physics* 120, 253-291.
- [19] P.J. Gambardella (1975) *J. of Math. Phys.* 16, 1172-1187.
- [20] I.V. Cherednik *Sov. Phys. Dokl* (1979) 24 (12) 974.
- [21] A.A. Belavin (1980) *Nuclear Physics B*, 189-200.
- [22] H.C. Ottinger, J. Honerkamp (1982) *Phys. Lett.* 88A, 339.
- [23] M. Suzuki (1972) *Phys. Rev. Lett.* 28, 507.
- [24] L. Onsager (1944) *Phys. Rev.* 65, 117.
- [25] J. Rae (1973) *J. Phys.* A6, L 140-143.
- [26] E.K. Sklyanin, L.A. Takhtajan, L.D. Faddeev (1979) *Teor. i. Mat. Eiz* 40, 194.
- [27] B. Berg, M. Karowski, P. Weisz (1978) *Nuclear Phys. B* 134, 125-132.
- [28] M. Karowski, J.J. Thun, T.T. Truong, P.H. Weisz, *Phys. Lett.* 67B (1977) 321.
- [29] R. Shankar, E. Witten (1978) *Phys. Rev. D* 17 p 2134-2143.
- [30] D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky Theta functions, Completely X-symmetric S matrices and quantum isospectral deformation equations corresponding to them soumis à *Annals of Physics* DPh-T/80/131.
- [31] Y. Stroganov, 1979, *Phys. Lett.* 74A, 116.

- [32] C.L. Schultz, 1981 Phys. Rev. Lett. 46, 629.
- [33] A.B. Zamolodchikov commun. Math. Phys. 79 (1981) 489.
- [34] R.J. Baxter (1978) Philos. Trans. Roy. Soc. Land 289A, 315.
- [35] R.J. Baxter (1972) Ann. Phys. 70, 193
(1973) Ann. Phys. 71, 1.
- [36] L.L. Lin, H.E. Stanley (1974), Phys. Rev. B10, 2958-1960.
- [37] P.W. Kasteleyn, 1975 Fondamental problems in Statistical Mechanics III :
Proceedings of the Wageningen Summer School ed E.G.D. Cohen North-
Holland Amsterdam.
- [38] A. Gaaf, J. Hijmans (1975), Physica 80A, 149-171.
- [39] V.V. Bazhanov, Y.G. Stroganov, Nuclear Physics B205 (1982) 505-526.
- [40] A.E. Arinshtein, V.A. Fateyev, A.B. Zamolodchikov, Physics Letters 87B
(1979) 389.

AUTRES REFERENCES QUE L'ON PEUT CONSULTER SUR LE SUJET :

- [a] R.J. Baxter, Proceedings of the 1980 Enshede Summer School Fundamental
Problems in Statistical Mechanics V North-Holland ; Amsterdam.
- [b] R.J. Baxter (1982) Exactly Solved Models in Statistical Mechanics
Academic Press.
- [c] Lecture Notes in Mathematics 425, Springer Verlag.
- [d] M. Hortaçsu, B. Schroer, H.J. Thun, Nuclear Physics B154 (1979) 120-124.
- [e] V.V. Bazhanov, Y.G. Stroganov, Phys. Lett. 105B (1981) 278.

- [f] M. Chaichian, P.P. Kulish (1978) Phys. Lett. 78B, 413.
- [g] S.V. Pokrovsky, Y.A. Bashilov Commu. Math. Phys. (1982) 84, 103-132.
- [h] M.J. Stephen, L. Mittag (1972) J. Math. Phys. 13 1944.
- [i] Y. Yamazaki, G. Meissner, H.J. Hilhard Z. Für. Phys. B35 (1979) 333-337.
- [j] A.G. Izergin, V.E. Korepin (1981), Lett. in Math. Phys. 5, 199-205.
- [k] P.P. Kulish (1981) Lett. in Math. Phys. 5, 191-197.
- [l] B. Berg, M. Karowski, P. Weisz, V. Kurak, Nuclear Physics B134 (1978) 125-132.
- [m] M. Karowski (1979) Nuclear Physics B153, 244-252.

Manuscrit reçu le 16 février 1983

Edité par
le Service de Documentation
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
91191 GIF-sur-YVETTE Cédex (France)

