

SOMMAIRE

INTRODUCTION

I - MISE AU POINT ; RAPPELS

- a) La notion de localité d'un modèle ..... p.3
- b) Relation triangle et relation d'inverse ..... p.4
- c) Distinction entre modèles à vertex et modèles à spins ..... p.9

II - PROBLÈMES DE DIMENSIONNALITÉ D'UN MODÈLE

- a) Sur les problèmes intégrables en général ..... p.13
- b) En mécanique statistique ..... p.16

III - LES PROBLÈMES POSÉS PAR LA RECHERCHE DES RELATIONS TRIANGLE OU TÉTRA ÈDRE

- a) Position générale du problème : les exemples du modèle à 8 vertex symétrique et du modèle d'hexagone dur ..... p.23
- b) La recherche de nouvelles relations triangle ..... p.31
- c) La recherche des relations tétra èdre ..... p.39

IV - NOUVELLES APPROCHES POUR LA RECHERCHE DE RELATIONS TRIANGLE OU TÉTRA ÈDRE

- a) Réflexion sur la surdétermination des équations triangle : une identité algébrique simple sous-jacente au modèle à 8 vertex symétrique ..... p.52
- b) Les relations triangles et l'invariance par les conjugaisons (weak-graph duality) ..... p.59
- c) Le critère  $\lambda e' \otimes f' = \text{Le} \otimes f$  ..... p.61
  - 1) Introduction du critère ..... p.61
  - 2) Lien avec l'algèbre de Zamolodchikov ..... p.68
  - 3) Les liens avec l'ansatz de Bethe et l'existence d'un pseudo-vidé ..... p.71
  - 4) Autres applications du critère qu'au modèle à 16 vertex et ses dégénérescences ..... p.81
  - 5) Les perspectives ..... p.86

CONCLUSION ..... p.91

Quelques remarques simples sur les équations de Yang-Baxter, tétraèdre et sur des questions de réductions dimensionnelles

J.M. MAILLARD

LPTHE\*, Tour 16 1er étage,  
Université de Paris VI, PARIS, FRANCE

LPTHE N° 91/20

Mars 1991

\* Laboratoire associé au CNRS URA 280  
Tour 16, 1er étage  
4, Place Jussieu, 75252 PARIS Cedex 05 -FRANCE-

INTRODUCTION

L'objet de cette note est de souligner certains problèmes liés aux systèmes complètement intégrables et, de façon plus précise, d'étudier les problèmes associés à la relation triangle-étoile et ses généralisations.

Il a été souligné, dans de précédents articles [1] [2] [3], que la complé-  
te intégrabilité des problèmes de mécanique statistique, de théorie des  
champs (ou d'autres domaines) pouvait être comprise comme ayant à son ori-  
gine des relations locales simples dites relation de Yang Baxter (relation  
triangle-étoile [4], relation de Yang [5], relation de factorisation de la  
matrice S [6]). Nous ne reviendrons pas sur le caractère contraignant  
de ces relations, notamment sur le développement de leurs conséquences (nom-  
bre infini de lois de conservation, famille de matrices de transfert qui com-  
mutent...). Il y a un intérêt considérable à trouver des modèles vérifiable-  
ment tridimensionnels ou multidimensionnels, qui admettent une propriété  
généralisant la relation triangle-étoile (relation tétra èdre). Ceci nous  
amènera, dans le paragraphe II, à discuter de la possibilité de donner une  
définition précise, et non ambiguë, de la notion de dimensionnalité d'un modèle  
et, dans le paragraphe III, nous étudierons ce que signifie dans la pratique,  
"rechercher" une nouvelle relation triangle-étoile ou tétra èdre, quelles  
sont les difficultés rencontrées pour établir de telles nouvelles relations,  
et comment on peut espérer les surmonter. Nous proposerons notamment dans  
le paragraphe IV certaines solutions simplifiant parfois la recherche pré-  
cédente.

Mais tout d'abord dans le premier paragraphe, en guise de mise au point,  
nous allons sur des exemples particuliers, expliciter les trois points suivants :

- 1) Un des intérêts majeur des relations que nous étudions réside dans leur caractère local (donc simple), qui néanmoins entraîne des conséquences globales importantes. Nous réfléchirons sur cette restriction de "localité".

ii) La relation triangle apparaît comme ayant presque toujours dans son sillage la relation dite "d'inverse" (unitarité en théorie des champs) (la réciproque par contre ne semble pas automatique [1] [2]). Nous regarderons dans quelle mesure la relation triangle implique la relation d'inverse.

iii) Nous avons présenté une opposition [9] entre modèles à spin et modèles à vertex ; nous essayerons de préciser cette opposition en nous aidant de l'exemple du modèle d'hexagone dur.

I - MISE AU POINT ; RAPPELS

a) LA NOTION DE LOCALITE D'UN MODELE

A côté du modèle d'Ising il arrive que l'on considère un modèle en  $\phi^4$  sur réseau également, pour lequel on n'impose plus au spin  $S_i$  de valoir rigoureusement +1 ou -1, mais où simplement on favorise ces valeurs grâce au poids de Boltzmann suivant :  $e^{-r(S_i^2-1)^2}$  (d'où le terme en  $\phi^4$ ). A la place de ce modèle, nous allons considérer un modèle très voisin, où les spins vaudront +1 plus un écart "gaussien" à partir de ce spin d'Ising ; la fonction de partition sera :

$$Z = \int \prod_i dS_i \sum_{\{O_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{J_{ij}(O_i + S_i)(O_j + S_j)} - r \sum_i S_i^2$$

où  $\prod$  désigne le produit sur tous les couples de sites  $\langle ij \rangle$  plus proches voisins et où  $\sum$  désigne la somme sur toutes les configurations de spins  $O_i$  et  $\int \prod dS_i$ , les intégrales sur les variables réelles  $S_i$  allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ . La fonction de partition peut être réécrite :

$$\sum_{\{O\}} e^{\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} O_i O_j} \int \prod dS_i \cdot e^{\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} S_i S_j + \sum_i (C_i \cdot S_i - r S_i^2)}$$

où  $C_i = \sum_j J_{ij} \cdot O_j$  est la somme sur tous les sites plus proches voisins de  $i$ .

Il est possible d'effectuer ces intégrales gaussiennes, et l'on obtient :

$$\sum_{\{O\}} e^{\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} O_i O_j} e^{-\sum_i V \sum_j C_i^2 + \sum_{j,m} C_j C_m \cdot U(jm)}$$

où  $V$  est une constante, et  $U(jm)$  correspond à un potentiel coulombien :  $U(jm) \sim \ln d(j,m)$  lorsque  $d(j,m)$ , qui désigne la distance est le site  $j$  et  $m$ , est suffisamment grand. (Le lecteur désireux de détailler ce calcul pourra se reporter à l'appendice de l'article de Chui et Weeks [7]).

On voit donc apparaître entre les seuls spins restant (les spins d'Ising  $\sigma_i$ ) une interaction à longue portée (coulombienne de surcroît) alors qu'initialement nous n'avions que des interactions entre plus proches voisins donc locales au sens le plus strict. (Remarquons au passage que l'apparition d'interactions coulombiennes est finalement un phénomène assez banal lié à la spécificité de la matrice d'adjacence entre plus proches voisins). Nous sommes passés d'un modèle avec interactions locales entre plus proches voisins, mais avec des fluctuations gaussiennes autour de spins d'Ising, à un modèle avec des interactions à longue portée entre des spins d'Ising. La notion de localité n'est donc pas une notion absolue ; nous parlerons de relations locales simples impliquant des contraintes sur des objets à caractère global (matrice de transfert, fonction de partition...) : il peut se faire qu'au travers de correspondances analogues aux précédentes, ce qui était une relation locale simple devienne une propriété non locale complexe. Nous avons pris le parti de nous intéresser, et de nous restreindre, aux relations locales simples telles que la relation triangle et ses généralisations.

b) RELATION TRIANGLE ET RELATION D'INVERSE

On constate, dans la plupart des exemples de modèles complètement intéressants connus, que l'on obtient automatiquement dans le sillage de la relation triangle une autre relation beaucoup plus simple, la relation dite d'inverse (unitarité en théorie des champs). M. Gaudin [8] avait résumé cette constatation en disant que ces deux relations réalisaient une représentation isomorphe à la représentation régulière du groupe des permutations ; en effet pour certains objets très proches des matrices  $S$  à deux corps, les opérateurs  $Y$  de Yang qui s'écrivent

$$Y_{lm}^{ij} = \frac{P_{lm} - X_{ij}}{1 + X_{ij}}$$

où  $P_{lm}$  désigne la transposition entre  $l$  et  $m$ , on

$$Y_{12}^{ij} = \mathbb{1}$$

$$Y_{12}^{jk} Y_{12}^{ik} = Y_{23}^{ij} Y_{23}^{jk}$$

vérifie par un calcul direct les relations

Cette dernière équation se ramène à l'équation :

$$[P_{12} - X_{ij}] [P_{23} - X_{ik}] [P_{12} - X_{ij}] = [P_{23} - X_{ij}] [P_{12} - X_{ik}] [P_{23} - X_{jk}]$$

qui conduit encore à la relation

$$X_{jk} X_{ij} + X_{ik} X_{jk} = X_{ij} X_{jk}$$

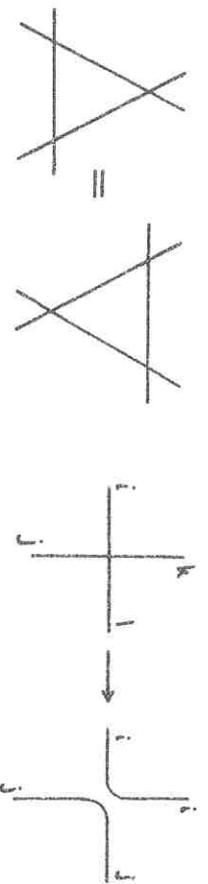
où encore  $\frac{1}{X_{jk}} + \frac{1}{X_{ij}} = \frac{1}{X_{ik}}$

ce qui revient à dire que  $\frac{1}{X_{lm}}$  est une différence de la forme  $k_l - k_m$ .

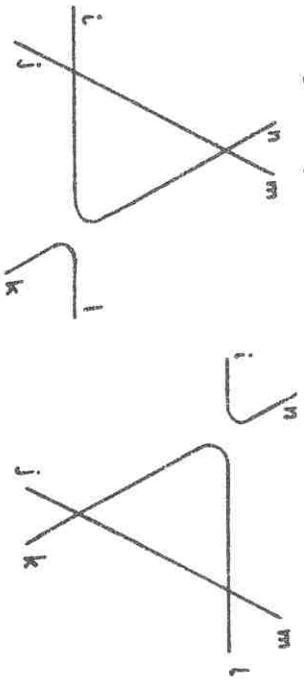
A l'appui de cette interprétation on constate également, sur la plupart des exemples de modèles à vertex, (ou des matrices  $S$  à deux corps) que, pour une valeur particulière du paramètre spectral, la matrice associée au vertex (ou la matrice  $S$  à deux corps) s'identifie avec l'opérateur de transposition  $P_{ij}$  de deux éléments  $i$  et  $j$ .

Plaçons-nous dans le cadre des hypothèses restrictives suivantes : nous considérons un modèle à vertex pour lequel nous avons une relation triangle et la propriété précédente d'identification de la matrice associée au vertex avec la transposition  $P_{ij}$  pour une valeur particulière du paramètre spectral ; dans quelle mesure pouvons-nous conclure qu'il existe une relation d'inverse qui soit conséquence des hypothèses précédentes ?

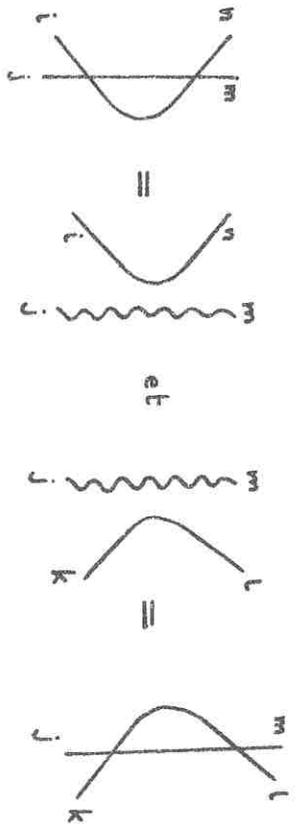
Nous conviendrons de symboliser les hypothèses précédentes géométriquement :



La dernière figure signifie que  $i$  doit s'identifier à  $k$  et  $j$  à  $l$  sinon la configuration est interdite (poids nul) ; autrement dit nous avons  $(i,j) \rightarrow (k,l) = (j,i)$  (transposition  $P_{ij}$ ). Considérons maintenant la relation triangle où nous avons pris pour  $i$  un des trois vertex la valeur particulière du paramètre spectral pour laquelle on obtient la transposition ; nous avons géométriquement :

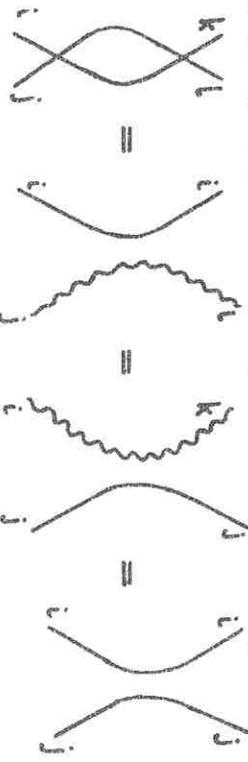


autrement dit nous avons  $i \equiv n$  et  $k \equiv l$ . C'est-à-dire

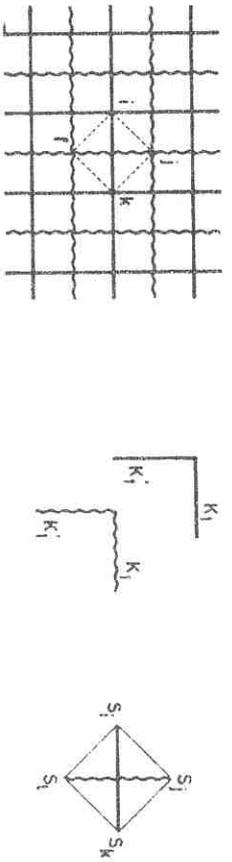


où le trait ondulé liant  $j$  à  $m$  désigne une fonction dépendant de  $j$  et de  $m$ , et non plus un  $\delta$  de Kronecker comme précédemment.

Ces deux relations devant être comparables nous avons les égalités :



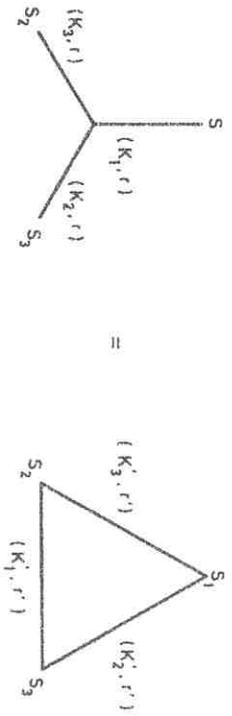
Cette dernière relation n'est autre que la relation d'inverse. Ce raisonnement simple éclaire le fait que la relation triangle s'accompagne très souvent de la relation d'inverse. Cependant nous nous sommes placés dans le cadre d'hypothèses très restrictives (modèle à vertex, existence d'une relation triangle, transposition correspondant à une valeur particulière du paramètre spectral). Ce ne semble pas être le cas en général ; nous avons dans plusieurs articles [1] [2] indiqué la possibilité d'avoir une relation d'inverse sans pour autant disposer d'une relation triangle (ou toute autre généralisation de celle-ci), notamment, par exemple, sur les modèles de Potts bidimensionnels ou d'Ising tridimensionnels. Le pendant de cette situation consiste à avoir une relation triangle et (apparemment) pas de relation d'inverse. Nous allons illustrer cette situation sur l'exemple du modèle gaussien. Nous considérons deux modèles gaussiens avec interactions entre plus proches voisins sur deux réseaux carrés découplés identiques :



Nous pouvons maintenant raisonner sur le poids de Boltzmann associé au carré  $(ijkl)$  :

$$W_j(S_i, S_j, S_k, S_l) = e^{K_1 S_i S_k + K_1' S_j S_l - r(S_i^2 + S_k^2) - r'(S_j^2 + S_l^2)}$$

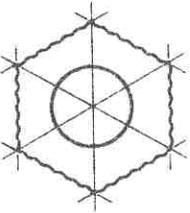
Le modèle gaussien admet une relation triangle-étoile



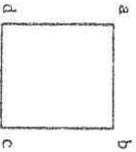


essayer d'éclaircir cette différence en nous appuyant sur l'exemple du modèle d'hexagone dur résolu par R.J. Baxter [1].

Il faut, au départ, considérer un réseau triangulaire où l'on place éventuellement, en chaque site du réseau, un atome (présent ou absent en chaque site, auquel on associe donc une variable  $\sigma = 0$  ou  $1$ ) tel que son rayon interdise d'avoir de tels atomes présents sur des sites plus proches voisins : chaque atome présent en un site du réseau engendre donc un hexagone d'exclusion :



A chaque atome est associée une fugacité  $\mu$ . Pour résoudre ce modèle R.J. Baxter a cherché à écrire une relation triangle ; cependant le modèle tel qu'il a été défini précédemment ne semble pas présenter de relation triangle : il a donc été conduit à plonger ce modèle dans un modèle plus vaste qui admette, lui, une relation triangle. Considérons un réseau carré avec le poids de Boltzmann suivant associé à tout carré élémentaire :



$$W(a,b,c,d) = m \frac{a+b+c+d}{e^{La+Mb+Nd} e^{-a+b-c+d}}$$

sous réserve que  $ab = bc = cd = da = 0$

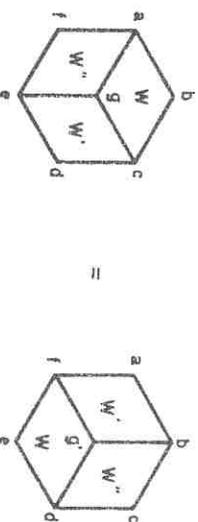
(a,b,c,d valent 0 ou 1)

$W(a,b,c,d) = 0$  sinon.

Lorsque l'on reconstruit le réseau carré à partir de ce motif élémentaire, on constate que chaque site se voit attribuer une fugacité  $2\mu + 2\mu'$ .

La différence  $\mu - \mu'$  est donc une quantité "irrélevante" dont ne dépendra pas la fonction de partition. Néanmoins cette variable supplémentaire est nécessaire afin de pouvoir écrire la relation triangle. Dans la limite  $L \rightarrow 0$  et  $M \rightarrow -\infty$ , on retrouve bien comme cas particulier le modèle d'hexagone dur.

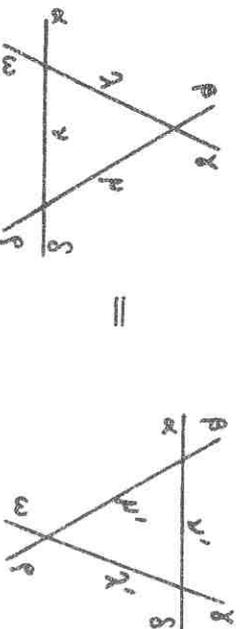
La relation triangle revient à écrire la relation suivante :



dont la traduction analytique est la suivante :

$$\sum_g W(a,b,c,g) W'(c,d,e,g) W''(e,f,a,g) = \sum_{g'} W(d,e,f,g') W'(f,a,b,g') W''(b,c,d,g')$$

Nous rentrerons dans la suite de cette note, dans le détail de ces équations trilineaires. Nous remarquons l'opposition existant entre cette relation triangle et celle que l'on obtient pour un modèle à vertex : pour un tel modèle nous avons une sommation sur trois variables muetres intermédiaires  $\lambda^{(i)}, \mu^{(i)}, \nu^{(i)}$  comme le montre la figure suivante :



Dans la relation triangle des modèles à spins, la sommation porte, par contre, sur un seul spin, le spin central noté  $g$  (resp  $g'$ ).

Le modèle à 8 vertex symétrique est un cas particulier qui, vu comme un modèle à vertex, vérifie la relation triangle des modèles à vertex, et, vu comme un modèle à spin, vérifie également la relation triangle des modèles à spin : du fait des symétries particulières de ce modèle la triple sommation sur  $\lambda, \mu, \nu$  se ramène à la sommation sur une seule variable. Cependant ceci n'est pas le cas général : le modèle d'hexagone dur peut être vu comme un modèle à 64 vertex comme l'ont indiqué D.W. Wood et M. Goldfinch [12].

Vu comme un modèle à vertex le modèle d'hexagone dur ne semble pas admettre de relation triangle et il n'a pas été possible par le jeu d'autres correspondances d'obtenir sur ce modèle une relation triangle du type vertex. Aussi dorénavant, nous parlerons de modèles à spin et de modèles à vertex en fonction du type de relation triangle (resp. tétra èdre...) que l'on peut écrire pour ces modèles.

### II - PROBLÈME DE DIMENSIONNALITÉ D'UN MODÈLE

Nous avons souligné l'importance qu'il y avait à trouver des problèmes complètement intégrables qui soient véritablement des problèmes tridimensionnels ou multidimensionnels, et non des problèmes qui se ramènent, en définitive, à des problèmes plus simples en dimension deux ou moins. Nous allons voir les difficultés qu'il y a à donner un sens précis à la notion de dimensionnalité d'un modèle.

#### a) LES PROBLÈMES DE DIMENSIONNALITÉ SUR LES PROBLÈMES INTÉGRABLES EN GÉNÉRAL

1) Considérons pour commencer l'exemple des équations non linéaires en dimension  $2+1$ . Si la notion de systèmes complètement intégrables en dimension  $1+1$  est assez bien comprise dans le cadre de la théorie du scattering inverse [13] [14] et grâce à des concepts simples tels que la notion de paire de Lax [15]  $\frac{dA}{dt} = [L, A]$ , par exemple, pour l'équation de Korteweg-de-Vries  $u_t + 6 u u_x + u_{xxx} = 0$ , nous avons  $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u$ ,  $A = -4 \frac{\partial}{\partial x} + 3(u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} u)$ , la notion de systèmes complètement intégrables en dimension  $2+1$  est aujourd'hui assez polémique : une généralisation simple de la notion de paire de Lax est celle de paire de Zakharov-Shabat [16]  $\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial y} = [A, L]$ . Un exemple d'équation non linéaire correspondant à une telle paire est l'équation "bidimensionnelle" de KdV :  $\frac{\partial}{\partial x} (u_x + 6 u u_x + u_{xxx}) = -3u \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} u$ .

Dans l'exemple de l'équation usuelle de KdV (dimension  $1+1$ ), comme dans la plupart des équations non linéaires complètement intégrables, il existe des propriétés de pôles des solutions qui sont remarquables :

Si l'on recherche des solutions de KdV de la forme

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^N (-2) (x - a_i(t))^{-2}, \text{ il faut, et il suffit, [13] de résoudre le système}$$

$$\dot{a}_i = 6 \sum_{j \neq i} (a_i - a_j)^{-2}$$

et  $\sum_{i \neq j} (a_i - a_j)^{-3} = 0$  quel que soit  $i$ .

Dans le cas de l'équation de KdV bidimensionnelle on peut, en généralisant cette propriété remarquable, rechercher des solutions méromorphes de celle-ci :

$$u(x,y,t) = \sum_{i=1}^N (-2) \cdot (x - a_i(y,t))^{-2},$$

où encore

$$u(x,y,t) = \sum_{i=1}^N (-2) \cdot \wp(x - a_i(y,t)),$$

où  $\wp$  désigne la fonction  $\wp$  de Weierstrass, et où  $a_i(y,t)$  est méromorphe ;  $a_i$  doit alors vérifier le système d'équation :

$$\begin{cases} a_{1yy} = 4 \sum_{j \neq i}^N \wp'(a_i - a_j) \\ a_{it} = 3 a_{iy}^2 - 12 \sum_{j \neq i}^N \wp(a_i - a_j) \end{cases}$$

Ces solutions présentent de grandes analogies avec les solutions méromorphes de l'équation KdV. Parallèlement, si nous considérons une autre équation complètement intégrable, l'équation de Sine-Gordon, il est possible d'en donner une généralisation immédiate qui présente de nombreuses propriétés intéressantes :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = \sin \phi$$

Lorsque l'on effectue une transformation de self-similarité [17] sur cette équation on est ramené à l'équation de Sine-Gordon usuelle. Il est possible d'obtenir des solutions particulières ressemblant à des solitons. Cependant la plupart des auteurs s'accordent à voir dans ces divers exemples des équations faussement bidimensionnelles (2+1) : elles ne sont que des extensions simples des équations intégrables usuelles (dimension 1+1), et en présentent les propriétés et caractéristiques fondamentales sans en présenter de nouvelles.

2) Considérons maintenant les problèmes quantiques de N particules en interaction sur une droite, associés à l'Hamiltonien suivant :

$$H = -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \frac{d^2}{dx_i^2} - \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^M \frac{d^2}{dy_j^2} + \sum_{i < i'}^N 2 V_{AA}(x_i - x_{i'}) + 2 \sum_{j < j'}^M 2 V_{AA}(y_j - y_{j'}) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M 2 V_{AA}(x_i - y_j)$$

$$\text{avec } V_{AA}(x) = -\frac{m}{64} \frac{y^2 G}{\text{ch}^2(\frac{m\gamma x}{g})}$$

$$\text{et } V_{AA}(x) = \frac{m}{64} \frac{y^2 G}{\text{sh}^2(\frac{m\gamma x}{g})}$$

(dont A.B. Zamolodchikov remarquait le lien avec la limite non relativiste de la matrice S du problème de Sine-Gordon [18]). Il y a deux populations différentes de particules (solitons et antisolitons) auxquelles on associe les coordonnées x et y. Cependant dans le cas N=M on pourrait parfaitement interpréter les  $x_i$  et  $y_i$  comme les deux coordonnées d'une même particule i dans un espace de dimension deux. Réciproquement certains auteurs dont P.J. Gambardella ont souligné le fait qu'il existe des problèmes quantiques à N corps qui, en dimensions quelconques, étaient susceptibles de conduire à des calculs exacts [19] (nous ne parlons pas de problèmes complètement intégrables puisque nous n'avons pas défini cette notion en dimension supérieure à 1+1). Il en est ainsi de la généralisation en toute dimension du modèle de Calogero, d'interaction en  $\frac{1}{x}$ . Ainsi, en dimension 2+1, l'Hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \frac{m\omega}{4} \sum_{i>j=1}^N (x_i - x_j)^2 + \lambda_1 \sum_{i>j=1}^N \frac{1}{(x_i - x_j)^2} + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \left( \frac{d^2}{dx_i^2} + \frac{d^2}{dy_i^2} \right) + \frac{m\omega}{4} \sum_{i>j=1}^N \left[ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right] + \lambda_1 \sum_{i>j=1}^N \frac{1}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

conduit à des résultats exacts sur divers quantités (vecteurs propres, etc...).

L'analogie entre cet hamiltonien et le précédent est manifeste.

Nous voyons donc qu'une certaine confusion peut exister entre les symétries internes des particules et la dimension de l'espace réel.

3) Compte tenu de ces difficultés dans l'espace réel, il est possible d'envisager de donner une définition de la dimensionnalité d'un modèle qui soit fonction du nombre de paramètres spectraux qui interviennent : dans tous les exemples de modèles complètement intégrables unidimensionnels on dispose d'un seul paramètre spectral, l'impulsion  $k$  ou, pour les modèles relativistes, la rapidité  $\theta$ . Pour les problèmes en dimensions supérieures plusieurs paramètres spectraux (variables de Mandelstam...) interviendraient a priori.

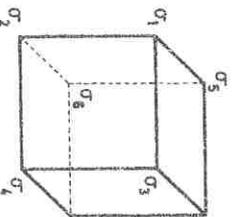
En fait une généralisation, sur laquelle nous reviendrons par la suite, du modèle à huit vertex faisant intervenir non pas les fonctions de Jacobi usuelles d'une seule variable, mais les fonctions  $\Theta$  de plusieurs variables a été trouvée par de très nombreux auteurs (I.V. Cherednik [20], A.A. Belavin [21], H.C. Otinger et J. Honerkamp [22] etc...). Cette généralisation montre explicitement qu'il est possible d'avoir un modèle ayant plusieurs paramètres spectraux et qui correspond en fait à un modèle strictement bidimensionnel (au moins lorsqu'on le regarde comme un modèle de mécanique statistique).

La dimension du modèle n'est donc pas liée au nombre de paramètres spectraux. Le modèle précédent est définitivement un modèle bidimensionnel et ce, quel que soit le nombre de ces paramètres : l'important est que ce modèle satisfasse la relation triangle caractéristique de la dimension deux.

b) PROBLEME DE DIMENSIONNALITE EN MECANIQUE STATISTIQUE

Nous allons maintenant aborder la question de la dimensionnalité en mécanique statistique sur réseau, en donnant un certain nombre d'exemples de

modèles exactement solubles, mais dont la véritable dimension est, en quelque sorte, cachée : un des rares exemples fourni par la littérature de modèle tridimensionnel, où l'on sache calculer la fonction de partition, a été donné par Suzuki [23] ; sur un réseau cubique simple on définit le poids de Boltzmann de la façon suivante :



$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \text{ soit } \pm 1$$

$$W = e^{K_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 + K_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_5 \sigma_6}$$

Il est facile de vérifier qu'une simple dualité transforme le modèle précédent en un ensemble de modèles d'Ising bidimensionnels découplés. La fonction de partition par site de ce modèle n'est donc que la fonction de partition par site donnée par L. Onsager [24]. Bien qu'ayant des "allures" tridimensionnelles, ce modèle est en fait un modèle bidimensionnel déguisé. Considérons maintenant l'exemple très simple du modèle d'Ising unidimensionnel avec conditions libres

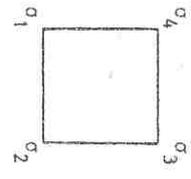
$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \prod_i e^{K_1 \sigma_i \sigma_{i+1}}$$

Effectuons le changement de variables  $\lambda_i = \sigma_i \sigma_{i+1}$  qui découple les différentes sommations dans le calcul de la fonction de partition :

$$Z = \prod_i \sum_{\lambda_i = \pm 1} e^{K_1 \lambda_i} = (2 \cosh K_1)^N$$

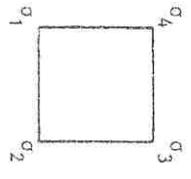
La fonction de partition par site n'est autre que la fonction de partition par site d'un problème avec un site isolé (dimension 0) : le problème a une dimension apparente de 1 et une dimension réelle nulle. De même

le modèle bidimensionnel sur réseau carré, ayant pour poids de Boltzmann sur le motif carré élémentaire :



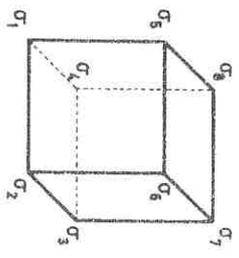
$$W = e^{K_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}$$

est en fait un modèle de dimension nul (il suffira de répéter par deux fois le raisonnement précédent). Par contre le modèle bidimensionnel sur réseau carré avec le poids de Boltzmann suivant sur le motif élémentaire :



$$W = e^{K_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 + K_2 \sigma_1 \sigma_2 + K_2 \sigma_3 \sigma_4}$$

est en fait un modèle unidimensionnel (la fonction de partition par site est la même que celle du modèle d'Ising unidimensionnel en champ magnétique  $2 K_2$ ). En dimension trois, le modèle sur réseau cubique simple avec le poids de Boltzmann suivant sur les cubes élémentaires :



$$W = e^{K \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6 \sigma_7 \sigma_8}$$

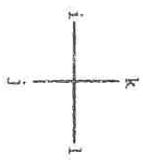
est un modèle de dimension réelle nulle.

On peut également avoir une dimension réelle égale à 1 avec le poids

$$W = e^{K_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6 \sigma_7 \sigma_8 + K_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_5 \sigma_6 + K_2 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_7 \sigma_8 \text{ etc...}}$$

A ce niveau il est encore possible de reconnaître, sur l'expression explicite de  $W$ , la dimension réelle du modèle. Cependant si, à partir des expressions précédentes, on effectue diverses opérations (dualité, traces partielles, décorations etc...) il deviendra vite particulièrement difficile de reconnaître cette dimension réelle.

Nous nous sommes intéressés aux modèles à spins, considérons maintenant les mêmes problèmes de dimensionnalité sur les modèles à vertex. On peut rappeler les exemples donnés par J. Rae [25] qui constituent des modèles bidimensionnels de dimension réelle 1. Donnons d'autres exemples. Considérons le modèle à vertex suivant :



$i, j, k, l$  valent  $\pm 1$  (flèches)

si  $ij \neq kl$  la configuration est interdite ; autrement dit  $l = i \cdot \epsilon$  et  $k = j \cdot \epsilon$ ,  $\epsilon$  valant  $\pm 1$ . Le poids de Boltzmann dépend uniquement de  $\epsilon$  : en d'autres termes nous avons :

$$W(i, j, k, l) = \delta_{ij, kl} \cdot W(1, 1)$$

Selon des notations devenues classiques, on peut écrire  $W(i, j, k, l)$  comme une matrice  $4 \times 4$  faisant passer des quatre états de  $(i, j)$  aux quatre états de  $(k, l)$ . En l'occurrence cette matrice s'écrit, si l'on note  $W(+1) = a$ ,  $W(-1) = b$  :

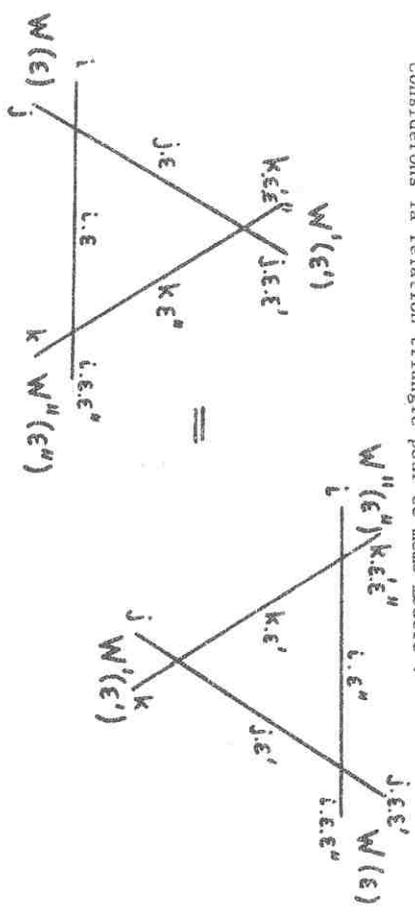
$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Cette forme doit être rapprochée de celle du modèle à 8 vertex symétrique :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

elle correspond donc à faire les deux dégénérescences suivantes :  $a \rightarrow b$  et  $c \rightarrow d$ .

Considérons la relation triangle pour ce même modèle :



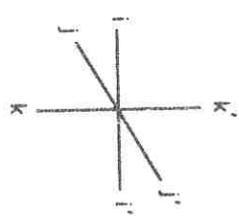
L'écriture analytique des relations triangles s'exprime,  $i, j, k$ ,  $i\epsilon\epsilon''$ ,  $j\epsilon\epsilon'$ ,  $k\epsilon'\epsilon''$  étant fixés, par les équations suivantes : (en appelant  $\lambda' = \epsilon\epsilon''$ ,  $\lambda'' = \epsilon\epsilon'$ ,  $\lambda = \epsilon'\epsilon''$  qui sont donc fixés et tels que  $\lambda\lambda'\lambda'' = 1$ )

$$\sum_{\epsilon} W(\epsilon) W'(\epsilon\lambda'') W''(\epsilon\lambda') = \text{idem.}$$

Autrement dit nous avons là un exemple de modèle qui satisfait toujours la relation triangle quels que soient  $W$ ,  $W'$  et  $W''$  ! Nous reviendrons de façon plus précise, lorsque dans le paragraphe III nous étudierons les relations triangle et tétraèdre, sur ces solutions exotiques. En fait on peut facilement se convaincre que ce modèle est un modèle de dimension réelle nulle (la variable que nous avons appelée  $\epsilon$  est un spin indépendant n'interagissant avec aucun autre spin ou variable). La fonction de partition par site d'un tel modèle est

$$\sum_{\epsilon} W(\epsilon) = a + b$$

Généralisons cet exemple en dimension trois :

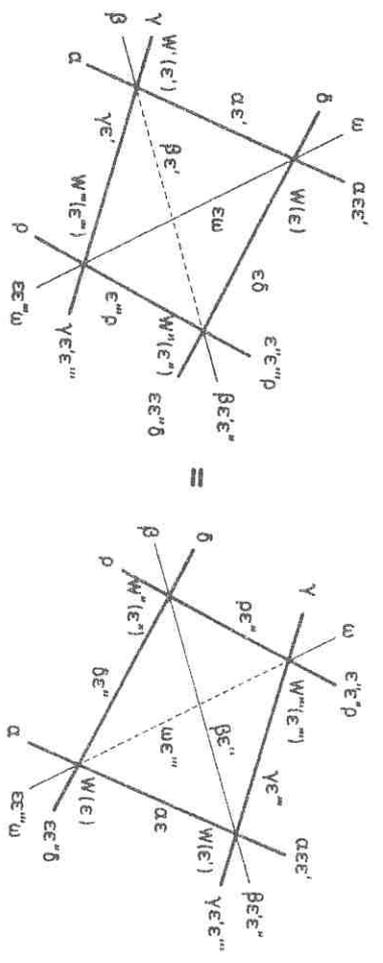


$ii' = jj' = kk'$  Toute autre configuration est interdite.

Le poids de Boltzmann ne dépend que de cette valeur commune que nous notons  $\epsilon$  :

$$W(i, j, k, i', j', k') = \delta_{ii'} \cdot \delta_{jj'} \cdot \delta_{kk'} \cdot W(ii')$$

Nous considérons la relation tétra èdre pour ce modèle :



Là encore  $\alpha, \beta, \dots, \omega, \alpha\epsilon\epsilon'$ ,  $\beta\epsilon'\epsilon''$ ,  $\dots, \omega\epsilon\epsilon''$  doivent être considérés comme fixés et donc  $\epsilon\epsilon'$ ,  $\epsilon\epsilon''$ ,  $\epsilon\epsilon'''$ ,  $\epsilon'\epsilon''$ ,  $\epsilon'\epsilon'''$ ,  $\epsilon''\epsilon'''$ . Il n'y a donc qu'un seul degré de liberté : la variable muette  $\epsilon$ . Les équations s'écrivent alors en posant :

$$\lambda_1 = ee', \lambda_2 = ee'', \lambda_3 = ee''',$$

$$\sum_{\epsilon} W(\epsilon) W'(\epsilon\lambda_1) W''(\epsilon\lambda_2) W'''(\epsilon\lambda_3) = \text{idem.}$$

A nouveau nous constatons que, pour ce modèle particulier, les relations tétra édre sont automatiquement vérifiées ! Nous obtenons ainsi un exemple, malheureusement trivial, de relation tétra édre (on peut se convaincre facilement que là aussi le modèle est de dimension 0).

### III - LES PROBLÈMES POSÉS PAR LA RECHERCHE DES RELATIONS TRIANGLE OU TÉTRA EDRE

#### a) POSITION GÉNÉRALE DU PROBLÈME : LES EXEMPLES DU MODÈLE A 8 VERTEX SYMÉTRIQUE ET DE L'HEXAGONE DUR

1) Considérons tout d'abord le cas du modèle à 8 vertex symétrique. Nous utiliserons les notations traditionnelles (a, b, c, d), (a', b', c', d'), (a'', b'', c'', d'') pour les paramètres respectifs des trois poids W, W', W'' interve ant dans la relation triangle. Avec ces notations nous pouvons maintenant écrire explicitement la relation triangle dans ces variables. Il va s'agir de 6 équations trilineaires. Nous avons pris des conventions sur les vertex qui leur font jouer des rôles symétriques :

$$\begin{cases} ad'd'' + cb'b'' = ac'c'' + ca'a'' \\ da'd'' + bc'b'' = ac'a'' + ca'a'' \\ dd'a'' + bb'a'' = aa'c'' + cc'a'' \\ dc'b'' + ba'd'' = ab'd'' + cd'b'' \\ db'c'' + bd'a'' = ad'b'' + cb'd'' \\ db'a'' + bd'c'' = da'b'' + bc'd'' \end{cases}$$

Nous voyons que ces équations se regroupent naturellement en deux groupes de trois équations. Le deuxième groupe disparaît lorsque l'on considère le cas plus simple du modèle à 6 vertex (d = d' = d'' = 0).

Pour résoudre ce système d'équations, on peut, par exemple, le considérer comme un système linéaire dans les variables a'', b'', c'' et d''. Nous avons alors affaire à un système de 6 équations homogènes, pour 4 variables. Pour qu'un tel système admette d'autres solutions que la solution triviale a''=b''=c''=d''=0 il faut qu'un certain nombre de déterminants s'annulent :

$$\varphi_i(a, b, c, d, a', b', c', d') = 0.$$

Leur calcul est quelque peu fastidieux, mais surtout il n'est pas immédiat de s'apercevoir que l'ensemble de ces nouvelles équations se "factorisent", en quelque sorte, sous la forme

$$\begin{aligned} \varphi_1(a,b,c,d) &= \varphi_1(a',b',c',d') \\ \varphi_2(a,b,c,d) &= \varphi_2(a',b',c',d') \end{aligned}$$

avec  $\varphi_1(a,b,c,d) = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab}$

$$\varphi_2(a,b,c,d) = \frac{cd}{ab}$$

L'équation  $\varphi_1(a,b,c,d) = \text{Cre}$  est une quadrique, de même que l'équation  $\varphi_2(a,b,c,d) = \text{Cre}$ . Nous retrouvons la caractérisation, bien connue, des courbes elliptiques comme intersection de quadriques.  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  vont fixer le module  $k$  des fonctions elliptiques et un point de normalisation  $\eta$ , rendant naturelle l'uniformisation suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 2 \operatorname{cn}(2\eta) \operatorname{dn}(2\eta) \\ \varphi_2 &= k \operatorname{sn}^2(2\eta) \\ a &= \rho \operatorname{sn}(v + 2\eta) \\ b &= \rho \operatorname{sn}(2\eta) \\ c &= \rho \operatorname{sn}(v) \\ d &= \rho \cdot k \cdot \operatorname{sn}(2\eta) \operatorname{sn}(v + 2\eta) \operatorname{sn}(v) \end{aligned}$$

Avec cette uniformisation les équations trilinéaires reviennent à dire que  $k$  et  $\eta$  ont des valeurs communes pour  $W, W', W''$  et aussi que l'on a la relation  $v + v' = v''$  sur les paramètres spectraux.

L'exemple du modèle à 6 vertex correspond à faire dégénérer le module  $k$  des fonctions elliptiques sur l'une des deux valeurs 0 ou 1 (les sinus elliptiques deviennent respectivement le sinus ordinaire, pour  $k=0$ , et la tangente hyperbolique pour  $k=1$ ). On a pour  $k=1$  :

$$\begin{aligned} a &= \rho \operatorname{th}(v + 2\eta), & b &= \rho \operatorname{th}(2\eta) \\ c &= \rho \operatorname{th} v, & d &= \rho \operatorname{th} 2\eta \operatorname{th}(v + \eta) \operatorname{th} v \end{aligned}$$

qui conduit à la relation

$$a = b + c + d \quad \text{lorsque } k=1 \quad (d=0 \text{ lorsque } k=0)$$

En fait, on peut voir que par des transformations du type "weak-graph duality" (conjugaisons), on peut faire se correspondre ces deux restrictions qui sont donc équivalentes. (Incidentement on remarque que ces restrictions sont bien stables par la relation d'inverse comme il se doit : l'inverse s'écrit  $a \rightarrow \frac{a}{2-d^2}$ ,  $b \rightarrow \frac{b}{b^2-c^2}$ ,  $c \rightarrow \frac{-c}{b^2-c^2}$ ,  $d \rightarrow \frac{-d}{a-d^2}$  ;

$$a = b + c + d \text{ devient } \frac{a}{a-d^2} - \left( \frac{-d}{a-d^2} \right) = \frac{b}{b^2-c^2} - \frac{-c}{b^2-c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a-d} = \frac{1}{b+c} \quad \Leftrightarrow a = b + c + d$$

qui est donc bien stable par la relation d'inverse).

Il est possible de faire dégénérer encore une fois de plus le modèle en imposant simultanément les deux restrictions  $a = b + c + d$  et  $d = 0$ . L'uniformisation ne s'effectue plus qu'avec des fonctions rationnelles :

$$\begin{cases} a = \rho(v + 2\eta) \\ b = \rho \cdot 2\eta \\ c = \rho v \\ d = 0 \end{cases}$$

Les équations trilinéaires reviennent encore à écrire l'équation suivante sur les paramètres spectraux :

$$v + v' = v''$$

La matrice  $4 \times 4$  qui correspond au poids de Boltzmann associé à un vertex (matrice  $S$  à deux corps) s'écrit alors :

$$L_\eta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \rho \cdot 2\eta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \rho v \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit  $L_n = \rho \cdot 2n \cdot \mathbb{1} + \rho \cdot v \cdot P_{ij}$  où  $P_{ij}$  désigne une transposition.

La relation triangulaire et l'équation  $v + v' = v''$ , s'identifient à la relation algébrique donnée en I.b.

Cette matrice correspond au modèle de Schrödinger non linéaire quantique ou bien encore au modèle dit XXX [26]. On peut reprendre l'analyse du modèle à 8 vertex symétrique en utilisant d'autres notations : il est également courant d'écrire la matrice  $L_n$  ( $4 \times 4$ ), en la décomposant sur un produit tensoriel de matrice de Pauli :

$$L_n = \sum_{i=0}^3 W_i \cdot \sigma_i \cdot \tau_i$$

$0_0, \tau_0$  désignent la matrice identité  $2 \times 2$  et  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (resp  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ ) les matrices de Pauli usuelles. La correspondance entre les paramètres précédents  $a, b, c, d$  et les nouveaux paramètres  $W_0, W_1, W_2, W_3$  est la suivante :

$$a = W_0 + W_3, \quad b = W_0 - W_3, \quad c = W_1 + W_2, \quad d = W_1 - W_2.$$

Si l'on réécrit les relations trilineaires précédentes en effectuant des combinaisons linéaires appropriées on obtient :

$$\begin{cases} W_0 W_2 W_1'' + W_3 W_1 W_2'' + W_1 W_3 W_0'' + W_2 W_0 W_3'' = 0 \\ W_0 W_1 W_2'' + W_3 W_2 W_1'' + W_1 W_0 W_3'' + W_2 W_3 W_0'' = 0 \\ W_1 W_3 W_2'' + W_2 W_0 W_1'' + W_3 W_1 W_0'' + W_0 W_2 W_3'' = 0 \\ W_1 W_0 W_2'' + W_2 W_3 W_1'' + W_3 W_2 W_0'' + W_0 W_1 W_3'' = 0 \\ W_2 W_1 W_0'' + W_1 W_2 W_3'' + W_3 W_0 W_1'' + W_0 W_3 W_2'' = 0 \\ W_1 W_2 W_0'' + W_2 W_1 W_3'' + W_3 W_1 W_2'' + W_0 W_3 W_0'' = 0 \end{cases}$$

Nous voyons que ces équations possèdent la symétrie  $S_3$  (les trois poids  $W, W'$  et  $W''$  jouent des rôles symétriques). D'autre part ces équations possèdent également une symétrie  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  ; en effet si nous introduisons l'opérateur  $A = I + (01) (23) + (02) (13) + (03) (12)$ , où  $(ij)$  désigne la transposition entre les indices  $i$  et  $j$  dans une expression, et  $I$  désigne l'opérateur

identité (par exemple (01) (23)  $W_0 W_2 W_1'' = W_1 W_3 W_0''$ ), les équations s'écrivent :

$$A(W_0 W_2 W_1'') = 0, \quad A(W_0 W_1 W_2'') = 0 \text{ etc...}$$

L'étude précédente (recherche des deux quadriques  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ ) peut également être effectuée à l'aide de ces nouvelles variables. Mais là encore la propriété remarquable, qui assure une uniformisation du problème, à savoir cette propriété de "factorisation" des déterminants, est délicate à voir.

2) Mettons maintenant en évidence sur le modèle de l'hexagone dur, cette même propriété de séparation en "invariants algébriques"  $\varphi_i$  à partir des équations trilineaires.

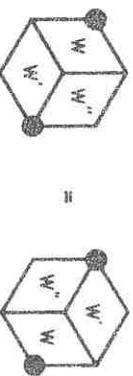
Rappelons les notations :

$$\begin{array}{ccc} d & & \\ \hline a & \square & c \\ \hline b & & \end{array} \quad W(a,b,c,d) = mz \quad \begin{array}{l} \frac{(a+b+c+d)}{4} \\ e^{lac+mbd} \cdot t^{b+d-a-c} \end{array}$$

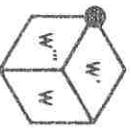
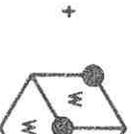
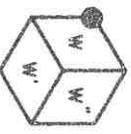
si  $ab = bc = cd = da = 0$

$W = 0$  sinon

Comme pour tout modèle d'exclusion, les relations trilineaires sont assez faciles à établir :

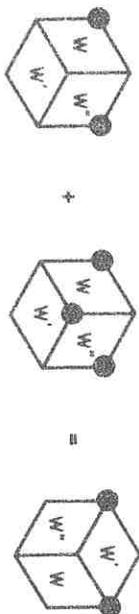


ne fournit pas d'équation.

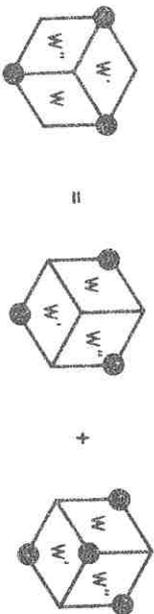


$$e^{L_2} + s = (z^2 z'')^{1/2}$$

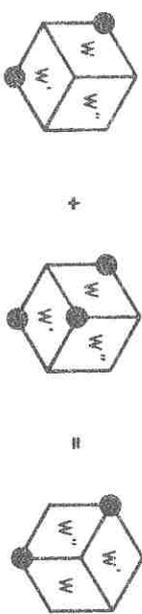
en posant  $s = (tt'e'')^{-1} \cdot (zz'z'')^{1/4}$ .



$$s^2 + s^3 + e^{L+L''} = e^{M'} \cdot z(z'z'')^{1/2}$$



$$e^{M'+M''} \cdot (zz'z'') = s^3 + s^4 + e^{L+L'+L''}$$



$$\frac{z^{1/4} z'^{1/4}}{tt'} (1 + s \cdot e^{L+L'}) = e^{M''} (tt'e''(zz'z'')^{1/4} z''^{1/4} e')$$

$$\Leftrightarrow e^{M''} z''(zz')^{1/2} = s^2 + s^3 e^{L+L'}$$

enfin



ne fournit pas d'équation.

En résumant, nous avons donc les équations suivantes :

$$(1) (z'z'')^{1/2} = s + s^2 \cdot e^L$$

$$(2) z(z'z'')^{1/2} e^M = s^2 + s^3 \cdot e^{L'+L''}$$

$$(3) zz'z'' \cdot e^{M'+M''} = s^3 + s^4 \cdot e^{L+L'+L''}$$

ainsi que toutes les équations déduites de celles-ci en permutant  $W, W'$  et  $W''$ .

Nous utiliserons les notations évidentes :

$$(2') \text{ pour l'équation } z'(zz'')^{1/2} e^{M'} = s^2 + s^3 \cdot e^{L'+L''} \text{ et de même } (1'), (1''), (2'').$$

Formons  $e^{L'}(2') - e^{L''}(2'')$  nous obtenons :

$$(zz'z'')^{1/2} [z^{1/2} \cdot e^{L'+M'} - z^{1/2} \cdot e^{L+M}] = s^2 (e^{L'} - e^{L''}) \quad (I)$$

D'autre part en formant  $(1') - (1)$  nous avons :

$$(s + s^2 e^{L'}) - (s + s^2 e^L) = (zz'')^{+1/2} - (z'z'')^{1/2} \\ = (zz'z'')^{1/2} [z^{-1/2} - z^{-1/2}]$$

$$\text{d'où } z^{1/2} \cdot e^{L'+M'} - z^{1/2} e^{L+M} = z^{-1/2} - z^{-1/2}$$

$$\Rightarrow z^{1/2} e^{L'+M'} - z^{-1/2} = z^{1/2} e^{L+M} - z^{-1/2} = \Delta_1$$

Formons  $e^{L'}(1) - e^{L''}(1'')$  :

$$z''^{1/2} \cdot [z^{1/2} \cdot e^{L'} - z^{1/2} \cdot e^{L''}] = s \cdot (e^{L'} - e^{L''}) \quad (II)$$

Formons  $(2') - (2'')$  :

$$(zz'z'')^{1/2} [z^{1/2} \cdot e^{M'} - z^{1/2} \cdot e^{M''}] = s^3 e^{L''} (e^L - e^{L'}) \quad (III)$$

$$s^2(e^L - e^{L'}) + s e^{L''}(e^L - e^{L'})$$

$$= s(e^L - e^{L'}) (s + s^2 e^{L''}) = (\text{en utilisant } 1'')$$

$$s(e^L - e^{L'}) (zz')^{1/2} = s(e^L - e^{L'}) \frac{(zz'z'')^{1/2}}{z''^{1/2}}$$

en utilisant maintenant (I), (II) et (III) nous arrivons à l'équation :

$$1/2 L+M - z^{-1/2} L'+M' + z^{1/2} M' - 1/2 M - z^{-1/2} L + z^{1/2} L' = 0$$

$$\Rightarrow 1/2 (e^{L+M} - e^M - e^L) = z^{1/2} (e^{L'+M'} - e^{M'} - e^{L'}) = \Delta_2$$

Le dernier module  $\Delta_3$  vaut :

$$\Delta_3 = z^{-1/2} e^{-L} + z^{-1/2} e^{-M} - z^{-1/2} e^{-L-M} - z^{1/2} e^{L+M}$$

Ce dernier module est plus compliqué à obtenir que les deux précédents :

il faut en l'occurrence former  $e^{-L}(1) - e^{-L'}(1')$  et  $e^{-L}(2'') - e^{-L'}(2')$ ,

équations à partir desquelles on obtient l'équation

$$z^{-1/2} \cdot e^{-M-L'} - z^{-1/2} \cdot e^{-M'-L} = s(z^{-1/2} \cdot e^{-L'} - z^{-1/2} \cdot e^{-L})$$

Il faut ensuite associer cette équation à l'équation

$$z^{-1/2} e^{-M}(2'') - z^{-1/2} e^{-M'}(2') \text{ et à l'équation}$$

$$(z^{-1/2} \cdot e^{-M-L'} - z^{-1/2} \cdot e^{-M'-L}) \cdot (2) + (z^{-1/2} \cdot e^{-L-M} - z^{-1/2} \cdot e^{-L'-M'}) \cdot (3)$$

pour aboutir à l'équation  $\Delta_3(z, L, M) = \Delta_3(z', L', M')$ .

Ces trois invariants induisent (M. Gaudin communication privée) une uniformisation elliptique qui est donnée dans l'appendice 1.

Nous voyons que, si la marche à suivre est a priori simple (éliminer  $z', L', M'$  et surtout  $s$ ) les calculs sont tout de même assez fastidieux pour réussir à écrire les équations restantes sous une forme "séparée" :  $\Psi_i(z, L, M) = \Psi_i(z', L', M')$ .

En conclusion de cette première partie, nous remarquons que l'existence des invariants algébriques précédents, communs aux trois poids  $W, W', W''$ , est une propriété tout à fait remarquable associée aux relations triangle et plus précisément à leurs équations trilineaires correspondantes. C'est cette propriété remarquable qui permet l'uniformisation de ces modèles. Dans la recherche de nouvelles relations triangle (et donc de nouveaux modèles exactement solubles) l'obtention de tels modules à partir des relations trilineaires, ou de toute autre manière, va donc s'avérer une étape capitale et pratiquement obligatoire ; or les exemples que nous avons donnés étaient extrêmement simples : en général la seule écriture des équations trilineaires s'avère fort longue et fastidieuse, quant à l'obtention d'invariants algébriques éventuels, elle est alors d'un degré supplémentaire de difficulté. De plus, si de tels invariants n'existent pas, il est pratiquement impossible de s'en apercevoir par le calcul. Il est donc important, si l'on désire obtenir de nouvelles relations triangles, qui ne soient pas des généralisations plus ou moins immédiates de relations déjà connues, de mettre au point des méthodes nouvelles permettant de trouver de la façon la plus simple possible ces modules. Nous donnerons quelques unes de ces méthodes dans le paragraphe IV.

b) LA RECHERCHE DE NOUVELLES RELATIONS TRIANGLE

1) La façon la plus simple d'obtenir un nouveau modèle exactement soluble en mécanique statistique est assurément d'obtenir une nouvelle relation triangle et ce bien avant de chercher à effectuer les constructions de vecteurs propres pour les matrices de transfert. La première idée qui vient à l'esprit consiste à généraliser des relations triangles déjà existantes : la matrice  $S$  du modèle de Sine-Gordon (modèle à symétrie  $O(2)$  <sup>(\*)</sup> étant connue, on a cherché à regarder la propriété de factorisation de la matrice

<sup>(\*)</sup> Du point de vue Lagrangien la symétrie  $O(2)$  de Sine-Gordon est délicate à voir : elle correspond à une symétrie de rotation du paramètre d'ordre. Vu au travers de la correspondance avec le modèle de Thirring elle correspond à l'invariance  $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ .

S sur les modèles à symétrie  $O(n)$  : la matrice  $S$  à deux corps doit se décomposer sur les invariants par  $O(n)$  :

$$S_{jk}^{jl} = \sigma_1 \cdot \delta_{jk} \cdot \delta_{jl} + \sigma_2 \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} + \sigma_3 \cdot \delta_{il} \cdot \delta_{jk}$$

Dans le cas  $n = 2$ , on peut écrire  $S_{jk}^{jl}$  comme une matrice  $4 \times 4$  :

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & \sigma_2 & 0 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \end{pmatrix}$$

(nous retrouvons la condition  $a = b+c+d$  du modèle à 6 vertex symétrique ; la matrice  $S_{jk}^{jl}$  pour  $n$  quelconque peut également être vue comme le poids de Boltzman associé au vertex d'un modèle de mécanique statistique ayant au lieu de flèches sur les liaisons, des éléments de  $\mathbb{Z}^n$ ). Ensuite, à partir du modèle  $O(n)$ , il est tentant de regarder les matrices  $S$  symétriques pour tous les groupes de Lie possibles ( $SU(n)$ ,  $Sp(n)$  ...). C'est ce qui a été effectué par des auteurs comme Berg, Karowski, Thun, Truong... [6] [27] [28]. L'écriture des relations trilineaires nécessitait l'utilisation de calculs formels sur machines. Cependant tous ces exemples conduisent à une uniformisation rationnelle de ces équations ; ils ne sont donc pas très riches au niveau analytique. Ces modèles sont trop proches du modèle  $O(n)$  précédent.

2) D'autres généralisations ont consisté, lorsque l'on dispose d'une relation triangle pour un modèle, à rendre ce modèle supersymétrique : c'est ce qui a été fait par exemple dans le cas du modèle  $\sigma$  non linéaire supersymétrique par Shankar et Witten [29].

3) Un modèle qu'il serait intéressant de généraliser est le modèle à huit vertex symétrique et sa matrice  $L_n$  correspondante :

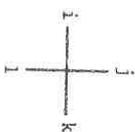
$$L_n = \sum_{i=0}^3 W_i \sigma_i T_i$$

Quelle généralisation donner aux matrices de Pauli ? Le problème est que les matrices de Pauli sont à la fois une représentation des éléments de l'algèbre de Lie de  $O(3)$ , mais sont également liés aux algèbres

de Clifford et enfin sont reliés au groupe  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  : en effet

$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  s'identifie complètement au groupe  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Avant de chercher à généraliser un modèle il faut donc avoir une idée précise des structures algébriques qui sont en jeu. En fait on peut voir, au moins dans les exemples de modèles à vertex faisant intervenir des fonctions  $\theta$  d'une ou plusieurs variables, que ce qui est en jeu, ce sont les groupes de Heisenberg [30].

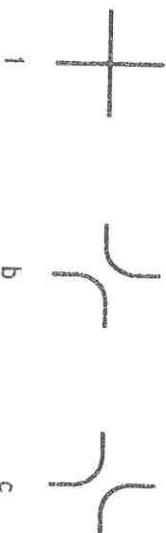
4) Lorsque l'on dispose de deux formes proches de matrices  $S(L_n)$  qui vérifient chacune une relation triangle, il est naturel de se demander si leur réunion ne pourrait elle aussi satisfaire la relation triangle. Illustrons cette idée sur l'exemple du modèle dû à Seroganov [31], qui consiste à considérer le vertex suivant :



$i, j, k, l \in \mathbb{Z}_q$

et de poids de Boltzmann

1 si  $i = j = k = l$ , b si  $i = j$  et  $k = l$ , c si  $i = l$  et  $j = k$  et 0 sinon. Ces diverses configurations seront symbolisées de la façon suivante :



Regardons les équations triangles pour ce modèle en prenant, pour plus de symétrie, des conventions symétriques pour  $b'$ ,  $c'$  et  $b''$ ,  $c''$  (i.e. se déduisant par rotation de  $2\pi/3$ ).

Nous avons :

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 1} \\
 = \\
 \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4}
 \end{array}$$

$$cc' = b'' + bb' + (q-2) bb'b''$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 5} \\
 = \\
 \text{Diagram 6}
 \end{array}$$

$$cc'b'' = cc'b''$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 7} \\
 + \\
 \text{Diagram 8} \\
 = \\
 \text{Diagram 9} + \text{Diagram 10} + \text{Diagram 11}
 \end{array}$$

$$1 + (q-1) bb'b'' = (q-1) bb'b'' + 1$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 12} \\
 = \\
 \text{Diagram 13} + \text{Diagram 14} + \text{Diagram 15}
 \end{array}$$

$$cc'c'' = bb' + b'b'' + bb'' + (q-3) bb'b'' + \text{Diagram 16}$$

Nous remarquons immédiatement que les relations deviennent respectivement, si l'on impose les contraintes supplémentaires  $c = 1 - b$  sur les trois

vertex :

$$cc' = 1 - b - b' + bb' = b'' + bb' + (q-2) bb'b''$$

$$cc'c'' = 1 - (b+b'+b'') + (bb'+b'b''+bb'') - bb'b''$$

$$= bb' + b'b'' + bb'' + (q-3) bb'b''$$

Toutes ces équations (et leurs permutes) se ramènent à l'unique relation :

$$1 = b + b' + b'' + (q-2) bb'b''$$

Il existe donc une solution des équations triangles qui revient à considérer le modèle contraint par la relation  $b + c = 1$ . Regardons la relation d'inverse sur ce modèle :

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 17} \\
 + \\
 \text{Diagram 18} \\
 = \\
 \text{Diagram 19} = \text{Diagram 20}
 \end{array}$$

$$1 + (q-1) bb' = cc'$$

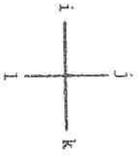
$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 21} \\
 + \\
 \text{Diagram 22} + \text{Diagram 23} \\
 = \\
 \text{Diagram 24} = 0
 \end{array}$$

$$b + b' + (q-2) bb' = 0$$

Nous voyons que  $(1-b)(1-b') = 1 + (q-1) bb' = cc'$  la condition  $c = 1 - b$  est cohérente avec la relation existant sur ce modèle.

La fonction de partition de ce modèle a été donnée par Y. Stroganov [31], en utilisant seulement la relation d'inverse précédente, et la symétrie évidente sur ce modèle  $Z(b,c) = Z(c,b)$ . Il n'a pas utilisé les méthodes classiques (Bethe ansatz...), en particulier la relation triangle qui existe pourtant.

Avec ces mêmes notations regardons la matrice  $S$  à deux corps (qui est une restriction de la matrice  $S$  du modèle  $O(n)$ ) dont on sait par ailleurs qu'elle vérifie la relation triangle) qui s'écrit :



$i, j, k, l \in \mathbb{Z}_n$

$S_{ijkl} = a$  si  $i = k$  et  $j = l$   
 $= b$  si  $i = l$  et  $j = k$   
 $= 0$  sinon

Ces diverses configurations seront symbolisées de la façon suivante :



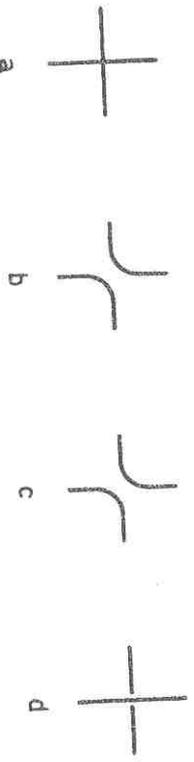
La relation d'inverse s'écrit :

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} = 0$$

$$ab' + (q-2)bb' + a'pb = 0$$

Ce modèle dont la matrice  $L_n$  correspond à la combinaison de la matrice identité et de la transposition  $P_{ij}$  a déjà été vu comme conduisant à une relation triangle.

Ces deux exemples conduisant à une relation triangle, il est tentant de voir si leur réunion donne un modèle possédant une relation triangle ; soit donc le modèle suivant :



(on remarquera que pour  $q$ , nombre d'états sur les différentes liaisons, égal à 2, on retrouve le modèle à 8 vertex symétrique).

Ce modèle possède effectivement une relation triangle, et sa fonction de partition pour  $q \neq 2$ , a été calculée par C.L. Schultz [32], mais en utilisant seulement la relation d'inverse et les symétries du problème.

Nous n'écrivons pas toutes les équations correspondant à cette relation triangle ; donnons en une seule, pour information :

$$\begin{array}{c} \beta \\ \alpha \end{array} \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \begin{array}{c} \beta \\ \gamma \end{array} = \begin{array}{c} \beta \\ \alpha \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \beta \\ \gamma \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array}$$

$$cc'c'' = (a+d) b'p''$$

$$\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array}$$

$$bb''(a'+d') = bb'(a''+d'')$$

$$\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} = qbb'p''$$

D'où l'équation :

$$cc'c'' = (a+d) b'p'' + (a'+d') bb'' + (a''+d'') bb' + qbb'p''$$

Face à ces approches qui consistent en quelque sorte à "parier" sur une forme de la matrice S à deux corps (ou de la matrice  $L_n$ ) pouvant conduire à une relation triangulaire, on peut opposer l'approche plus systématique qui consiste, lorsqu'on dispose d'une relation triangulaire, à regarder si celle-ci ne subsiste pas pour un voisinage du modèle précédent : le fait de partir d'une solution qui "marche" et de regarder un voisinage, linéarisant tous les calculs.

Illustrons cette approche sur l'exemple d'une des solutions triviales vérifiant toujours les relations triangulaires ( $a=b$ ,  $c=d$ ), et regardons si, en considérant un voisinage de ce modèle ( $a=b$  petit,  $c=d$  petit), on ne pourrait ainsi accéder à la relation triangulaire sur le modèle à 8 vertex symétrique (cette situation serait particulièrement attrayante car elle se généraliserait aisément en dimension 3 pour la recherche d'une relation tétraédrique non triviale). Nous pouvons profiter du fait que les équations trilineaires ont déjà été écrites dans le cas du modèle à 8 vertex symétrique. Si nous obtenons par simple remplacement dans les équations du modèle à 8 vertex les équations suivantes au premier ordre :

$$\left[ \begin{array}{l} da'a'' + da'A'' = ad'd'' + ad'D'' \quad (1) \\ Ad'a'' + ad'A'' = Da'd'' + da'D'' \quad (2) \\ Aa'd'' + aA'd'' = Dd'a'' + dD'a'' \quad (3) \\ dD'a'' + Aa'd'' = aA'd'' + Dd'a'' \quad (4) \\ da'D'' + Ad'a'' = ad'A'' + Da'd'' \quad (5) \\ da'A'' + ad'D'' = da'A'' + ad'D'' \quad (6) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} (3) - (4) : aA'd'' = dD'a'' \\ (3) + (4) : Aa'd'' = Dd'a'' \\ (2) - (5) : ad'A'' = da'D'' \\ (2) + (5) : Ad'a'' = Da'd'' \\ (1) - (6) : da'A'' = ad'D'' \\ (1) + (6) : da'A'' = ad'D'' \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = E \cdot D \\ A' = E' \cdot D' \\ A'' = E'' \cdot D'' \\ \frac{a}{A} = \frac{a''}{A''} \cdot \frac{a'}{A'} \cdot E' \\ \frac{d}{D} = \frac{d''}{D''} \cdot \frac{d'}{D'} \cdot E' \\ \frac{d}{D} = \frac{d'}{D'} \cdot \frac{d''}{D''} \cdot E'' \\ E E' E'' = 1 \end{array} \right.$$

Nous voyons donc qu'au départ nous avions une relation triangulaire dans un certain domaine des paramètres ( $a=b$ ,  $c=d$ ,  $a^2=b^2$ ,  $c^2=d^2$ ,  $a^2=b^2$ ,  $c^2=d^2$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $a'$ ,  $c'$ ,  $a''$ ,  $c''$ , quelconques), et, lorsque l'on cherche à étendre ce domaine, on constate que ce domaine dans son entier ne peut pas être étendu, mais c'est seulement un sous-ensemble de ce domaine qui peut être étendu. Cette situation est en fait assez générale et constitue un obstacle supplémentaire dans la recherche des relations triangulaires.

Nous avons également recherché des voisinages du modèle à 6 vertex symétrique. Le système linéaire associé à la correction du modèle à 6 vertex est rapidement d'une taille importante, il faut utiliser le calcul formel (AMP). Ces calculs n'ont pas donné les résultats escomptés.

### c) LA RECHERCHE DE RELATIONS TETRA EDRE

Le problème de la recherche d'une relation tétra èdre est quelque peu différent de celui de nouvelles relations triangulaire. Nous allons essayer de l'illustrer sur deux exemples : à la différence des relations triangulaire, il n'y a pas à l'heure actuelle d'exemple satisfaisant de relation tétra èdre que l'on pourrait essayer éventuellement de généraliser (l'exemple donné par A.B. Zamolodchikov [33] présente certains défauts : notamment les poids statistiques du modèle peuvent être négatifs). Nous allons considérer deux exemples l'un relevant des modèles à vertex, l'autre relevant des modèles à spin.

Les équations provenant de la relation tétra èdre sont des équations quadrilinéaires dont la complexité, nous allons le voir, est bien plus grande que celle provenant des relations triangulaire. Il faut là aussi préciser le modèle que l'on considère : quelle forme algébrique donner a priori à la matrice  $L_n$  associée au vertex ? On peut imaginer là encore bien des formes comme, par exemple,

$$L_n = \sum_{i=0}^3 W_i \cdot O_i \cdot T_i \cdot P_i \quad (\text{où } O_i, T_i, P_i)$$

désignant des matrices de Pauli. Cette forme généraliserait celle du modèle à 8 vertex symétrique. En fait on peut voir que cette forme ne peut conduire à une relation tétra èdre.

1) Il faut procéder de façon plus systématique. En fait nous pouvons rechercher des matrices  $L_n$  qui soient là aussi symétriques selon un groupe donné a priori. Si ce groupe est le groupe de Lie  $SU(n)$ , on sait que tous les opérateurs qui commutent avec l'action du groupe sont les éléments du groupe des permutations (Théorème de Weil pour les groupes compacts). Pour les autres groupes, l'ensemble de ces opérateurs est plus large que le groupe des permutations. Donc a priori on devrait couvrir tous les cas en prenant  $L_n$  se décomposant sur l'algèbre du groupe des permutations. En l'occurrence chaque  $L_n$  se décomposera a priori sur tous les éléments du groupe  $S_3$  (permutations à 3 éléments). Ceci permettra de faire un calcul universel, ne faisant pas intervenir un groupe de Lie plutôt qu'un autre, et ceci simplifiera aussi les calculs.

Regardons tout d'abord le choix le plus simple possible qui revient à considérer un développement de  $L_n$  sur  $A_3$  (groupe alterné).



$$L_n = a \mathbb{1} + a' \cdot \mathbb{E} + a'' \mathbb{E}^2$$

où  $\mathbb{E}$  est un cycle d'ordre 3 :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

On peut voir, par un calcul que nous ne détaillerons pas, qu'un tel choix ne permet pas d'obtenir une relation tétra èdre. Le choix le plus simple suivant revient à considérer la forme suivante :

$$L_n = a \mathbb{1} + a' (P_{12} + P_{23} + P_{31}) + a'' (\mathbb{E} + \mathbb{E} + \mathbb{E}^2) = a \mathbb{1} + a' \cdot P_1 + a'' \cdot Q_1$$

A partir de l'algèbre  $S_4$ , on peut obtenir tout un ensemble de relations nécessaires au calcul de la relation tétra èdre :

$$\begin{aligned} [P_1, Q_2] &= [Q_1, P_2], [P_2, Q_3] = [Q_2, P_3] \\ [P_1, P_4] &= [Q_1, Q_4] = [P_4, P_3] + [P_4, P_2] \\ [P_3, P_4] &= [Q_3, Q_4] \text{ etc...} \end{aligned}$$

Les  $P_i$  et  $Q_i$  correspondent aux 4 différents vertex.

Ecrire l'équation tétra èdre revient à écrire la relation :

$$\begin{aligned} A B C D &= D C B A \\ \text{avec } A &= a \mathbb{1} + a' P_1 + a'' Q_1 \\ B &= b \mathbb{1} + b' P_2 + b'' Q_2 \\ C &= c \mathbb{1} + c' P_3 + c'' Q_3 \\ D &= d \mathbb{1} + d' P_4 + d'' Q_4 \end{aligned}$$

Nous ne détaillerons pas l'ensemble des 12 équations quadrilatérales provenant de la relation précédente. Donnons simplement pour information l'une de ces 12 équations :

$$d(a''b'c'' - c''b'a') + d'(a''b''c'' - c''b'a'') - c''b'a'' - c''b'a'' + d''(a'b''c' + ab''c' - c''b'a') = 0$$

L'ensemble de ces équations ne mène malheureusement pas à un feuilletage de l'espace des paramètres : nous sommes donc conduits à nous intéresser à la forme la plus générale, tout en restant dans le cadre de l'algèbre de  $S_3$  : Les 4 matrices A, B, C, D auront la forme :

$$\begin{aligned} A &= A_1 \cdot \mathbb{1} + A_2 \cdot \mathbb{E}_1^2 + A_3 \cdot \mathbb{E}_1 + A_4 \cdot P_{23} + A_5 \cdot P_{34} + A_6 \cdot P_{24} \\ B &= B_1 \cdot \mathbb{1} + B_2 \cdot \mathbb{E}_2^2 + B_3 \cdot \mathbb{E}_2 + B_4 \cdot P_{14} + B_5 \cdot P_{34} + B_6 \cdot P_{13} \\ C &= C_1 \cdot \mathbb{1} + C_2 \cdot \mathbb{E}_3^2 + C_3 \cdot \mathbb{E}_3 + C_4 \cdot P_{14} + C_5 \cdot P_{12} + C_6 \cdot P_{24} \\ D &= D_1 \cdot \mathbb{1} + D_2 \cdot \mathbb{E}_4^2 + D_3 \cdot \mathbb{E}_4 + D_4 \cdot P_{23} + D_5 \cdot P_{12} + D_6 \cdot P_{13} \end{aligned}$$

Pour effectuer ce dernier calcul nous utilisons les représentations du groupe  $S_4$  (une représentation de dimension 1, une représentation de dimension 2 et deux représentations de dimension 3).

Le groupe  $S_4$  peut être vu comme le groupe affine de  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ , il est donc le produit semi-direct du groupe linéaire de  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ , qui n'est autre que  $S_3$ , par le groupe  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 : S_4 = (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) \rtimes S_3$  ; la représentation de dimension 2 correspondant à ce sous-groupe normal  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ .

Donc en utilisation les représentations du groupe  $S_4$ , on représentera par exemple :

$$A = A_1 \cdot 1 + A_2 \epsilon_1 + A_3 \epsilon_1^2 + A_4 \cdot P_{23} + A_5 \cdot P_{34} + A_6 \cdot P_{24}$$

par

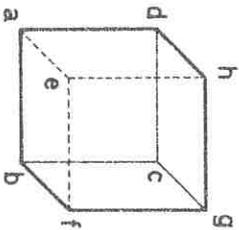
$$\begin{bmatrix} A_5 - A_6 + A_1 - A_2 & -A_5 + A_4 - A_3 + A_2 \\ A_4 - A_6 + A_3 - A_2 & -A_5 + A_6 - A_3 + A_1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} A_1 + A_5 & A_4 + A_2 & A_6 + A_3 \\ A_4 + A_3 & A_6 + A_1 & A_5 + A_2 \\ A_6 + A_2 & A_5 + A_3 & A_4 + A_1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} -A_1 + A_5 & -A_4 + A_2 & A_6 - A_3 \\ -A_4 + A_3 & -A_6 + A_1 & A_5 - A_2 \\ A_6 - A_2 & A_5 - A_3 & -A_4 + A_1 \end{bmatrix}$$

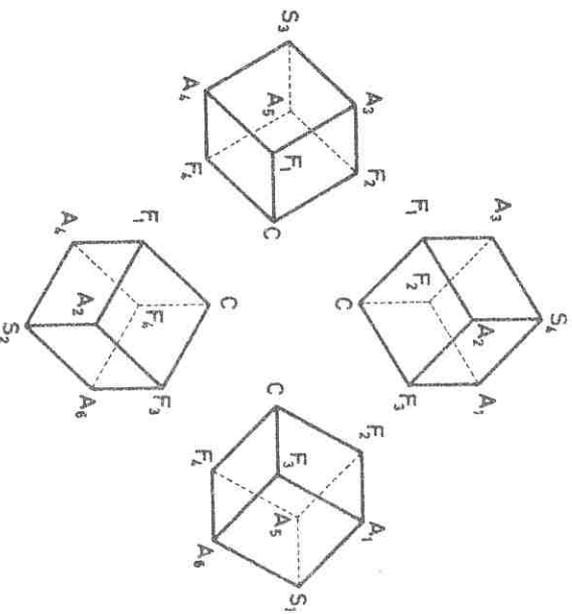
Et de même pour B, C et D ; mais maintenant la relation  $A B C D = D B C A$  peut être regardée comme un ensemble de trois relations matricielles correspondant aux trois représentations (dimension 2, 3 et 3) avec la notion naturelle de produit matriciel pour les expressions telles que  $A B C D$  et  $D C B A$  ce qui facilite les calculs. Ceux-ci ont néanmoins été effectués en utilisant le calcul formel sur machine (A.M.P. en l'occurrence) afin d'écrire explicitement toutes les équations. Celles-ci sont au nombre de douze. Nous donnons l'une de ces équations pour information dans l'appendice 2. Ces équations ont chacune en moyenne de l'ordre de 90 termes. Il devient clair que toute exploitation de ces équations est pratiquement impossible, a fortiori, la recherche d'éventuels modules. Il faut donc mettre en oeuvre d'autres méthodes provenant d'idées entièrement différentes.

2) Nous avons considéré le cas des relations tétra ètre sur des modèles à vertex et constaté leur extrême complexité. On peut alors chercher à s'intéresser aux modèles à spins et notamment aux modèles d'exclusion comme l'exemple du modèle d'hexagone dur : en effet nous avons vu que l'exclusion avait pour effet de réduire considérablement le foisonnement des équations trilineaires et, nous allons le voir, quadrilineaires. Nous allons regarder un modèle qui est une généralisation tridimensionnelle simple du modèle d'hexagone dur (modèle d'exclusion). Le poids de Boltzmann  $W(a,b,\dots,h)$  associé à un cube élémentaire est nul si les conditions suivantes ne sont pas satisfaites :

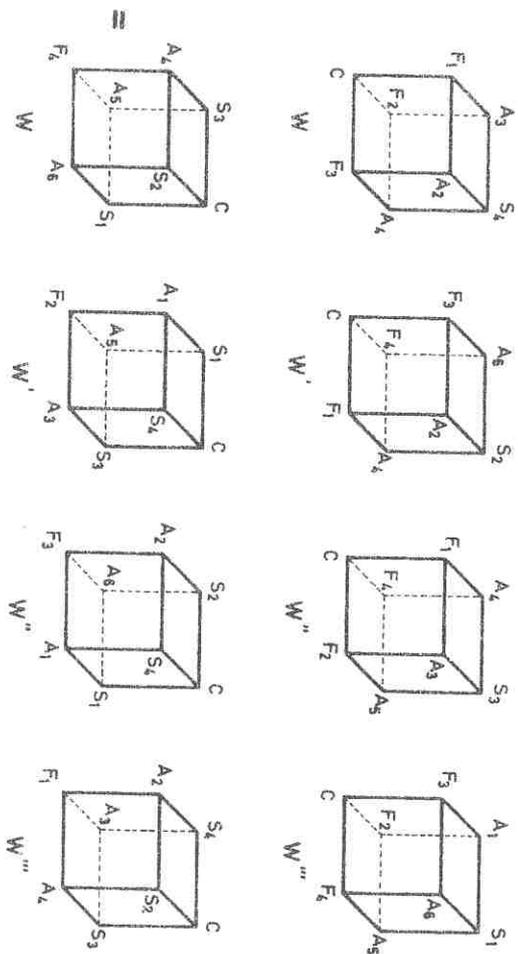


$$\begin{aligned} ab = bc = cd = da = ae = bf = ef = gc \\ = gf = gh = eh = dh = 0 \end{aligned}$$

Dans le cas du modèle d'hexagone dur il fallait accoler trois carrés déformés qui constituaient au total un hexagone ; ici on accole quatre cubes qui au total vont constituer un dodéca èdre rhombique :



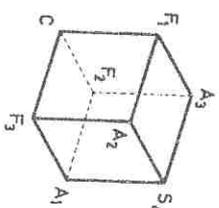
La relation étra édra reviendra à écrire :



dont la traduction analytique est la suivante :

$$\begin{aligned}
 & \sum_C W(C, F_2, F_2, A_1, A_3, S_4, F_1, A_2) \cdot W'(C, F_1, F_4, A_2, A_6, S_2, F_3, A_2) \\
 & \cdot W''(C, F_2, F_4, A_5, A_4, S_3, F_1, A_3) \cdot W'''(C, F_4, F_2, A_5, A_1, S_1, F_3, A_3) \\
 & = \sum_C W(F_4, A_6, A_5, S_1, S_3, C, A_4, S_2) \cdot W'(F_2, A_3, A_5, S_3, S_1, C, A_1, S_4) \\
 & \cdot W''(F_3, A_1, A_6, S_1, S_2, C, A_3, S_4) \cdot W'''(F_1, S_4, A_3, S_3, S_4, C, A_2, S_2)
 \end{aligned}$$

Considérons le modèle d'exclusion suivant : il y a exclusion entre sites



plus proches voisins tels que  $(C, F_1)$  ou  $(A_3, S_4) \dots$  Il y a également exclusion entre sites seconds plus proches voisins tels que  $(C, A_2)$ ,  $(F_1, F_2)$ ,  $(A_3, F_3) \dots$  Il y a d'autre part, une diagonale privilégiée  $(C, S_4)$  selon laquelle nous avons une exclusion.

Le poids de Boltzmann, en dehors de ces exclusions, n'est plus défini que par quatre fugacités associées aux quatre diagonales du cube :

$$W(C, F_3, F_2, A_1, A_3, S_4, F_1, A_2) = e^{K_1(C+S_3) + K_2(A_1+F_1) + F_3(A_3+F_3) + K_4(A_2+F_2)}$$

avec  $CF_3 = F_3A_1 = F_2A_1 = F_2C = CF_1 = A_2F_3 = A_1S_4 = A_3F_2 = F_1A_2 = A_2S_4 = F_1A_3 = A_3S_4 = CA_2 = F_1F_3 = A_1A_2 = A_1A_3 = F_2S_4 = F_2F_3 = CA_1 = A_2A_3 = \dots = CS_4 = 0$

$$C, A_1, A_2, A_3, F_1, F_2, F_3, S_4 = 0 \text{ ou } 1.$$

$$(CS_4) : K_1 \quad (A_2F_2) : K_4 \quad (A_3F_3) : K_3 \quad (A_1F_1) : K_2$$

$F_1 = 1$  tous les autres sites  $A_1, \dots, S_1, F_{i \neq 1} = 0$  on a alors l'équation

$$\begin{matrix} K_2 + K_3 + K''_2 & K'''_2 \\ e & 1 \end{matrix}$$

$F_2 = 1; A_1, S_1, F_{i \neq 2} = 0 :$

$$\begin{matrix} K_3 + K_4 + K'''_3 & K'_1 \\ e & 1 \end{matrix}$$

$F_3 = 1; A_1, S_1, F_{i \neq 3} = 0 :$

$$\begin{matrix} K_2 + K_1 + K'''_2 & K''_1 \\ e & 1 \end{matrix}$$

$F_4 = 1; A_1, S_1, F_{i \neq 4} = 0 :$

$$K'_4 + K''_4 + K'''_4 = K_1$$

$F_1 = A_1 = 1$ , les autres nuls :  $2K_2 + K'_1 + K''_2 + K'''_3 = K'_2 + K''_3 + K'''_1$

$A_1 = 1$ , les autres nuls :  $K_2 + K'''_3 = K'_2 + K''_3$

$A_2 = 1$ , les autres nuls :  $K_4 + K'_4 = K''_2 + K'''_2$

$A_3 = 1$ , les autres nuls :  $K_3 + K'_4 = K'_3 + K''_4$

$A_4 = 1$ , les autres nuls :  $K_2 + K'_3 = K_2 + K'''_3$

$A_5 = 1$ , les autres nuls :  $K_2 + K'''_2 = K_4 + K'_4$

$A_6 = 1$ , les autres nuls :  $K_3 + K'_4 = K'_3 + K''_4$

au total nous avons donc les 7 équations :

$$\begin{cases} K'''_1 = K_2 + K'_3 + K''_2 \\ K'''_2 = K_4 + K'_4 - K''_2 = -K_3 - K'_2 + K''_1 \\ K'''_3 = -K_2 + K'_2 + K'''_3 = K_1 - K'_4 - K''_4 \\ K'''_4 = K_3 - K'_3 + K''_4 = -K_4 + K'_1 - K''_3 \end{cases}$$

Ce qui conduit, entre autre, à l'équation :

$$K'''_1 + K'''_2 + K'''_3 + K'''_4 = (K_2 + K'_3 + K''_2) + (K_4 + K'_4 - K''_2) + (K_1 - K'_4 - K''_4) + (K_3 - K'_3 + K''_4) = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

On peut donc remplacer ces 7 équations par les trois équations :

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 + K_3 + K_4 &= K'_1 + K'_2 + K'_3 + K'_4 = K''_1 + K''_2 + K''_3 + K''_4 \\ &= K'''_1 + K'''_2 + K'''_3 + K'''_4 \end{aligned}$$

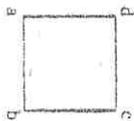
et, par exemple, les 4 équations :

$$\begin{cases} K_1 = K'_4 + K''_4 + K'''_3 \\ K'_1 = K_4 + K''_3 + K'''_3 \\ K''_1 = K_3 + K'_2 + K'''_2 \\ K'''_1 = K_2 + K'_3 + K''_2 \end{cases}$$

Au départ nous disposons de 16 paramètres contraints par 7 relations, il est donc largement possible de réaliser une relation tétra èdre : on pourra choisir arbitrairement  $w$  et  $w'$ , et on pourra toujours trouver  $w''$  et  $w'''$  en conséquence, tels que la relation tétra èdre soit satisfait. Nous voyons apparaître ici, une quantité qui ressemble à un invariant, quantité qui doit être commune aux quatre poids:  $(K_1 + K_2 + K_3 + K_4)$ .

Cependant il est clair que la fonction de partition ne dépend que de cette même somme des fugacités, les différences  $K_1 - K_2, K_2 - K_3, K_3 - K_4$  étant des variables irrelevantes.

Remarquons que cette situation a son pendant en dimension 2 : en effet soit le poids de Boltzmann suivant correspondant au motif carré élémentaire :



$$W(a,b,c,d) = e^{K_1(b+d) + K_2(a+c)}$$

$$\text{si } ab = cb = cd = da = db = 0$$

$$W = 0 \text{ sinon (a, b, c, d = 0 ou 1)}$$

Ce modèle correspond à un modèle d'exclusion entre sites plus proches voisins sur un réseau triangulaire. (C'est le modèle d'hexagone dur au sens strict).

La relation triangle, si l'on fait jouer un rôle symétrique aux trois poids  $W, W', W''$ , s'écrit :

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1: A cube-like structure with three faces labeled } W', W'', W \text{ and three vertices marked with dots.} \\ = \\ \text{Diagram 2: A cube-like structure with three faces labeled } W, W'', W' \text{ and three vertices marked with dots.} \\ = \\ \text{Diagram 3: A cube-like structure with three faces labeled } W, W, W' \text{ and three vertices marked with dots.} \end{array}$$

$$e^{K_1'} = e^{K_2 + K_2''}$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 4: A cube-like structure with three faces labeled } W', W, W'' \text{ and three vertices marked with dots.} \\ = \\ \text{Diagram 5: A cube-like structure with three faces labeled } W, W, W'' \text{ and three vertices marked with dots.} \end{array}$$

$$e^{K_1' + K_1''} = e^{2K_2 + K_2' + K_2''}$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 6: A cube-like structure with three faces labeled } W', W, W'' \text{ and three vertices marked with dots.} \\ = \\ \text{Diagram 7: A cube-like structure with three faces labeled } W, W, W'' \text{ and three vertices marked with dots.} \end{array}$$

$$e^{K_1' + K_1'' + K_1'''} = e^{2K_2 + 2K_2' + 2K_2''}$$

L'ensemble de ces équations et de leurs permutes selon  $S_3$ , reviennent à la première équation et ses permutes :

$$\begin{cases} K_1' = K_2 + K_2'' \\ K_1 = K_2' + K_2'' \\ K_1'' = K_2 + K_2' \end{cases}$$

On peut également remplacer ces trois équations par les trois équations équivalentes :

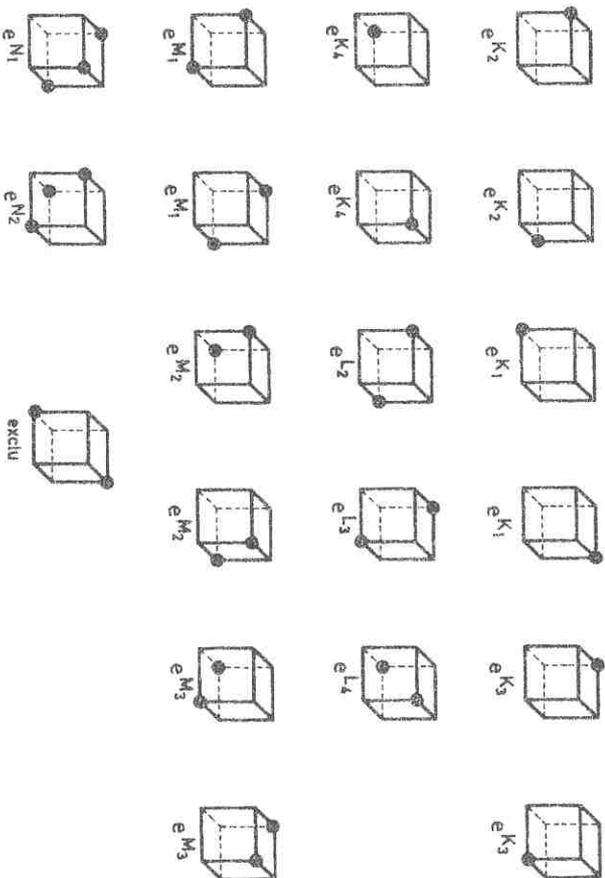
$$\begin{cases} K_1' = K_2 + K_2'' \\ K_1 + K_2 = K_1' + K_2' = K_1'' + K_2'' \quad (= K_2 + K_2' + K_2'') \end{cases}$$

Ceci n'a rien d'étonnant, en effet, nous l'avons déjà remarqué, la fonction de partition ne dépend que de la somme des fugacités  $K_1 + K_2$ , la différence  $K_1 - K_2$  étant une variable irrelevante ; il est donc naturel de voir la quantité  $K_1 + K_2$  jouer un rôle particulier ; en l'occurrence la relation triangle précédente relie trois poids de Boltzmann au même point (dans la seule variable relevante).

Par une procédure que nous avons déjà décrite [3], on peut, à partir de la relation triangle, obtenir la commutation d'une famille dépendant d'un paramètre continu de matrices de transfert et par voie de conséquence, en développant par rapport à ce paramètre, obtenir un nombre infini de

grandeurs en involution. En l'occurrence, pour l'exemple précédent, nous obtenons donc un nombre infini de grandeurs en involution qui sont associées à l'invariance triviale de la fonction de partition par la transformation  $K_1 \rightarrow K_1 + \alpha, K_2 \rightarrow K_2 - \alpha$ . (La variable par rapport à laquelle on développe est justement la variable irrelevante  $K_1 - K_2$ ; la relation de commutation est, elle,  $[T(K_1, K_2), T(K_1 + \alpha, K_2 - \alpha)] = 0$ ). Pour ces raisons on devra considérer que cette relation triangulaire n'est pas une "bonne" relation triangulaire, cependant, à l'inverse, il faut rappeler la similitude qui existe avec la situation du modèle à 8 vertex symétrique où l'on a, en introduisant l'uniformisation elliptique, pour chacun des trois poids de Boltzmann des variables  $\alpha_i, \beta_i, \lambda$  qui sont telles que  $\alpha_i + \beta_i = \lambda$  et  $\alpha_i = \beta_2 + \beta_3$  et les équations déduites par permutations (on pourra se reporter à l'article de R.J. Baxter sur la Z-invariance [34]).

On peut chercher à généraliser ce modèle tridimensionnel très simple et considérer le modèle associé aux configurations suivantes, avec leurs 12 paramètres associés :



Les calculs sont assez longs, nous ne les expliciterons pas. On obtient, entre autres, les relations suivantes :  $L_1 = L_3 = L_4 = L_2' = L_3' = L_4' = L_2'' = L_3'' = -\infty$

$$M_1 = M_1' = M_1'' = M_2 = M_2' = M_2'' = M_3 = M_3' = M_3'' = -\infty$$

$$N = N' = -\infty$$

qui nous ramènent à l'exemple donné plus haut.

L'analyse de ces équations est assez compliquée ; disons simplement qu'en dehors de l'exemple précédent, la plus grande généralité du modèle ne permet pas d'obtenir de relation tétraédrique. Pourtant ces exemples sont parmi les plus simples que l'on puisse regarder comme relations tétraédrique ; en effet ils se traduisent, du fait des nombreuses exclusions de configurations, par un ensemble d'égalité de deux termes et non pas, comme dans les autres exemples que nous avons donnés, par des égalités de somme de plus de deux termes. Nous percevons, là encore, les limites de cette approche.

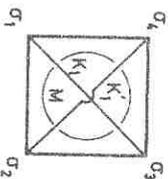
IV - NOUVELLES APPROCHES POUR LA RECHERCHE DE RELATIONS TRIANGLE  
OU TÉTRA ÈDRE

Nous avons rendu compte de la complexité et des difficultés que l'on rencontrerait rapidement dans la recherche de relations tétra èdre ou simplement de nouvelles relations triangle . Nous avons indiqué la nécessité de trouver de nouvelles approches et des idées nouvelles dans la recherche de ces relations, notamment la nécessité de trouver rapidement les "invariants" algébriques de ces modèles sans passer par le calcul classique trop fastidieux. Nous allons indiquer des directions que l'on peut explorer.

a) REFLEXION SUR LA SURDETERMINATION DES EQUATIONS TRIANGLE : UNE IDENTITE ALGEBRIQUE SIMPLE SOUS-JACENTE AU MODELE A 8 VERTEX SYMETRIQUE

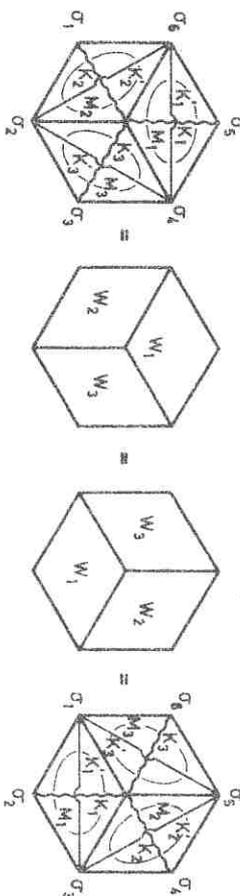
Le détail des équations trilineaires et quadrilineaires, notamment leur écriture explicite, nous a permis de constater (sauf dans quelques cas non génériques) la surdétermination de ces équations : il y a un trop grand nombre d'équations par rapport au nombre de variables. Ceci est particulièrement clair dans le cas des relations tétra èdres. Ainsi, pour que ces relations soient satisfaites, les équations doivent être particulières, par exemple correspondre à certaines identités non triviales.

Nous allons illustrer cette idée sur l'exemple du modèle à 8 vertex symétrique vu comme un modèle à spin :



$$W(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = e^{K_1 \sigma_1 \sigma_2 + K_2 \sigma_1 \sigma_3 + K_3 \sigma_1 \sigma_4 + K_4 \sigma_2 \sigma_3 + K_5 \sigma_2 \sigma_4 + K_6 \sigma_3 \sigma_4}$$

La relation triangle-étoile généralisée s'écrit :



qui conduit aux relations suivantes :

$$e^{2K_1 + 2K_2} = \frac{\text{ch}(K_1 + K_2 + K_3 + M_1 - M_2 - M_3 - M_4)}{\text{ch}(K_1 + K_2 - K_3 - M_1 + M_2 - M_3 - M_4)}$$

$$e^{2K_1 - 2K_2} = \frac{\text{ch}(K_1 - K_2 - K_3 + M_1 + M_2 - M_3 - M_4)}{\text{ch}(K_1 + K_2 - K_3 - M_1 + M_2 + M_3 - M_4)}$$

(i, j, k) étant n'importe quelle permutation de (1, 2, 3).

Puisque  $\sigma_1 \dots \sigma_6$  prennent chacun deux valeurs  $\pm 1$ , il devrait y avoir 64 équations.

Dependant ces équations sont inchangées en changeant  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  en leurs opposés (de même pour  $\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6$ ). Ces 64 équations se réduisent à 16 équations. En fait il y a d'autres symétries (invariance par l'échange de  $\sigma_1$  et  $\sigma_4$ ) qui réduisent le nombre des équations à 6. L'analyse de ces équations amène, pour avoir une solution non triviale, à faire  $M_1 = M_2 = M_3$  qui devient ainsi un des invariants. Néanmoins ces équations semblent contraignantes, et nous allons essayer de comprendre comment une solution peut exister : Considérons l'équation :

$$\sum_{g=\pm 1} e^{(K_0+K_1\lambda_1+K_2\lambda_2+K_3\lambda_1\lambda_2)g} = e^{K_0'+K_1'\lambda_1+K_2'\lambda_2+K_3'\lambda_1\lambda_2} \quad (1)$$

où  $\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1$

Appelons  $f(\lambda_1, \lambda_2) = K_0 + K_1\lambda_1 + K_2\lambda_2 + K_3\lambda_1\lambda_2$

$$f'(\lambda_1, \lambda_2) = K_0' + K_1'\lambda_1 + K_2'\lambda_2 + K_3'\lambda_1\lambda_2$$

et notons  $x_1 = f(+1, +1)$   $x_2 = f(+1, -1)$   $x_3 = f(-1, +1)$   $x_4 = f(-1, -1)$

et de même  $x'_i = f'(+1, +1)$  etc...

L'équation précédente s'écrit encore

$$\text{ch} \left[ f(\lambda_1, \lambda_2) \right] = e^{f'(\lambda_1, \lambda_2)} \quad \text{quels que soient } \lambda_1, \lambda_2 = \pm 1$$

La correspondance entre  $x_1, x_2, x_3, x_4$  et  $K_0, K_1, K_2, K_3$  est une bijection, de même celle entre  $x'_1 \dots x'_4$  et  $K'_0 \dots K'_3$ , quant au passage de  $x_i$  à  $x'_i$  c'est un simple changement de variable :  $e^1 = \text{ch } x_1$ ; la correspondance entre  $K_0, K_1, K_2, K_3$  et  $K'_0, K'_1, K'_2, K'_3$  est donc une bijection.

Cette relation est une généralisation de la relation triangle-étroite, bien connue sur le modèle d'Ising ; en effet si nous posons  $\lambda_1 = \sigma_1 \sigma_3$   $\lambda_2 = \sigma_3 \sigma_5$  ( $\lambda_1 \lambda_2 = \sigma_1 \sigma_5$ )

Nous obtenons à partir de l'équation précédente l'équation suivante (en posant  $g = \sigma \sigma_1 \sigma_3 \sigma_5$ ) :

$$\sum_{\sigma=\pm 1} e^{\sigma \cdot (K_0 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_5 + K_1 \sigma_5 + K_2 \sigma_1 + K_3 \sigma_3)} = e^{K_0' + K_1' \sigma_1 \sigma_3 + K_2' \sigma_1 \sigma_5 + K_3' \sigma_3 \sigma_5}$$

(La relation triangle pour le modèle d'Ising [1] correspond à  $K_0 = 0$ ). Si nous superposons tête-bêche telles relations (l'une pour  $(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5)$  l'autre pour  $(\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6)$ ) nous obtenons, en faisant le produit, l'égalité :

$$\sum_{\sigma} e^{K_1' \sigma_4 \sigma_6 + K_1 \sigma \sigma_5} \cdot e^{K_2' \sigma_2 \sigma_6 + K_2 \sigma \sigma_1} \cdot e^{K_3' \sigma_2 \sigma_4 + K_3 \sigma_3 \sigma_5} \cdot e^{K_0' \sigma \sigma_1 \sigma_3 \sigma_5} = \sum_{\sigma} e^{K_1 \sigma \sigma_2 + K_1' \sigma_1 \sigma_3} \cdot e^{K_2' \sigma_3 \sigma_5 + K_2 \sigma \sigma_4} \cdot e^{K_3 \sigma_6 + K_3' \sigma_1 \sigma_5} \cdot e^{K_0 \sigma \sigma_2 \sigma_4 \sigma_6}$$

Nous ne sommes pas très loin de la relation traduisant la relation triangle sur le modèle à 8 vertex symétrique ; il suffirait, à gauche de l'égalité, de remplacer  $e^{K_1 \sigma \sigma_2 + K_1' \sigma_1 \sigma_3}$  par  $e^{K_0 \sigma \sigma_2 \sigma_4 \sigma_6}$ , et à droite de l'égalité, de remplacer  $e^{K_0' \sigma \sigma_1 \sigma_3}$  par  $e^{M_0 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6}$ .

Or, lorsqu'on regarde la relation triangle sur le modèle à 8 vertex symétrique, on voit facilement que la configuration  $\sigma_1 \sigma_3 = \sigma_4 \sigma_6$  et  $\sigma_2 \sigma_4 = \sigma_1 \sigma_5$  et  $\sigma_2 \sigma_6 = \sigma_3 \sigma_5$  ne fournit aucune équation : les deux configurations sont manifestement égales. On peut donc écarter ce cas de figure en écrivant :

$$0 = (1 + \sigma_1 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_6) (1 + \sigma_1 \sigma_5 \sigma_2 \sigma_4) (1 + \sigma_3 \sigma_5 \sigma_2 \sigma_6) \\ \Leftrightarrow -1 = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_6 + \sigma_2 \sigma_6 \sigma_3 \sigma_5 + \sigma_1 \sigma_5 \sigma_2 \sigma_4$$

On peut donc remplacer :

$$- \sigma\sigma_1^3 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_6 + \sigma\sigma_1^2 \sigma_4 \sigma_6 + \sigma\sigma_1 \sigma_2 \sigma_6 + \sigma\sigma_1 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_6$$

$$\text{et } - \sigma\sigma_2^2 \sigma_4 \sigma_6 \text{ par } \sigma\sigma_1^2 \sigma_3^2 \sigma_4 \sigma_6 + \sigma\sigma_1 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_6 + \sigma\sigma_1 \sigma_5 \sigma_6$$

Ainsi en faisant  $M = -K_0$  la relation triangle sur le modèle à 8 vertex se ramène complètement à l'équation (1).

Du fait de cette identification, on ne s'étonnera pas qu'une uniformisation elliptique apparaisse sur une relation aussi simple que l'équation (1) :

$$\begin{aligned} \text{ch } 2K_1' &= ik^{-1} \cdot \text{dn}(i\alpha_j) \\ \text{sh } 2K_1' &= i/k \text{ sn}(i\alpha_j) \\ \text{ch } 2K_j &= ik^{-1} \text{ dn}(i\beta_j) \\ \text{sh } 2K_j &= i/k \text{ sn}(i\beta_j) \\ \text{coth } 2M &= -\text{dn}(i\lambda) \\ \text{sh } 2M &= -i/k \text{ sn}(i\lambda) \\ \alpha_j + \beta_j &= \lambda \end{aligned}$$

Cette uniformisation elliptique, remarquons le, apparaissait déjà dans l'appendice du célèbre article de L. Onsager [24] ce qui ne doit pas nous surprendre, le cas du modèle d'Ising correspondant à un cas particulier du modèle précédent ( $K_0 = M = 0$ ).

Au passage, pour clarifier le rôle que jouent les courbes elliptiques dans ces problèmes, signalons que ces fonctions ne doivent pas être confondues avec les fonctions elliptiques qui interviennent de façon manifeste par exemple dans l'expression de la fonction de partition du modèle de Forts sur réseau carré à la température critique :

$$Z = \sqrt{-qq_+} \frac{A(x) A\left(\frac{-q_+}{x}\right)}{A\left(-q_+ x\right) A\left(\frac{q_+}{x}\right)}$$

$$\text{avec } A(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1+q_+^{2n-1} \cdot x)}{(1-q_+^{2n} \cdot x)} \quad \text{avec } q_+ = 1 - \frac{q}{2} \pm \sqrt{q(q-4)}$$

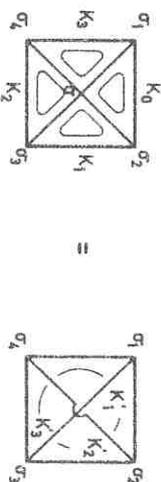
La période, qui intervient dans de telles expressions, est reliée au groupe, engendré par l'inverse et la symétrie, vu comme un groupe de translation [2]. Par exemple, dans le cas du modèle à 8 vertex symétrique, la fonction de partition apparaît comme un objet triplement automorphe ; pour reprendre les notations de R.J. Baxter [35] III, III sont les deux périodes des fonctions elliptiques dont nous parlons (et sont également bien sûr des périodes de la fonction de partition), et  $\lambda$  est la pseudo-période reliée à la propriété d'automorphie de Z par le groupe précédent.

L'équation (1), avec ou sans uniformisation elliptique, peut être utilisée de bien d'autres façons : on peut par exemple la réécrire :

$$\sum_{\sigma=\pm 1} K_0 \cdot \sigma\sigma_1 \sigma_2 + K_1 \cdot \sigma\sigma_2 \sigma_3 + K_2 \cdot \sigma\sigma_1 \sigma_4 + K_3 \cdot \sigma\sigma_3 \sigma_4$$

$$= e^{K_0' + K_1' \cdot \sigma_1 \sigma_2 + K_2' \cdot \sigma_2 \sigma_3 + K_3' \cdot \sigma_1 \sigma_3 \sigma_4}$$

(il suffit dans l'équation (1) d'effectuer les changements  $\lambda_1 = \sigma_1 \sigma_3$ ,  $\lambda_2 = \sigma_2 \sigma_4$ ,  $g = \sigma\sigma_1 \sigma_2$ ). Cette relation peut être symbolisée par les figures :

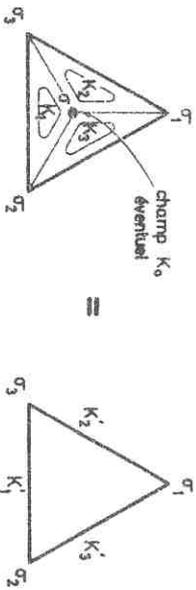


On reconnaît, dans l'expression de droite, le modèle à 8 vertex symétrique exprimé en terme de modèle à spin. Cette équivalence nous assure donc que le modèle à trois spins, correspondant à la première des figures, est un problème complètement intégrable. Une autre interprétation de l'équation (1) est la suivante :  $\lambda_1 = \sigma_3 \sigma_2$ ,  $\lambda_2 = \sigma_1 \sigma_3$

$$\sum_{0 \leq i \leq 1} e^{(K_0 + K_1 \sigma_2 \sigma_3 + K_2 \sigma_1 \sigma_3 + K_3 \sigma_1 \sigma_2) \cdot 0}$$

$$= e^{K_0' + K_1' \sigma_2 \sigma_3 + K_2' \sigma_1 \sigma_3 + K_3' \sigma_1 \sigma_2}$$

que nous pouvons symboliser par les figures :



Ce modèle à trois spins (avec un champ éventuel sur un sous-ensemble des spins) est donc équivalent à un modèle d'Ising anisotrope sur réseau triangulaire, donc à un modèle de fermion libre [36].

Revenons à la relation triangle sur le modèle à 8 vertex symétrique. Nous voyons donc, qu'en dernière analyse, la relation triangle sur le modèle à 8 vertex symétrique provient en fait d'une identité algébrique très simple, liée au groupe  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  ; il est tentant de généraliser ces idées au groupe  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  en utilisant l'identité :

$$\sum_g 8^{(K_0 + K_1 \cdot \lambda_1 + K_2 \cdot \lambda_2 + K_3 \cdot \lambda_3 + K_{12} \cdot \lambda_1 \lambda_2 + K_{23} \cdot \lambda_2 \lambda_3 + K_{13} \cdot \lambda_1 \lambda_3 + K_4 \cdot \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)}$$

$$= e^{K_0' + K_1' \cdot \lambda_1 + K_2' \cdot \lambda_2 + K_3' \cdot \lambda_3 + K_{12}' \cdot \lambda_1 \lambda_2 + K_{23}' \cdot \lambda_2 \lambda_3 + K_{13}' \cdot \lambda_1 \lambda_3 + K_4' \cdot \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$$

avec  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \pm 1$ .

Cette relation pourrait être à l'origine d'une relation tétraèdre : la démarche est alors en quelque sorte inverse :

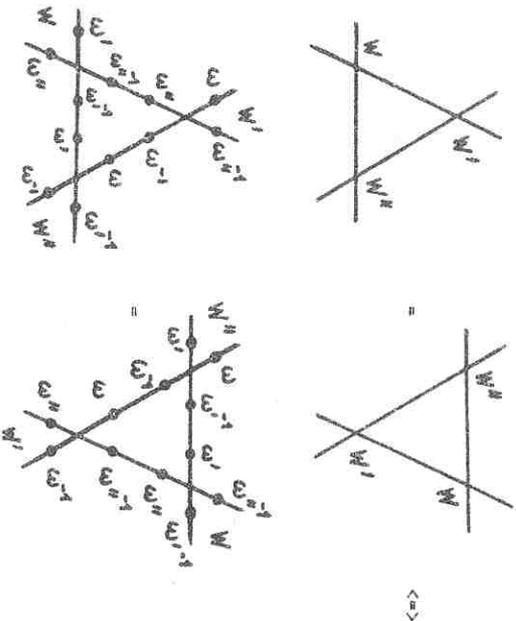
on part d'une identité qui "marche" et l'on essaye de trouver la relation tétra èdre à laquelle elle peut correspondre en jouant sur les interprétations des  $\lambda_i : \lambda_i = \sigma_i \sigma_j, \lambda_i = \sigma_i \sigma_j \sigma_k, \lambda_i = \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l$  etc...

b) LES RELATIONS TRIANGLE ET L'INVARIANCE PAR LES CONJUGAISONS (WEAK-GRAPH DUALITY)

L'approche que nous venons de discuter, et qui s'appliquait aux modèles à spins, consisterait, nous l'avons dit, à partir d'une identité que l'on sait être satisfaisante et à essayer de l'interpréter comme une relation triangle ou tétra èdre. Un autre exemple traduisant ce type de point de vue, mais dans le cadre des modèles à vertex maintenant, nous est fourni par A. Belavin [21] : il part en quelque sorte de la solution, en supposant a priori une uniformisation à l'aide de fonctions  $\Theta$  (d'une variable fonction de Jacobi, ou de plusieurs variables [20]) et construit à partir de là, la relation triangle. L'idée repose sur le rôle central qui est joué par les transformations du type "weak-graph duality" (conjugaisons sur  $L_n$ ) : si l'on considère la matrice  $S$  à deux corps  $S_{ijkl}$ , ou encore le poids de Boltzmann associé à un vertex  $W(i,j,k,l)$ ,  $i, j, k, l$  appartenant pour fixer les idées à  $\mathbb{Z}_p$  ; il est clair que les transformations du type :

$$S_{ijkl} \longrightarrow \sum_{i', j', k', l'} \omega(i, i') \cdot \omega^{-1}(k', k) \omega'(j, j') \omega^{-1}(l', l) S_{i', j', k', l'}$$

ne modifient pas les fonctions de partition (ou les matrices S) de ces modèles ; en effet les matrices  $\omega$  et  $\omega^{-1}$  (resp  $\omega'$  et  $\omega'^{-1}$ ) se détruisent mutuellement sur le réseau. Toutes les symétries connues de la fonction de partition du modèle à 8 vertex symétrique, par exemple, sont de ce type ( $W_1 + C_1 \cdot W_1$ ,  $E_1 = \pm 1$ , permutations des  $W_i$ , au total un groupe de symétrie de  $2^4 \cdot 4!$  éléments sans compter la dualité haute-basse température). Cependant ces relations jouent, en l'occurrence un rôle fondamental parce qu'elles laissent stable la relation triangle :



L'ensemble des équations provenant de la relation triangle doit donc être stable par ces symétries de conjugaison ; aussi pour exploiter cette stabilité, l'idée de Belavin consiste-t-elle à demander que quatre de ces conjugués aient une représentation analytique sur les matrices S à deux corps (matrices  $L_n$ ) : elles vont toutes les deux se représenter comme les deux translations du paramètre spectral par les deux périodes des fonctions elliptiques (et ce à un facteur près, puisque les équations triangles sont homogènes) :

$$S(u+1) = (g^{(1)})^{-1} \cdot S(u) g^{(1)} = g^{(2)} \cdot S(u) (g^{(2)})^{-1}$$

$$S(u+\tau) = \lambda(h^{(1)})^{-1} \cdot S(u) h^{(1)} = \lambda h^{(2)} \cdot S(u) \cdot (h^{(2)})^{-1}$$

(Ce sont les équations (24) de l'article de Belavin [21]).

A. Belavin effectue alors une démonstration ([21] appendice) où il montre comment ces hypothèses sur la seule matrice S à deux corps (ou sur le seul vertex élémentaire), implique automatiquement la relation triangle. Il retrouve ainsi l'exemple, cité précédemment (II.b), s'uniformisant à l'aide de fonctions  $\Theta$  de plusieurs variables, mais il trouve également des modèles s'uniformisant à l'aide de fonctions  $\Theta$  d'une seule variable, plus compliquées que les fonctions  $\Theta$  de Jacobi :

$$\Theta(u) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(\frac{\alpha_2}{N}m + \frac{\alpha_1}{N}m^2) \tau + 2\pi i(\frac{\alpha_2}{N}m + \frac{\alpha_1}{N}m^2)(u + \frac{\alpha_1}{N})}$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  valent 0, 1, ... N-1.

Ce type de fonctions  $\Theta$  intervient dans d'autres problèmes par exemple dans le modèle d'hexagone dur ( $\alpha_2 = 0$ ,  $N = 5$ ) (voir appendice I communication privée de M. Gaudin).

On peut parfaitement envisager d'étendre l'approche de Belavin en dimension trois (ou plus), les conjugués selon les trois directions du vertex se voyant représenter par trois translations (périodes ou pseudo-périodes) sur une ou plusieurs variables spectrales. Cependant le type de fonctions devant uniformiser le problème est loin d'être évident a priori.

c) LE CRITERE  $\lambda e' \otimes F' = L \cdot e \otimes F$

1) Introduction du critère

Aussi allons-nous étudier une troisième voie que nous considérons comme peut-être la plus prometteuse : pour la clarté de l'exposition nous

allons développer ces idées sur l'exemple très simple du modèle à 8 vertex symétrique dont nous rappelons la matrice 4x4 :

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Considérons le problème suivant : déterminer les vecteurs  $e, f, e', f'$  tel que l'on aie la propriété suivante :

$$L [e \otimes f] = \lambda \cdot e' \otimes f'$$

Ecrivons  $e$  sous la forme  $\begin{pmatrix} 1 \\ r \\ p \\ pr \end{pmatrix}$  et  $e'$  sous la forme  $\begin{pmatrix} 1 \\ r' \\ p' \\ p'r' \end{pmatrix}$  et  $f = \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ p \\ pr \end{pmatrix}$  et  $f' = \begin{pmatrix} 1 \\ r' \\ p' \\ p'r' \end{pmatrix}$ .

La propriété s'écrit encore :

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ p \\ pr \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ r' \\ p' \\ p'r' \end{bmatrix}$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ pe \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} e' \\ p'e' \end{bmatrix}$$

avec  $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$   $B = \begin{bmatrix} 0 & d \\ c & 0 \end{bmatrix}$   $C = \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix}$   $D = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

On peut éliminer  $e'$  ce qui revient alors à dire qu'il existe  $e$  tel que

$$[C + pD - p'(A+PB)] e = 0 \Leftrightarrow$$

$$\det \begin{bmatrix} C + pD - p'(A+PB) \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -p'a+pb & c-pp'D \\ -pp'c+d & pa-p'b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (p^2 p'^2 + 1) cd - (p^2 + p'^2) ab + pp'(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) = 0$$

On constate qu'on retrouve ainsi de très simple façon, les invariants du modèle à 8 vertex symétrique  $\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab}$  et  $\frac{cd}{ab}$ .

Ces invariants étant donnés, il est connu que des transformations telles que la précédente, liant  $p$  à  $p'$ , s'uniformisent grâce à des fonctions elliptiques : si  $p = k^{1/2} \cdot \operatorname{sn} u$  alors  $p' = k^{1/2} \cdot \operatorname{sn}(u \pm 2\eta)$

(où  $k$  et  $\eta$  ont les mêmes définitions que précédemment).

Considérons l'exemple encore plus simple du modèle à 6 vertex ( $d = 0$ ) : on trouve alors l'équation :

$$(p^2 + p'^2) ab - pp'(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

mais également l'équation  $pr = p'r'$ .

Si nous posons  $p' = -p \cdot t$ , la première relation revient à définir un nouvel invariant pour le modèle :

$$a^2 + b^2 - c^2 + ab\left(t + \frac{1}{t}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + tb) \left(a + \frac{b}{t}\right) = c^2$$

Nous voyons que nous pouvons encore poser du fait de l'équation précédente

$$\begin{cases} a + \frac{b}{t} = c/x \\ a + tb = cx \end{cases} \text{ ce qui revient à dire}$$

que  $r = -p/t/x$ ,  $r' = p/x = -p'/xt$ , ainsi que  $\lambda = a$ .

En effet, on a alors :

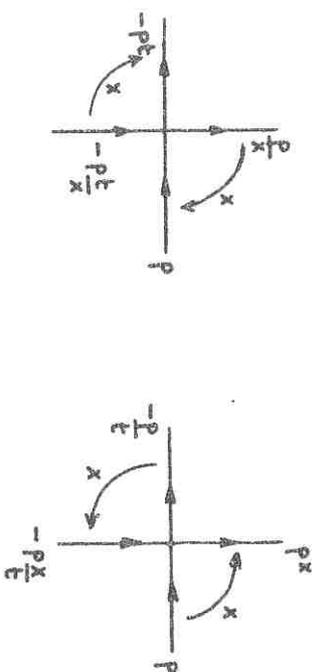
$$a \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ p/x & & & & & \\ -pt & & & & & \\ -p^2 t/x & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -pt/x \\ p \\ -p^2 t/x \end{pmatrix}$$

On pouvait également envisager de poser  $p' = -p/t$ , auquel cas on aurait

eu :

$$a \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ px & & & & & \\ -p/t & & & & & \\ -p^2 x/t & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -px/t \\ p \\ -p^2 x/t \end{pmatrix}$$

Nous convenons pour la suite de symboliser ces égalités par :



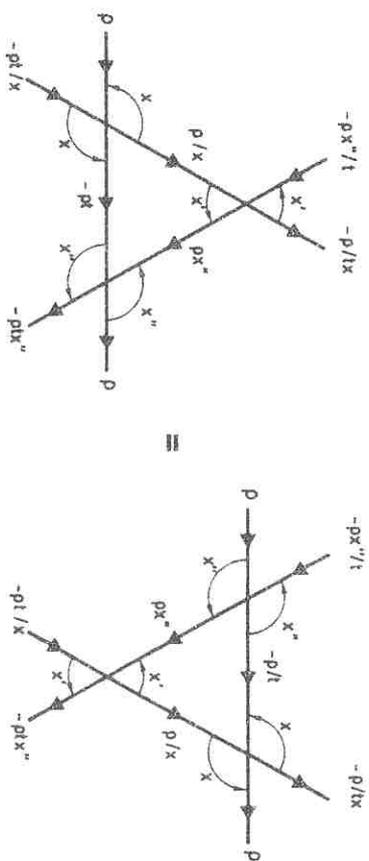
pour la deuxième convention.

Nous retrouvons donc très naturellement l'uniformisation rationnelle qu'introduisaient par exemple Sklyanin, Takhtajan et Faddeev lorsqu'ils écrivaient [26] :

$$\begin{cases} \mu = \lambda b & + e^{-i\gamma} \cdot \mu c \\ \frac{1}{\mu} = b/\lambda + e^{i\gamma} \cdot c/\mu \end{cases}$$

(si l'on considère, au lieu de la variable  $x$ , la variable  $\theta$  telle que  $e^{i\theta} = x$ , on réobtient l'uniformisation bien connue à l'aide des sinus ou des sinus hyperboliques [37]).

Nous allons voir qu'on peut à partir de cette propriété sur la seule matrice à deux corps (resp. le seul poids de Boltzmann du vertex), obtenir la relation triangle dans le cas du modèle à 6 vertex symétrique : en effet, à partir de cette propriété, on peut écrire l'égalité entre les figures suivantes :



sous réserve que  $xx'' = x'$

Avec ces conventions nécessaires pour écrire des produits matriciels, mais qui dissymétrisent les rôles joués par  $W$ ,  $W'$  et  $W''$ , les équations tri-linéaires s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} ac'c'' + cb'b'' = ca'a'' \\ ac'b'' + cb'c'' = bc'a'' \\ ab'c'' + cc'b'' = ba'c'' \end{bmatrix}$$

avec le changement de variable précédent

$$\begin{cases} \frac{c}{x} = a + \frac{b}{t} \\ cx = bt + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} = -\frac{1}{t} \frac{(1-x^2)}{x^2} = (-t) \frac{(1-x^2)}{(t^2-x^2)} \\ 1 - \frac{x}{t^2} \\ \frac{c}{a} = \frac{x(1-1/t^2)}{1-x^2/t^2} = \frac{x(t^2-1)}{(t^2-x^2)} \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que les trois équations précédentes donnent effectivement  $xx' = x''$ . Nous voyons, sur cet exemple, la simplicité d'utilisation de ce critère qui induit (mais n'implique pas stricto sensu, nous reviendrons sur ce point) la relation triangle. Ce qui apparaît également clairement est la rapidité avec laquelle, utilisant ce critère on peut obtenir les invariants algébriques d'un modèle. Illustrons cette affirmation sur le modèle à 8 vertex le plus général et sur le modèle à 16 vertex :

Dans le cas plus simple du modèle à huit vertex quelconque

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & \omega_7 \\ 0 & \omega_4 & \omega_5 & 0 \\ 0 & \omega_5 & \omega_3 & 0 \\ \omega_7 & 0 & 0 & \omega_2 \end{pmatrix}$$

ce même critère conduit à l'équation :

$$\begin{vmatrix} p\omega_3 - p^1\omega_1 & \omega_5 & -pp^1\omega_7 \\ \omega_7 & -pp^1\omega_5 & p\omega_2 - p^1\omega_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = -p^2 p^1 \omega_3^2 \omega_5 \omega_7 + pp^1 (\omega_5^2 + \omega_7^2 - \omega_1 \omega_2 - \omega_3 \omega_4) + p^2 \omega_2 \omega_3 + p^1 \omega_1 \omega_4 - \omega_5 \omega_7$$

Cette équation nous fournit la généralisation des invariants

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab} \text{ et } \frac{cd}{ab} \text{ en l'occurrence, } \frac{\omega_3^2 - \omega_7^2 - \omega_1 \omega_2 - \omega_3 \omega_4}{\omega_1 \omega_4 + \omega_2 \omega_3}, \frac{\omega_5 \omega_7}{\omega_1 \omega_4} \text{ et } \frac{\omega_1 \omega_4}{\omega_2 \omega_3}$$

Nous avons donc un invariant de plus :  $\frac{\omega_1 \omega_4}{\omega_2 \omega_3}$ . Deux remarques s'imposent : on retrouve dans le cas du modèle à 6 vertex asymétrique (auquel est associée une famille de matrice de transfert qui commentent, dépendant de deux paramètres [37] ( $\omega_7 = 0, \omega_1 = \omega_2$ )) les deux invariants connus pour ce modèle à savoir :

$$\frac{\omega_5^2 - \omega_1 \omega_2 - \omega_3 \omega_4}{\omega_1 \omega_4 + \omega_2 \omega_3} \text{ et } \frac{\omega_1 \omega_4}{\omega_2 \omega_3}$$

Nous voyons d'autre part qu'en effectuant la transformation simple

$$p \rightarrow \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_4}{\omega_2 \omega_3}}, \quad p \text{ l'équation précédente se ramène à la forme}$$

$\alpha + \beta(p^2 + p^{-2}) + \gamma pp' + \alpha p^2 p'^2 = 0$  qui, nous le savons, appelle une uniformisation elliptique ; nous en venons à la conclusion que l'on peut introduire une uniformisation elliptique sur le modèle à 8 vertex non symétrique.

Appliquons maintenant ce critère ( $\lambda e' \otimes f' = Le \otimes f$ ) à un modèle déjà compliqué, le modèle à 16 vertex. Tout comme Gnaif et Hijmans [38], nous utilisons l'invariance par les conjugaisons (weak-graph duality) pour ramener la matrice  $4 \times 4$  à la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_{14} & \omega_{10} & \omega_7 \\ \omega_{13} & \omega_4 & \omega_5 & \omega_{10} \\ \omega_9 & \omega_5 & \omega_3 & \omega_{14} \\ \omega_7 & \omega_9 & \omega_{13} & \omega_2 \end{pmatrix}$$

Le critère précédent conduit à l'équation :

$$\det [C + pD - p'(A+pB)] = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \omega_9 + p\omega_3 - p^2\omega_1 - pp^2\omega_{10} & \omega_5 + p\omega_{14} - p^2\omega_{14} - pp^2\omega_7 \\ \omega_7 + p\omega_{13} - p^2\omega_{13} - pp^2\omega_5 & \omega_9 + p\omega_2 - p^2\omega_4 - pp^2\omega_{10} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (\omega_9^2 - \omega_5\omega_7) + p(\omega_2\omega_9 - \omega_7\omega_{14} + \omega_3\omega_9 - \omega_5\omega_{13}) \\ & + p^2(\omega_7\omega_{14} + \omega_5\omega_{13} - \omega_4\omega_9 - \omega_1\omega_9) \\ & + pp^2(\omega_7^2 + 2\omega_{13}\omega_{14} + \omega_5^2 - \omega_3\omega_4 - 2\omega_9\omega_{10} - \omega_1\omega_2) \\ & + p^2(\omega_3\omega_2 - \omega_{13}\omega_{14}) \\ & + p^2(\omega_1\omega_4 - \omega_{13}\omega_{14}) \\ & + pp^2(\omega_4\omega_{10} + \omega_1\omega_{10}) \\ & - p^2p^2(\omega_3\omega_{10} + \omega_2\omega_{10}) \\ & + p^2p^2(\omega_{10}^2 - \omega_5\omega_7) = 0 \end{aligned}$$

Les quotients des coefficients des divers monômes  $p^2$ ,  $p'^2$ ,  $pp'^2$  etc... fournissent des invariants algébriques du modèle (en supposant que le modèle est susceptible de supporter une relation triangle bien sûr).

2) Lien avec l'algèbre de Zamolodchikov

Comparons cette propriété de la matrice L qui consiste à transformer un projecteur  $(e, \tilde{x}, f)$  en un autre projecteur  $(e', \tilde{y}, f')$  avec la notion d'algèbre de Zamolodchikov. A.B. Zamolodchikov et A.B. Zamolodchikov ont introduit [18] cette notion parce qu'elle assure automatiquement la réalisation de la relation triangle : en effet considérons la relation :

$$A_1(\theta_m) A_j(\theta_n) = S_{ijkl}(\theta_m, \theta_n) \cdot A_k(\theta_n) \cdot A_l(\theta_m) \quad (2)$$

où les  $A_i$  appartiennent à une certaine algèbre et dépendent d'un paramètre (nous n'écrivons pas les sommations : on doit sommer sur tout indice répété). Si l'on considère le produit  $A_x(\theta_1)$ ,  $A_y(\theta_2)$ ,  $A_z(\theta_3)$ , il y a deux façons de le développer : soit en écrivant

$$\begin{aligned} A_x(\theta_1) A_y(\theta_2) A_z(\theta_3) &= S_{xy}^{ab}(\theta_1, \theta_2) A_a(\theta_2) A_b(\theta_1) A_z(\theta_3) \\ &= S_{xy}^{ab}(\theta_1, \theta_2) S_{bz}^{cV}(\theta_1, \theta_3) A_a(\theta_2) A_c(\theta_3) A_y(\theta_1) \\ &= S_{xy}^{ab}(\theta_1, \theta_2) S_{bz}^{cV}(\theta_1, \theta_3) S_{ac}^{tu}(\theta_2, \theta_3) A_t(\theta_3) A_u(\theta_2) A_v(\theta_1) \\ &= S_{xy}^{ab}(\theta_1, \theta_2) S_{bz}^{cV}(\theta_1, \theta_3) S_{ac}^{tu}(\theta_2, \theta_3) A_t(\theta_3) A_u(\theta_2) A_v(\theta_1) \end{aligned}$$

soit en écrivant

$$A_x(\theta_1) A_y(\theta_2) A_z(\theta_3) = S_{yz}^{ab}(\theta_2, \theta_3) A_x(\theta_1) A_a(\theta_3) A_b(\theta_2)$$

et en continuant de manière analogue. Ceci conduit à l'équation :

$$\begin{aligned} S_{xy}^{ab}(\theta_1, \theta_2) S_{bz}^{cV}(\theta_2, \theta_3) S_{ac}^{tu}(\theta_2, \theta_3) A_t(\theta_3) A_u(\theta_2) A_v(\theta_1) \\ = S_{yz}^{ab}(\theta_2, \theta_3) S_{xa}^{lc}(\theta_1, \theta_3) S_{cb}^{uv}(\theta_1, \theta_2) A_t(\theta_3) A_u(\theta_2) A_v(\theta_1) \end{aligned}$$

qui assure l'existence de la relation triangle suivante (factorisation de la matrice S) :

$$S_{xy}^{ab}(\theta_1, \theta_2) S_{bz}^{cV}(\theta_2, \theta_3) S_{ac}^{tu}(\theta_2, \theta_3) = S_{yz}^{ab}(\theta_2, \theta_3) S_{xa}^{lc}(\theta_1, \theta_3) S_{cb}^{uv}(\theta_1, \theta_2)$$

En fait, pour être rigoureux, il faut s'assurer que les différents  $A_c(\theta_2)$ ,  $A_u(\theta_2)$ ,  $A_v(\theta_1)$  forment un ensemble de vecteurs indépendants, ce qui est assez difficile en général.

Remarquons qu'une difficulté analogue existe pour démontrer la relation triangle à partir du critère précédent ( $ae' \otimes f' = Le \otimes f$ ). En effet ce que nous démontrons c'est que deux matrices donnent le même résultat lorsqu'elles agissent sur le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ -px'' \\ t \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -pt \\ x \end{pmatrix}$  et ce quel que soit p

(x, t, x" sont fixés). Ceci n'implique pas, a priori, l'égalité de ces matrices (matrices S à trois corps). Cependant ce vecteur possède huit composantes dont trois sont proportionnelles à p, trois à p<sup>2</sup>, une à p<sup>3</sup>, une constante en p. Cette notion d'homogénéité en p permet de voir facilement quelles sont les relations existant entre ces deux matrices.

De plus on peut trouver d'autres configurations analogues à celles de la figure précédente : le problème est ici de savoir si la réunion de toutes ces contraintes implique effectivement l'identité de ces deux matrices.

Nous allons voir, sur l'exemple du modèle à 8 vertex symétrique, qu'en fait le critère que nous avons introduit s'identifie avec une représentation fonctionnelle de l'algèbre de Zamolodchikov : en effet on peut voir que si l'on représente A<sub>1</sub>(0<sub>1</sub>) comme l'opérateur

$$A_1(0_1) f(z) = f_1(z-0_1) f(z-\eta)$$

$$\text{ou } i = 1, 2, \quad f_1(z) = 0_1(2z, q^2), \quad f_2(z) = 0_4(2z, q^2)$$

q = e<sup>iπt</sup>, on peut vérifier que la relation sur l'algèbre de Zamolodchikov revient à la relation

$$f_1(z-0_1) f_j(z-0_2-\eta) = S_{ij}^{kl} f_k(z-0_2) f_l(z-0_1-\eta) \quad (3)$$

Or si l'on impose que S<sub>ij</sub><sup>kl</sup>(v) est égal à  $\frac{F_{j+1}(v) \cdot F_{i+1}(v)}{F_2(0) \cdot F_{i+j}(v+\eta)}$  (j+1, i+1, i+j doivent être regardés modulo 2) si i + k = j + l, S<sub>ij</sub><sup>kl</sup> est nul sinon, la relation est une identité vérifiée par les fonctions θ de Jacobi. Il est alors facile de voir que l'identité précédente revient à écrire λe<sup>i</sup> ⊗ f<sup>i</sup> = L.e ⊗ f où L s'identifie à S<sub>ij</sub><sup>kl</sup> vu comme une matrice 4x4

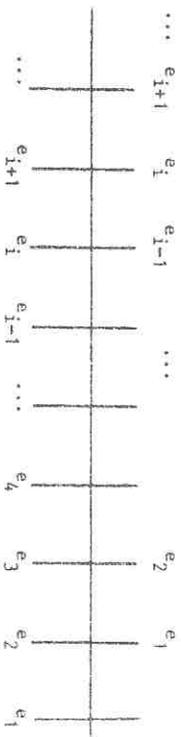
$$\text{et } e = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \theta_1 & & & \\ \theta_4 & & & \\ & & & (z-0_2) \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \theta_1 & & & \\ \theta_4 & & & \\ & & & (z-0_1-\eta) \end{pmatrix}$$

$$e' = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \theta_1 & & & \\ \theta_4 & & & \\ & & & (z-0_1) \end{pmatrix}, \quad f' = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \theta_1 & & & \\ \theta_4 & & & \\ & & & (z-0_2-\eta) \end{pmatrix}$$

Comme  $\frac{\theta_1}{\theta_4}(u) = k^{1/2} \operatorname{sn}(u)$  nous avons dans le cadre de cette uniformisation elliptique complètement identifié ces deux critères. Cependant l'algèbre de Zamolodchikov est une notion abstraite qui ne devient vraiment utile que lorsqu'on a pu lui associer une représentation analytique précise : or "deviner" une relation telle que (3) est au moins aussi difficile que de vérifier la relation triangulaire pour le modèle à 8 vertex symétrique par la méthode classique qui fait intervenir certaines identités sur les fonctions elliptiques (relations quadratiques de Riemann). Le critère que nous avons mis en avant présente l'avantage de permettre de conduire tous les calculs même si l'on a pas vu l'uniformisation elliptique (ou tout autre) sous jacent.

3) Les liens avec l'ansatz de Bethe et l'existence d'un pseudo-vide

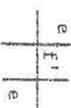
Nous allons maintenant voir qu'il existe des liens étroits entre le critère λe<sup>i</sup> ⊗ f<sup>i</sup> = L.e ⊗ f et la construction des vecteurs propres de l'ansatz de Bethe. Cette construction repose [37] sur l'existence d'un vecteur, le pseudo-vide, qui est un pur produit tensoriel, et qui est tel qu'il se transforme par l'action de la matrice de transfert en lui-même, traduité d'un pas du réseau :



Une condition suffisante pour obtenir ce pseudo-vide est que, dans le cadre de la propriété précédente, on puisse avoir le même vecteur sur les deux branches notées par un trait plus fort :



En fait les expressions exactes de e<sup>i</sup>, f, e'', f'' sont secondaires, ce qui importe étant la cohérence que nous symbolisons par :





En posant  $\Omega = \omega_4 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_1$

terme en  $q^1$  :

$$\omega_{13} \Omega - 2 \omega_5 \omega_9 + 2 \omega_7 \omega_{10} = 0 \tag{1}$$

terme en  $p$  :

$$\omega_9 \Omega - 2 \omega_5 \omega_{13} + 2 \omega_7 \omega_{14} = 0 \tag{2}$$

terme en  $p^2 q^1$  :

$$\omega_{14} \Omega - 2 \omega_5 \omega_{10} + 2 \omega_7 \omega_9 = 0 \tag{3}$$

terme en  $p q^1$  :

$$\omega_{10} \Omega - 2 \omega_5 \omega_{14} + 2 \omega_7 \omega_{13} = 0 \tag{4}$$

terme en  $p^2$  et  $q^1$  :

$$(\omega_1 - \omega_2) \cdot \omega_5 = 0 \tag{5}$$

terme constant :

$$(\omega_4 - \omega_3) \cdot \omega_7 = 0 \tag{6}$$

(Le terme en  $p q^1$  ne conduit à aucune équation).

Étudions tout d'abord les quatre premières équations.

1) Si  $\Omega$  est nul, les quatre premières équations se ramènent à

$$\begin{aligned} \omega_5 \omega_9 &= \omega_7 \omega_{10}, & \omega_5 \omega_{13} &= \omega_7 \omega_{14} \\ \omega_5 \omega_{10} &= \omega_7 \omega_9, & \omega_5 \omega_{14} &= \omega_7 \omega_{13} \end{aligned}$$

a) Si  $\omega_5, \omega_7$  sont tous deux non nuls, ces équations se ramènent à

$$\omega_5 = \omega_7, \omega_9 = \omega_{10}, \omega_{13} = \omega_{14}$$

b) Si  $\omega_5 = 0$  et  $\omega_7 = 0$ , les équations sont satisfaites.

c) Si  $\omega_5 = 0, \omega_7 \neq 0$ , alors  $\omega_9 = \omega_{10} = \omega_{13} = \omega_{14} = 0$

d) Si  $\omega_7 = 0, \omega_5 \neq 0$ , alors  $\omega_9 = \omega_{10} = \omega_{13} = \omega_{14} = 0$

2) Si  $\Omega$  est non nul

a) Supposons  $\omega_{10}$  et  $\omega_{14} \neq 0$

alors de (2) et (4) nous tirons

$$\frac{\omega_9}{\omega_{10}} = \frac{\omega_{13} - \omega_7}{\omega_{14} - \omega_5} = \frac{1 - \frac{\omega_7 \omega_{13}}{\omega_5 \omega_{14}}}{1 - \frac{\omega_5 \omega_{14}}{\omega_7 \omega_{13}}} \tag{7}$$

et de (1) et (3) nous tirons

$$\frac{\omega_{13}}{\omega_{14}} = \frac{\omega_9 - \omega_7}{\omega_{10} - \omega_5} \Rightarrow \frac{\omega_9}{\omega_{10}} = \frac{\omega_{13} + \frac{\omega_7}{\omega_5}}{1 + \frac{\omega_7 \omega_{13}}{\omega_5 \omega_{14}}} \tag{8}$$

De (7) et (8) nous tirons que soit

$$\frac{\omega_7}{\omega_5} = 0, \text{ soit } \frac{\omega_{13}}{\omega_{14}} = \epsilon = \pm 1 = \frac{\omega_9}{\omega_{10}}$$

$$\text{Si } \omega_7 = 0 \text{ (7) ou (8) } \Rightarrow \frac{\omega_9}{\omega_{10}} = \frac{\omega_{13}}{\omega_{14}}$$

$$(3) \text{ et } (4) \Rightarrow \frac{\omega_{14}}{\omega_{10}} = \epsilon^1 = \pm 1$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \omega_{13} = \omega_9 = 0 \text{ ou } \frac{\omega_{13}}{\omega_9} = \epsilon^1 = \pm 1$$

$$\text{Si } \omega_9 \text{ et } \omega_{13} \neq 0 \quad \frac{\omega_{13}}{\omega_{14}} \frac{\omega_{10}}{\omega_9} = 1 = \epsilon^1 \epsilon^1$$

$$(1) \text{ ou } (2) \text{ ou } (3) \text{ ou } (4) \Rightarrow \Omega - 2 \epsilon^1 \omega_5 = 0$$

$$\text{Si } \omega_9 = \omega_{13} = 0 \quad (3) \text{ ou } (4) \Rightarrow \Omega - 2 \epsilon^1 \omega_5 = 0$$

$$\text{Si } \frac{\omega_{13}}{\omega_{14}} = \frac{\omega_9}{\omega_{10}} = \epsilon \quad (1) \text{ et } (3) \Rightarrow \frac{\omega_{13}}{\omega_9} \Omega = 2(\omega_5 - \epsilon \omega_7)$$

$$(2) \text{ et } (4) \Rightarrow \frac{\omega_9}{\omega_{13}} \Omega = 2(\omega_5 - \epsilon \omega_7)$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_{13}}{\omega_9} = \epsilon^1 = \pm 1$$

$$(1) \text{ ou } (2) \text{ ou } (3) \text{ ou } (4) \Rightarrow \Omega - 2 \epsilon^1 \omega_5 + 2 \epsilon \epsilon^1 \omega_7 = 0$$

$$b) \text{ Supposons que } \omega_{10} = \omega_{14} = 0$$

$$(3) \text{ et } (4) \Rightarrow \omega_7 \omega_9 = 0 = \omega_7 \omega_{13}$$

Soit  $\omega_7 = 0$  (1) et (2) se réduisent à

$$\omega_{13} \Omega = 2\omega_5 \omega_9 \text{ et } \omega_9 \Omega = 2\omega_5 \omega_{13}$$

$$\text{si } \omega_9 = 0 \Rightarrow \omega_{13} = 0$$

$$\text{si } \omega_9 \neq 0 \Rightarrow \frac{\omega_9}{\omega_{13}} = \epsilon = \pm 1 \Rightarrow \Omega - 2\epsilon \omega_5 = 0$$

Soit  $\omega_9 = \omega_{13} = 0$  les équations sont automatiquement satisfaites.

$$c) \text{ Supposons } \omega_{10} = 0, \omega_{14} \neq 0$$

$$(1) \text{ et } (3) \Rightarrow \frac{\omega_{13}}{\omega_{14}} = -\frac{\omega_5}{\omega_7} \Rightarrow \omega_{13} = 0 = \omega_5$$

$$(4) \Leftrightarrow \omega_7 \omega_{13} = \omega_5 \omega_{14}$$

$$(2) \Leftrightarrow \omega_9 \Omega = -2\omega_7 \omega_{14}$$

$$(2) \text{ et } (3) \Rightarrow \omega_9 = \omega_{14}$$

$$d) \text{ Supposons } \omega_{14} = 0, \omega_{10} \neq 0$$

$$(2) \text{ et } (4) \Rightarrow \frac{\omega_9}{\omega_{10}} = -\frac{\omega_5}{\omega_7}$$

$$(3) \Leftrightarrow \omega_7 \omega_9 = \omega_5 \omega_{10} \Rightarrow \omega_5 = 0 = \omega_9$$

$$(1) \Leftrightarrow \omega_{13} \Omega = -2\omega_7 \omega_{10}$$

$$(1) \text{ et } (4) \Rightarrow \omega_{10} = \omega_{13}$$

Si nous faisons maintenant intervenir les équations (5) et (6) dont les solutions sont  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4$  ou  $\omega_1 = \omega_2$  et  $\omega = 0$  ou  $\omega_3 = \omega_4$  et  $\omega_5 = 0$  ou  $\omega_5 = \omega_7 = 0$ , nous obtenons les solutions du système des 6 équations initiales. Parmi toutes ces solutions donnons en certaines :

Nous avons tout d'abord les solutions bien connues :

$$a) \omega_9 = \omega_{10} = \omega_{13} = \omega_{14} = 0 \text{ et } \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 \text{ (modèle à 8 vertex symétrique).}$$

$$b) \omega_9 = \omega_{10} = \omega_{13} = \omega_{14} = 0 \text{ et } \omega_1 = \omega_2 \text{ et } \omega_7 = 0 \text{ (modèle à 6 vertex asymétrique connu pour avoir une famille de matrice de transfert commutante, famille dépendant de deux paramètres [37] mais également :}$$

$$c) \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4, \omega_5 = \omega_7 = 0$$

$$d) \omega_9 = \omega_{10} = \omega_{13} = \omega_{14} = 0 = \omega_7, \omega_1 = \omega_2 \\ \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$$

e)  $\omega_9 = \omega_{10} = \omega_{13} = \omega_{14}$ ,  
 $\omega_4 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_1 - 2\omega_5 + 2\omega_7 = 0$   
 et  $\omega_1 = \omega_2$  et  $\omega_3 = \omega_4$ , ou  $\omega_1 = \omega_2$  et  $\omega_7 = 0$ .

f)  $\omega_1 = \omega_2, \omega_3 = \omega_4, \omega_5 = \omega_{10} = \omega_{13} = 0, \omega_9 = \omega_{14}$   
 $(\omega_3 - \omega_1) + \omega_7 = 0$

g)  $\omega_5 = \omega_7, \omega_9 = \omega_{10}, \omega_{13} = \omega_{14}$ ,  
 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4$

La solution c) ( $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4, \omega_5 = \omega_7 = 0$ ) conduit à une matrice  $L_n$  qui écrite en tant que matrice développée sur les matrices de Pauli est égal

$$L_n = \sum_{i=0, j=0}^3 W_{ij} \sigma_i \tau_j = W_{00} \sigma_0 \tau_0 + \sum_{i=1}^3 W_{0i} \sigma_0 \tau_i + \sum_{j=1}^3 W_{j0} \sigma_j \tau_0 + A \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes B$$

où  $A = \frac{1}{2} W_{0i} \tau_i + \sum_{i=1}^3 W_{0i} \tau_i$   
 $B = \frac{1}{2} W_{j0} \sigma_j + \sum_{j=1}^3 W_{j0} \sigma_j$

Si nous écrivons  $L_n$  comme une matrice  $4 \times 4$ , nous voyons qu'elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_{14} & \omega_{10} & 0 \\ \omega_{13} & \omega_4 & 0 & \omega_{10} \\ \omega_9 & 0 & \omega_3 & \omega_{14} \\ 0 & \omega_9 & \omega_{13} & \omega_2 \end{pmatrix}$$

où X, Y, Z, T sont quatre matrices qui peuvent être mises simultanément sous forme triangulaire supérieure (resp. inférieure) (en effet elles peuvent même

être simultanément diagonalisées car  $X = T + \lambda \mathbb{1}$  et Z et Y sont proportionnels à la matrice identité). Le modèle satisfait donc les conditions de J. Rae [25] et correspond donc à un modèle unidimensionnel dont on peut même donner la fonction de partition :

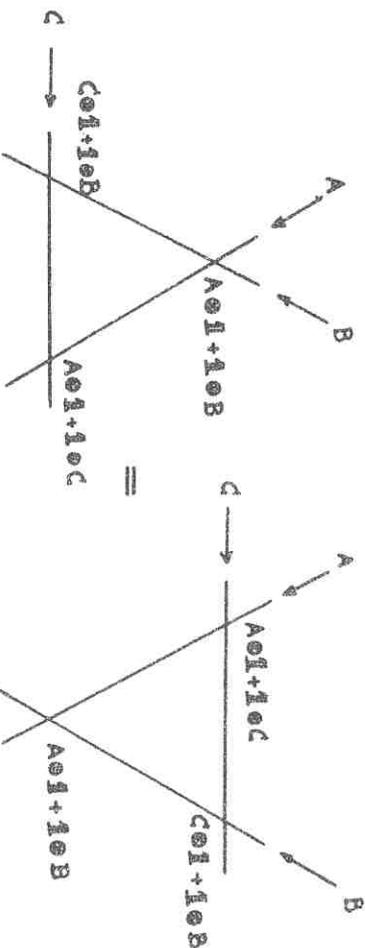
$$A = \frac{1}{2} \left\{ \lambda_1(X) + \lambda_1(T) + \sqrt{(\lambda_1(X) - \lambda_1(T))^2 + 4\lambda_1(Z)\lambda_1(Y)} \right\}$$

avec  $\lambda_1(T) = \omega_9 - \omega_1 + \lambda_1(X)$

$$\lambda_1(X) = \frac{1}{2} \left\{ \omega_1 + \omega_4 + \sqrt{(\omega_1 - \omega_4)^2 + 4\omega_1\omega_{14}} \right\}$$

$$\lambda_1(Z) = \omega_9, \quad \lambda_1(Y) = \omega_{10}$$

Remarquons qu'un problème dont la matrice  $L_n$  s'écrit  $A \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes B$  vérifie automatiquement la relation triangle (ceci nous fournit un exemple supplémentaire de relation triangle "triviale") :



La solution g) correspond à la forme suivante :  $X = T, Y = Z$  où X et Y sont combinaison linéaire de la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et de la matrice identité, ces quatre matrices sont donc simultanément diagonalisables, on retombe là encore sur un modèle unidimensionnel.

Classiquement la construction du pseudo-vidé de l'ansatz de Bethe est présentée de la façon suivante :



Lorsque nous écrivons  $L_n = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$  et écrivons la

matrice de transfert comme  $T = \text{Tr}_n \prod_n L_n$ , le produit matriciel en question est le produit des matrices  $L_n$  vu comme des matrices  $2 \times 2$ , et lorsqu'on court de ces divers produits on obtient des termes comme  $A_1 A_2 C_3 \dots$  il faut regarder le produit comme un produit tensoriel : les divers  $A_n, B_n, \dots$  opèrent pour des  $n$  différents sur des espaces différents. Si nous prenons un pseudo-vidé a priori de la forme  $\psi = \bigotimes_i e_i$  (comme auparavant) nous obtenons :

$$T\psi = \text{Tr}_n \prod_n \begin{pmatrix} A_n e_n & B_n e_n \\ C_n e_n & D_n e_n \end{pmatrix}$$

Si  $C_n e_n$  était nul nous aurions (puisque c'est la trace qui intervient) :

$$T\psi = \bigotimes_n A_n e_n + \bigotimes_n D_n e_n$$

ce n'est en général pas le cas et l'on recherche à trianguler la matrice  $L_n$  en utilisant les conjugaisons les plus générales :  $L_n e_n \rightarrow M_n^{-1} \cdot L_n \cdot e_n$  avec la condition  $M_{n+1} = M_n$ , conjugaisons qui laissent stable la trace. La recherche de ces matrices  $2 \times 2(M_n)$  conduit à l'équation

$$\alpha + \beta(p^2 + p'^2) + \gamma p p' + \alpha p^2 p'^2 = 0$$

Le lecteur désireux d'approfondir cette question, qui est le point de départ de l'ansatz de Bethe sur le modèle à 8 vertex symétrique, pourra se reporter à l'excellente revue de P.W. Kasteleyn [37]. En fait on peut voir, en rentrant dans les détails, que la première colonne (resp. la seconde) de

la matrice  $M_n$  s'identifie avec les vecteurs que nous avons notés  $(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix})$  et  $(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix})$ . Ceci achève de montrer que le critère que nous avons introduit s'identifie avec la possibilité de trianguler la matrice  $L_n e_n$ , propriété fondamentale pour l'ansatz de Bethe.

Notre critère s'identifie à une représentation analytique de l'algèbre de Zamolodchikov et au travers de cette algèbre, ou directement, nous l'avons vu, est lié à l'existence d'une relation triangle étoile sur le modèle.

Via notre nouveau critère, nous voyons que nous avons établi des correspondances entre des notions a priori éloignées (ansatz de Bethe, relation triangle, algèbre de Zamolodchikov, triangulation de la matrice  $L_n e_n$ ). D'autre part nous avons rappelé précédemment tout le parti qu'avait tiré A. Belavin de l'utilisation des conjugaisons sur les modèles à vertex intégrables. En fait la notion d'invariance par les conjugaisons (weak-graph duality) est parfaitement compatible avec notre critère. En effet si l'on a :

$$\lambda e' \otimes f' = L_n \cdot e \otimes f$$

on est alors assuré d'avoir cette même propriété pour  $L_n' = M \otimes N \cdot L_n \cdot M^{-1} \otimes N^{-1}$  il suffira de prendre au lieu de  $(e', f', e, f)$  le quadruplet  $(Me', Nf', Me, Nf)$ .

Ce critère est donc au carrefour de tous les concepts clés qui interviennent dans les modèles intégrables, et il a l'avantage de conduire aux calculs les plus simples.

4) Autres applications du critère qu'au modèle à 16 vertex et ses dégénérescences

Nous avons explicité la condition  $\lambda e' \otimes f' = L \cdot e \otimes f$  sur des exemples faisant intervenir des variables du type Ising (appartenant à  $\mathbb{Z}_2$ ). Regardons ce qu'il peut advenir de cette même condition sur un exemple simple de modèle où interviennent des variables appartenant à  $\mathbb{Z}_q$ . Nous revenons à l'exemple dû à V. Stroganov [31] que nous savons être complètement intégrable et admettre une relation triangle :

$$S_{ij,kl} = \sigma \delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{kl} + \sigma_1 \delta_{ik} \delta_{jl} + \sigma_2 \delta_{ij} \delta_{kl}$$

Pour  $q = 3, i, j, k, l \in \mathbb{Z}_3$ , la matrice  $S_{ij,kl}$  peut être explicitée sous la forme d'une matrice  $9 \times 9$  (on notera  $a = \sigma_1 + \sigma_3 + \sigma$ ,  $b = \sigma_1$ ,  $c = \sigma_2$ ) :

$$S = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Si nous notons  $f = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ q \end{pmatrix}$  et  $f' = \begin{pmatrix} 1 \\ p' \\ q' \end{pmatrix}$  nous obtenons les deux équations suivantes :  $\det M = 0$  et  $\det N = 0$  où  $M$  et  $N$  sont les deux matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} ap' - pb & -c & 0 \\ pp'c & bp' - pa & 0 \\ qp'c & -cq & b(p' - p) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } N = \begin{pmatrix} aq' - qb & 0 & -c \\ pq'c & b(q' - q) & -cp \\ qq'c & 0 & bq' - qa \end{pmatrix}$$

Ces deux équations sont les suivantes :

$$(p^2 + p'^2) ab - pp'(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

$$(q^2 + q'^2) ab - qq'(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

Elles définissent les transformations faisant passer de  $p$  à  $p'$ , et également de  $q$  à  $q'$ , exhibent le module du problème  $\frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab}$ , et indiquent également que ce problème fera intervenir une uniformisation rationnelle. En fait ce que nous venons d'exposer pour  $q = 3$  est valable quel que soit  $q$  : ainsi pour  $q = 4$  nous aurons avec

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ q \\ r \end{pmatrix} \text{ et } f' = \begin{pmatrix} 1 \\ p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix}$$

trois équations, les deux premières étant identiques aux deux précédentes, la troisième n'étant autre que  $(r'^2 + r'^2) ab - r r'(c^2 - a^2 - b^2) = 0$ .

### 5) Les perspectives

Nous avons vu que le critère que nous avons introduit permet de trouver très rapidement les invariants des modèles (modules, point de normalisation, ...), à supposer bien sûr que les modèles soient des modèles complètement intégrables. Il permet également de simplifier considérablement la recherche du pseudo-vide. En ce qui concerne la recherche des relations triangulaires nous avons vu sur l'exemple du modèle à 6 vertex symétrique que, à la différence des approches classiques, on obtenait d'entrée de jeu l'équation  $xx' = x'$  (dans les approches classiques on obtenait cette équation en dernier). Dans cette approche les bonnes variables, et leurs relations mutuelles nécessaires pour avoir une relation triangulaire, sont obtenues très rapidement. Il reste à vérifier que la solution que l'on présente ainsi a priori est bien une solution effective. Dans cette approche nous voyons que nous sommes amenés à définir le modèle non pas de la façon classique ( $w_1 = w_2, w_3 = w_4, w_5 = 0 = w_6 = \dots$  etc) mais en quelque sorte à "l'inverser" par sa paramétrisation. Par exemple dans le cas du modèle à 6 vertex symétrique, le modèle serait défini au départ comme satisfaisant  $\lambda e' \otimes f' = L e \otimes f$ , et possédant deux paramètres  $t$  (le module) et  $x$  (le paramètre spectral). La matrice  $4 \times 4$  de ce modèle s'écrit alors nécessairement :

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_{14} & \omega_{14} \frac{x}{t} & 0 \\ 0 & \omega_4 & \omega_5 & 0 \\ 0 & \omega_5 & \omega_3 & 0 \\ 0 & \omega_9 & \omega_9 \frac{x}{t} & \omega_1 \end{pmatrix}$$

avec  $0 = (\omega_1^2 + \omega_3\omega_4 - \omega_5^2) + \frac{\omega_1\omega_4}{t} + \omega_1\omega_3 \cdot t$

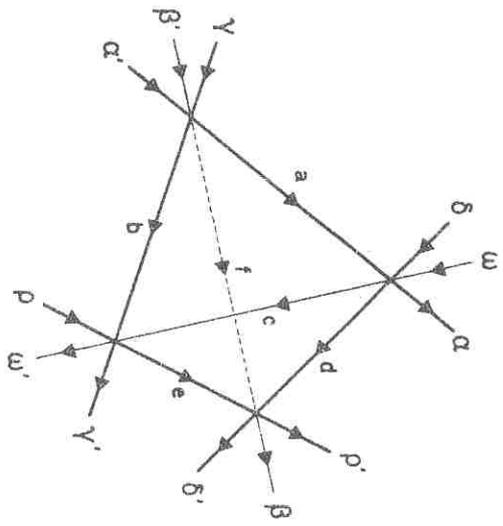
Il faut alors écrire la relation triangle pour ce modèle plus large que le modèle à 6 vertex symétrique ; les contraintes provenant de la relation triangle imposeront  $\omega_{14} = \omega_9 = 0, \omega_3 = \omega_4$ .

Autrement dit, dans cette approche, nous partons de la solution et ajustons les paramètres supplémentaires dont nous disposons pour préciser cette solution afin qu'elle vérifie en toute rigueur la relation triangle. On comparera cette approche à l'approche classique où les équations triangle apparaissent généralement surdéterminées (le nombre d'équations est d'ordinaire plus grand que le nombre de variables).

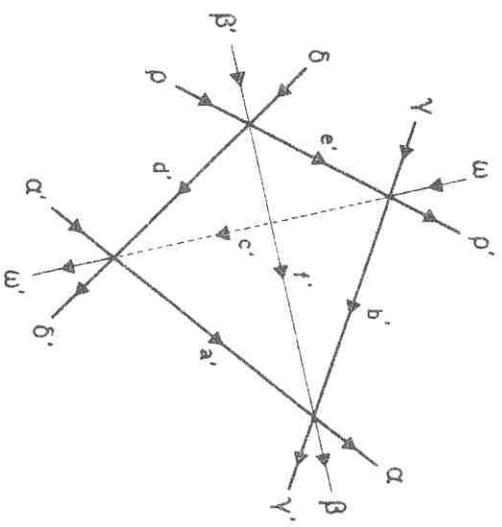
D'autre part, un des intérêts de ce critère réside dans le fait qu'il se généralise de façon extrêmement naturelle en dimension supérieure ; si nous considérons les matrices  $L$  correspondant au vertex tridimensionnel, nous lui associerons la propriété suivante :

$$\lambda e' \otimes f' \otimes g' = L \otimes f \otimes g$$

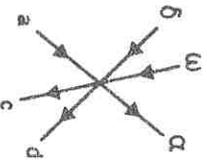
et nous seront amenés à chercher à obtenir les relations suivantes (relation tétra èdre sur des états particuliers) :



=

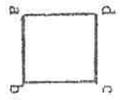


Les notations sont les mêmes que celles introduites sur la relation triangle :



signifie que l'état rentrant  
 $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ d \end{pmatrix}$

Une autre direction à explorer est l'extension de ce critère aux modèles que nous avons convenu d'appeler modèles à spins. Une extension possible consisterait pour un modèle à spin défini sur un réseau carré par le poids suivant  $W(a,b,c,d)$  associé à tous les carrés élémentaires,



$W(a,b,c,d)$

à demander la réalisation de la propriété suivante :

$$\lambda e'(b,c) \otimes f'(a,b) = \sum_d W(a,b,c,d) e(a,d) \otimes f(d,c)$$

si  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$ ,  $e$  dépend d'un élément de  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ,  $c'$  est donc un vecteur à 4 composantes ; on remarque que  $e(a,d), f(d,c)$  ne sont pas indépendants puisque  $d$  intervient dans  $e$  et dans  $f$  (et de même  $b$  dans  $e'$  et  $f'$ ). Il serait important de pouvoir, à partir d'une propriété semblable, retrouver l'uniformisation elliptique intervenant dans le modèle d'hexagone dur.

Une dernière direction à explorer consiste (puisque nous avons vu qu'il était assez facile d'exhiber les modèles pour lesquels il existait un pseudo-vide  $\psi = \otimes e_i$  qui, par l'action de la matrice de transfert du modèle, donne un pseudo-vide semblable  $\psi' = \otimes e_{i+1}$ ) à regarder les conséquences de cette propriété : assurément cette propriété est plus faible que la complète intégrabilité mais elle est tout de même assez contraignante. Sur les états  $\psi = \otimes e_i$  qui dépendent d'un paramètre continu (noté  $p$  dans le texte) on peut voir notamment de façon immédiate la commutation des matrices de transfert, bien sûr l'ensemble de ces états ne forme pas une base de l'espace vectoriel total (sinon nous aurions démontré à partir de cette propriété l'existence

d'une famille de matrice de transfert qui commute, propriété très forte). Il peut donc être intéressant d'étudier cette propriété et la classe des modèles qui la possèdent (et ce en toute dimension) car cette classe est plus large que la classe des modèles intégrables. Ceci rejoint le point de vue que nous avons développé sur les modèles possédant la seule relation d'inverse en les voyant comme un ensemble plus vaste que les modèles intégrables [1] [2] [9].

## CONCLUSION

Les équations de factorisation, appelées parfois équations de Yang-Baxter [22], ainsi que leurs généralisations en dimensions supérieures (équations tétra èdre ) jouent un rôle fondamental pour les modèles exactement solubles en mécanique statistique, et dans d'autres domaines (la méthode de scattering inverse quantique entre autres). Nous avons en nous appuyant sur le plus grand nombre d'exemples possible montré les problèmes que l'on pouvait rencontrer dans la recherche de ces équations de Yang-Baxter. Nous avons discuté de l'existence de nombreuses solutions malheureusement triviales qu'il convient d'éviter.

Nous avons ensuite illustré la lourdeur des calculs rencontrés dans une recherche des équations de Yang-Baxter que nous qualifions de "classique", et dont on peut considérer que les exemples les plus achevés sont fournis par les articles de H.C. Otinger et J. Nonerkamp [22] ainsi que celui de V.V. Bazhanov et Y.G. Stroganov [39]. Nous avons enfin proposé des idées ou des méthodes permettant éventuellement de simplifier cette approche classique. Nous avons surtout dégagé un critère très simple permettant d'obtenir facilement les quadratiques intervenant dans ces problèmes.

Nous avons montré les liens existant entre ce critère simple et l'algorithme de Zamolodchikov. Les liens entre ce critère et la construction explicite, de l'ansatz de Berthe, et plus précisément l'existence du pseudo-vide ont également été indiqués. Ce critère s'avère prometteur de par la simplicité des calculs qu'il induit, ainsi que par sa généralisation immédiate en dimension supérieure à deux. Il reste à développer ces idées sur l'exemple de la relation tétra èdre ainsi qu'à les généraliser aux modèles à spins notamment au modèle d'hexagone dur.

## APPENDICE

APPENDICE 1

Les invariants algébriques qui interviennent dans le modèle d'hexagone dur sont :

$$(1) \Delta_1 = z^{-1/2} (1 - z \cdot e^{I+M}) = \frac{\omega_1^2 - \omega_4 \omega_5}{\omega_2 \omega_3}$$

$$(2) \Delta_3 = \frac{\omega_1^3 - \omega_4 \omega_3^2 - \omega_5 \omega_2^2}{\omega_1 \omega_2 \omega_3}$$

$$(3) \Delta_2 = \frac{\omega_4 \omega_5}{\omega_1^2} (\omega_1 - \omega_3) + \frac{\omega_2 \omega_3}{\omega_1^2}$$

Ils sont de plus contraints par les conditions

$$\Delta_2 = 1/\Delta_1 \quad \text{et} \quad \Delta_3 = \Delta_1 - \Delta_2$$

Si (1) et (3) sont deux équations différentes, alors la seule solution est la solution triviale.

Si (1) et (3) sont les mêmes équations alors (2) se réécrit

$$\omega_4 (\omega_3^2 - \omega_1 \omega_5) = \omega_2 \left( \frac{1}{\Delta_1} \omega_1 \omega_3 - \omega_2 \omega_5 \right)$$

qui se découple en

$$\omega_3^2 = \omega_1 \omega_5 - \frac{1}{\Delta} \omega_2 \omega_4$$

$$\text{et} \quad \omega_4^2 = \Delta \omega_2 \omega_5 - \frac{\Delta}{\Delta_1} \omega_1 \omega_3$$

pour un certain  $\Delta$  fixe.

Nous avons alors le jeu de trois équations suivant :

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_4 \omega_5 + \Delta_1 \omega_2 \omega_3 \\ \omega_3^2 &= \omega_1 \omega_5 - \frac{1}{\Delta_1} \omega_2 \omega_4 \\ \omega_4^2 &= \Delta_1 \omega_2 \omega_5 - \frac{\Delta_1}{\Delta_1} \omega_1 \omega_3 \end{aligned}$$

Si nous posons  $\omega_i = \alpha_i \cdot \theta_i$  on peut s'apercevoir par un calcul simple que si

$$\frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1 \alpha_5}{\alpha_3} \equiv \delta$$

et  $\frac{\alpha_1^4}{\alpha_2 \alpha_3} = -\delta^3$  les équations précédentes se réécrivent

$$\begin{aligned} \theta_1^2 &= \delta \cdot \theta_2 \theta_3 - \delta^{-1} \cdot \theta_4 \theta_5 \\ \theta_3^2 &= \delta \cdot \theta_1 \theta_5 - \delta^{-1} \cdot \theta_2 \theta_4 \\ \theta_4^2 &= \delta \cdot \theta_2 \theta_5 - \delta^{-1} \cdot \theta_1 \theta_3 \end{aligned}$$

On reconnaît alors les relations quadratiques satisfaites par  $\theta_1$  la fonction  $\theta$  usuelle impaire de période  $2\pi$ ,  $\theta_2(u) = \theta_1(u - \frac{4\pi}{5})$ ,

$$\theta_3(u) = \theta_1(u + 4\pi/5), \theta_4(u) = \theta_1(u + 2\pi/5),$$

$$\theta_5(u) = \theta_1(u - 2\pi/5) \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\theta_1(2\pi/5)}{\theta_1(\pi/5)} \\ \delta &= \frac{\theta_1(\pi/5)}{\theta_1(\pi/5)} \end{aligned}$$

Les équations se déduisent de la première équation en faisant agir successivement le cycle d'ordre 5 sur les indices :

1 + 2 + 4 + 5 + 3 + 1. On trouvera ainsi deux équations compatibles avec le jeu de trois équations précédentes :

$$\begin{aligned} \theta_2^2 &= \delta \cdot \theta_1 \theta_4 - \delta^{-1} \cdot \theta_5 \theta_3 \\ \text{et } \theta_5^2 &= \delta \cdot \theta_4 \theta_3 - \delta^{-1} \cdot \theta_2 \theta_1 \end{aligned}$$

Cette uniformisation elliptique appelle plusieurs commentaires : tout d'abord l'existence d'une transformation d'ordre 5 (la translation du paramètre spectral de  $2\pi/5$ ) est à mettre en relation avec l'existence de 5 phases, 5 domaines analytiques dans ce problème. Cette situation généralise celle bien connue où l'on dispose d'une transformation d'ordre 2, la dualité de Kramers-Wannier. De plus de telles uniformisations par un jeu analogue de fonction  $\theta$  (la fonction  $\theta_1$  et ses translations de  $2\pi/q$ ) interviennent dans des modèles à vertex où les liaisons prennent q couleurs, ainsi que l'a indiqué Belavin [21]. Enfin cette translation du paramètre spectral de  $2\pi/q$  se rencontre encore, mais avec une uniformisation rationnelle cette fois-ci, dans le problème de Toda quantique ; ainsi par exemple A.E. Arnshtrein, V.A. Fateyev et A.B. Zamolodchikov ont indiqué [40] que pour l'exemple  $N = 3$ , la matrice S s'écrivait :

$$S = \frac{\text{sh}(\theta/2+i\pi/3) \text{sh}(\theta/2-i\pi/3+ib/2) \text{sh}(\theta/2-ib/2)}{\text{sh}(\theta/2-i\pi/3) \text{sh}(\theta/2+i\pi/3-ib/2) \text{sh}(\theta/2+ib/2)}$$

Le fait physique important à remarquer étant l'existence d'états liés justement pour  $\theta = 2\pi i/3$  (pôles dans la matrice S) ce pôle pour la matrice S étant permis du fait de la symétrie  $\mathcal{N}_3$ .

APPENDICE 2  
-----

L'une des douze équations quadrilinéaires correspondant au modèle à vertex décrit page 41 est obtenue en écrivant l'annulation de l'expression ci-dessous.

```

EQUATION NUMERO 3, COEFF DE N0=1, N0=1, 1--1A4 B1 C1 E11 + A6 B3 C1 D1 + A3 E4 C4 D1-123 B6 C1 D11 + A4 B1 C3 D1-1A5 B3
C3 D11-1A6 B3 C3 D11 + 23 D5 C3 D1-1A1 E3 C3 D1-1A3 B6 C2 D11 + A3 B1 C4 D1-1A3 B3 C4 D11 + A6 B5 C4 D1-1A4 B6 C4 E11
+ A4 B4 C3 D1-1A4 B6 C3 D11-1A1 B3 C2 D1-1A5 B6 C2 D11-1A6 B1 C1 D11 + A5 B3 C1 D3-1A1 E4 C1 C31 + A2 B3 C1 C3-1A3 B1
C3 D31 + A4 B3 C3 D3 + 2 A6 B3 C3 D3 + A1 B4 C3 E3-2 A3 B4 C3 D3 + A3 B8 C3 D3 + A1 B6 C3 D2 + A3 B6 C3 D3-1A1 B1 C4 D31
+ A3 B3 C4 D1-1A6 B4 C4 D31 + A5 B6 C4 E3-1A3 B1 C3 D31 + A1 B3 C5 D1-1A3 B4 C4 D31 + A6 B3 C3 D3 + A1 B1 C6 D3-1A3 B1
C6 E31 + 2 A3 B3 C6 D3-1A4 B4 C6 D31 + A5 B4 C6 D3 + A6 B5 C6 D3 + A4 B6 C6 D3-1A1 B3 C1 E31 + A3 B3 C1 D4 + A3 B4 C1 D4
-1A4 B6 C1 D41 + A1 B1 C3 D4-2 A3 B3 C1 D4 + A6 B5 C1 D4-1A4 B6 C3 D41-1A3 E6 C3 D41 + 25 B1 C4 D4-1A6 B3 C4 D41 + A2 B3
C4 D4-1A1 B6 C4 D41-1A5 B3 C4 D41 + A6 E3 C3 D4 + A1 B4 C3 D4-1A3 B6 C3 D41-1A3 B6 C3 D41-1A3 B6 C3 D41 + A3 B1 C3 D5
+ A1 B3 C3 D5 + A3 B3 C3 D5 + A4 B4 C3 D5 + A6 B5 C3 D5 + A5 B6 C3 D5 + A4 B1 C6 D5 + 25 B1 C6 D5 + A6 B2 C6 D5 + 22 B4
C6 D5 + A3 B5 C6 D5 + A1 B6 C6 D5-1A3 B1 C1 D61 + 23 B3 C1 D6-1A4 B1 C1 D61 + A6 B5 C1 D61-1A3 B1 C1 D61-1A3 B1 C1 D61
+ A3 B3 C3 D6-1A5 B4 C3 D61-1A6 E4 C3 D61 + 24 E6 C3 D61-1A6 B1 C4 D61 + A6 B3 C4 D6-1A3 B4 C4 D61 + A3 B6 C4 D6-1A6 B1
C3 D61 + A4 B3 C5 D6-1A3 B4 C5 D61 + A3 B5 C3 D6-1A3 B1 C6 D61-1A1 B6 C6 D61

```

ANPODAMI END OF FILE

RÉFÉRENCES

[1] M.T. Jaekel, J.M. Maillard (1982), J. Phys. A 15 1309.

[2] M.T. Jaekel, J.M. Maillard (1982), J. Phys. A 15 2241.

[3] M.T. Jaekel, J.M. Maillard Séminaire E.N.S. 1979-1980.

[4] P.P. Kulich, N.Y. Reshetikhin, E.K. Sklyanin Lett. in Math. Phys. 5 (1981) 393.

[5] C.N. Yang Phys. Rev. (1968) 168 1920-1923.

[6] B. Bergs, P. Weisz (1979) Commun Math. Phys. 67 241-250.

[7] S.T. Chui, J.D. Weeks (1976) Phys. Rev. B14, 4978-4982.

[8] M. Gaudin Note CEA-N-1559 (2) Modèles exacts en mécanique statistique : la méthode de Bethe et ses généralisations.

[9] J.M. Maillard Note CEA S82/76 Relations d'inverse en mécanique statistique (1983)

[10] L.P. Kadanoff, F.J. Wegner (1971) Phys. Rev. B4, 3989.

[11] R.J. Baxter (1980) J. Phys. A13 161-70.

[12] D.W. Wood, M. Goldfinch (1980) J. Phys. A13, 2781-2794.

[13] R.K. Bullough, P.J. Caudrey, Solitons, Topics in current Physics, Vol. 17.

[14] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur Phys. Rev. Lett. (1973) 30, 1262-1264.

[15] P.D. Lax (1975) commun. on Pure and Applied Math, XXVIII, 141-188.

- [16] V. Zakharov, A. Shabat, (1974), *Funct. Anal. and Appl.* 8, 43.
- [17] M. Boiti, F. Pempinelli, Il. Nuovo Cini (1979) 518, 70.
- [18] A.B. Zamolodchikov, A.B. Zamolodchikov, (1979) *Annals of Physics* 120, 253-291.
- [19] P.J. Gambardella (1975) *J. of Math. Phys.* 16, 1172-1187.
- [20] I.V. Cherednik *Sov. Phys. Dokl* (1979) 24 (12) 974.
- [21] A.A. Belavin (1980) *Nuclear Physics B*, 189-200.
- [22] H.C. Oettinger, J. Honerkamp (1982) *Phys. Lett.* 88A, 339.
- [23] M. Suzuki (1972) *Phys. Rev. Lett.* 28, 507.
- [24] L. Onsager (1944) *Phys. Rev.* 65, 117.
- [25] J. Rae (1973) *J. Phys.* A6, L 140-143.
- [26] E.K. Sklyanin, L.A. Takhtajan, L.D. Faddeev (1979) *Teor. i. Mat. Fiz* 40, 194.
- [27] B. Berg, M. Karowski, P. Weisz (1978) *Nuclear Phys. B* 134, 125-132.
- [28] M. Karowski, J.J. Thun, T.T. Truong, P.H. Weisz, *Phys. Lett.* 67B (1977) 321.
- [29] R. Shankar, E. Witten (1978) *Phys. Rev. D* 17 p 2134-2143.
- [30] D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky Theta functions, Completely X-symmetric S matrices and quantum isospectral deformation equations corresponding to them soumis à *Annals of Physics DPh-T/80/131*.
- [31] Y. Stroganov, 1979, *Phys. Lett.* 74A, 116.

- [32] C.L. Schultz, 1981 *Phys. Rev. Lett.* 46, 629.
  - [33] A.B. Zamolodchikov *commun. Math. Phys.* 79 (1981) 489.
  - [34] R.J. Baxter (1978) *Philos. Trans. Roy. Soc. Lond* 289A, 315.
  - [35] R.J. Baxter (1972) *Ann. Phys.* 70, 193 (1973) *Ann. Phys.* 71, 1.
  - [36] L.L. Lin, H.E. Stanley (1974), *Phys. Rev.* B10, 2958-1960.
  - [37] P.W. Kasteleyn, 1975 *Fundamental Problems in Statistical Mechanics III* : Proceedings of the Wageningen Summer School ed E.C.D. Cohen North-Holland Amsterdam.
  - [38] A. Gaaf, J. Hijmans (1975), *Physica* 80A, 149-171.
  - [39] V.V. Bazhanov, Y.G. Stroganov, *Nuclear Physics B* 205 (1982) 505-526.
  - [40] A.E. Arinshtein, V.A. Fateyev, A.B. Zamolodchikov, *Physics Letters* 87B (1979) 389.
- AUTRES REFERENCES QUE L'ON PEUT CONSULTER SUR LE SUJET :
- [a] R.J. Baxter, Proceedings of the 1980 Enschede Summer School *Fundamental Problems in Statistical Mechanics V* North-Holland ; Amsterdam.
  - [b] R.J. Baxter (1982) *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* Academic Press.
  - [c] *Lecture Notes in Mathematics* 425, Springer Verlag.
  - [d] M. Hortsasu, B. Schroer, H.J. Thun, *Nuclear Physics B* 154 (1979) 120-124.
  - [e] V.V. Bazhanov, Y.G. Stroganov, *Phys. Lett.* 105B (1981) 278.

- [f] M. Chaichian, P.P. Kulish (1978) *Phys. Lett.* 78B, 413.
- [g] S.V. Pokrovsky, Y.A. Bashilov *Commun. Math. Phys.* (1982) 84, 103-119.
- [h] M.J. Stephen, L. Mittag (1972) *J. Math. Phys.* 13 1944.
- [i] Y. Yamazaki, G. Meissner, H.J. Hilhard *Z. Für. Phys.* B35 (1979) 333-337.
- [j] A.G. Izergin, V.F. Korepin (1981), *Lett. in Math. Phys.* 5, 199-205.
- [k] P.P. Kulish (1981) *Lett. in Math. Phys.* 5, 191-197.
- [l] B. Berg, M. Karowski, P. Weisz, V. Kurak, *Nuclear Physics B* 134 (1978) 125-132.
- [m] M. Karowski (1979) *Nuclear Physics B* 153, 244-252.