

Séminaire E.N.S. (1979-1980)

Exposé n° 2

MODELES EXACTEMENT SOLUBLES EN PHYSIQUE DES PARTICULES

par Marc JAEKEL et Jean-Marie MAILLARD

I. Matrices S solubles.

1. Introduction de la matrice S et de ses propriétés [1]

Une particule est caractérisée par deux sortes de paramètres :

- l'énergie impulsion, ensemble de d paramètres continus $p_0, \dots, p_{d-1}$ (d est la dimension de l'espace-temps) reliés par une relation $p_0^2 - p_1^2 - \dots - p_{d-1}^2 = m^2$; m est la masse de la particule, p_0 est son énergie, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_{d-1})$ est son impulsion.

- le spin et les charges, soit autant de paramètres prenant des valeurs discrètes : 1.

Une antiparticule de paramètres (p, i) est identifiée à une particule de paramètres $(-p, i)$ (on distingue alors deux domaines : les particules pour une énergie positive $p_0 \geq 0$, les antiparticules pour une énergie négative $p_0 < 0$). Dans la suite, la matrice des modèles étudiés autorise la simplification suivante : les modèles ont un espace de dimension 1 ($d = 1 + 1 = 2$) et une seule échelle de masse, posée égale à 1. L'énergie impulsion d'une particule décrit donc une courbe :

$$p_0^2 - p_1^2 = m^2 = 1$$

On choisira alors la rapidité θ comme paramètre : $p_0 = \cosh \theta$, $p_1 = \sinh \theta$.

(particules et antiparticules correspondent aux domaines θ réel et $\theta - i\pi$ réel).

On ne considérera pas le spin et on ne distinguera les particules qu'à l'aide d'une seule charge notée 1.

Une particule est donc représentée par deux paramètres (θ, i) , θ prenant les

valeurs continues réelles et 1 des valeurs discrètes.

Selon la mécanique quantique, à un ensemble de N particules $(\theta_1, i_1), \dots, (\theta_N, i_N)$ est associé un état de base d'un espace de Hilbert, noté :

$|\theta_1, i_1, \theta_2, i_2, \dots, \theta_N, i_N\rangle$. Un état de diffusion quelconque est une superposition

quelconque de ces états de base :

$$|u\rangle = \sum_{(\theta, i)} u_N(\theta, i) |\theta_1, i_1, \dots, \theta_N, i_N\rangle$$

les coordonnées $u_N(\theta, i)$ de l'état $|u\rangle$ sont la fonction d'onde de l'état $|u\rangle$; le carré du module ($|u_N(\theta, i)|^2$) est interprété comme la probabilité d'observer N particules avec les impulsions et les charges $\theta_1, i_1, \dots, \theta_N, i_N$.

Dans l'approche de la matrice S on décrit les collisions entre particules.

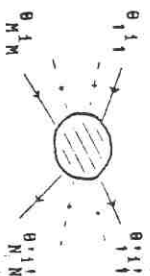
On pose la question : étant donné un état initial $|u\rangle$, quelle est la probabilité d'obtenir un état final $|v\rangle$? La matrice S répond à cette question (elle contient donc toute la dynamique des interactions entre particules) ; S est un endomorphisme de l'espace de Hilbert des états : à un état initial $|u\rangle$

il associe un état final $|v\rangle$: $|v\rangle = S |u\rangle$. Son noyau est un en-

semble de fonctions appelées amplitudes de diffusion ou matrices S :

$$S |u_1, i_1, \dots, \theta_M, i_M\rangle = \sum_N S(\theta_1, i_1, \dots, \theta_M, i_M ; \theta_1', i_1', \dots, \theta_N, i_N) |\theta_1', i_1', \dots, \theta_N, i_N\rangle$$

On représente chaque terme (chaque canal possible) par un schéma

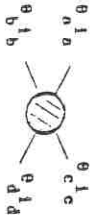


La probabilité de chaque processus possible est donnée par le carré du module de l'amplitude de diffusion : $|S(\theta_1, i_1, \dots, \theta_M, i_M ; \theta_1', i_1', \dots, \theta_N, i_N)|^2$

Le tout est donc de déterminer ces matrices S. Une première étape est de

déterminer les propriétés que doivent avoir des matrices pour des raisons physiques. Le problème étant trop ardu dans le cas général (et même dans le cas

physiquement intéressant, c'est-à-dire $d = i + j$), on l'étudie dans des cas particuliers, c'est-à-dire pour une classe très spéciale de modèles en dimension $d = i + 1$. Ces modèles jouent le rôle de tests, ou de bancs d'essai pour les théories. Une particularité essentielle de ces modèles est l'absence de création de paires (ou encore la conservation du nombre de particules). On montre par la suite qu'il suffit d'étudier la matrice S d'interaction à 2 particules :



ayant pour amplitude de diffusion $S(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$.

Une première classe de restriction est apportée à la matrice S par les symétries d'espace-temps. L'invariance des lois physiques par translation d'espace-temps correspond à la conservation de l'énergie-impulsion totale de tout système isolé. Par conséquent dans l'interaction l'énergie-impulsion totale du système de deux particules est conservée. Dans l'espace-temps de dimension 2 cela se traduit par deux contraintes, qui se ramènent à l'identité des énergies-impulsions initiales et finales :

$$\begin{cases} \theta_c = \theta_a & (\text{diffusion vers l'avant}) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \theta_c = \theta_b & (\text{diffusion vers l'arrière}) \\ \theta_d = \theta_b \end{cases} \\ \theta_d = \theta_a \end{cases}$$

L'invariance des lois physiques par transformation de Lorentz impose une contrainte supplémentaire à la transformation de Lorentz se traduit par une relation de toutes les variables rapides. La matrice S ne peut donc dépendre que des différences. L'amplitude de diffusion ne dépend donc plus que d'un seul paramètre continu $\theta = \theta_a = \theta_b$. Les particules ne se distinguant que par leur charge (elles ont la même masse), on peut convenir d'identifier une particule à une impulsion et de suivre ses changements de charge au lieu de l'inverse (on pose $\theta_a = \theta$, $\theta_b = \theta$). L'amplitude de diffusion décrit alors uniquement des changements de charge et peut s'écrire comme une matrice (où chaque indice

décrit le carré de l'espace des charges) dont les coefficients sont fonctions d'un paramètre continu θ :

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta(\theta) & \eta(\theta) \\ \xi(\theta) & \zeta(\theta) \end{pmatrix} \quad S^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$$

La conservation des probabilités (propriété d'unitarité) impose la restriction suivante :

La somme des probabilités d'obtenir un état final quelconque à partir d'un état initial donné doit être égale à 1, soit

$$\sum_a | \langle a | S | u \rangle |^2 = \langle u | S^\dagger S | u \rangle = \langle u | u \rangle = 1 \quad \forall | u \rangle$$

soit $S^\dagger S = I$

avec les simplifications précédentes, la condition s'écrit $S^\dagger(\theta)S(\theta) = I$.

Utilisant le principe de réflexion de Schwarz, $S^\dagger(\theta) = S(-\theta)$, on peut réécrire cette relation sous une forme analytique $\frac{S(-\theta)}{S(\theta)} = I$.

La causalité (propriété d'analyticité) impose la restriction suivante :

Exprimée en fonction des invariants de Lorentz, la matrice S est la valeur au bord d'une fonction analytique de ces invariants. Sur la variable θ , cela se traduit par la permanence de la matrice S (les pôles correspondent aux états physiques).

Le croisement est un petit groupe fini de symétrie sur les réactions : les échangeurs changent une particule de l'état initial en une antiparticule de l'état final : $a + b \rightarrow c + d$ devient $a \rightarrow b + c + d$, par exemple. Ici la conservation de chaque énergie-impulsion restreint ce groupe à K_2 de générateurs :

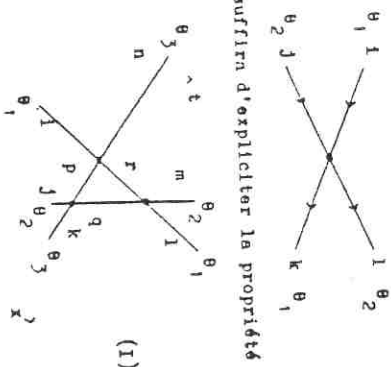
$$a + b \rightarrow c + d \quad \text{donne} \quad a + d \rightarrow c + b$$

le changement en antiparticule modifie les valeurs des charges ainsi que des spins (changement de domaine physique). La symétrie de croisement impose que la même matrice S décrit les deux réactions (on pose d'un domaine physique à l'autre par prolongement analytique)

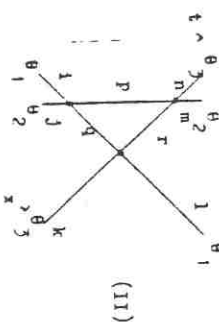
$$S \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(\theta) = S \begin{pmatrix} a & d \\ c & b \end{pmatrix}(\pi - \theta)$$

Enfin les différents types de symétrie interne distinguent les différents modèles différents modèles se distinguent par différents types de charges des particules. Ces charges décrivent une base d'une représentation linéaire d'un groupe de symétrie (en général des groupes compacts $U(N)$, $O(N)$). La matrice S doit être invariante dans l'action du groupe de symétrie interne sur les états. La matrice S est donc une combinaison de tenseurs invariants dans l'action du groupe. Les coefficients, dépendant du paramètre θ , sont les amplitudes invariantes.

Toutes ces propriétés restent vraies dans le cas général (à quelconque) mais ne sont pas suffisantes pour déterminer la matrice S . La dernière propriété qui permet le calcul de la matrice S n'est possible dans sa forme stricte que pour les modèles en dimension $1 + 1$ (elle devra donc être modifiée pour permettre une généralisation dans les dimensions supérieures). Il s'agit de la factorisation à deux corps : Elle impose que l'interaction à N particules résulte de toutes les interactions à deux corps choisis parmi les N particules, o'ent-à-dire qu'il n'y a pas d'interaction à N corps pour $N \geq 3$. Pour l'expliquer on représentera la matrice S de la façon suivante :

$$\text{Solt : } S_{1j,k1}(\theta_1 - \theta_2)$$


la diffusion d'annuler la propriété ou une interaction A 3 corps



Il existe deux ordres pour effectuer le produit des interactions à deux corps.

Ces ordres s'échangent lorsque l'on varie les conditions aux limites (positions relatives des particules initiales par exemple). Le résultat ne devant s'appliquer

aucune discontinuité dans ces variations, les deux ordres doivent mener au même résultat. Cette égalité s'écrit :

$$\sum_{pqr} S_{jk,qp}^{(\theta-\theta_3)} S_{lp,m}^{(\theta-\theta_3)} S_{rq,lm}^{(\theta-\theta_2)} \quad (I)$$

$$= \sum_{pq} S_{1j, qp}^{(\theta-\theta_2)} S_{qk, lr}^{(\theta-\theta_2)} S_{pr, mn}^{(\theta-\theta_2)} \quad (II)$$

que l'on peut réécrire afin d'expliciter la nature des produits :

$$S_{\alpha\beta}^{\pm}(\theta, -\theta, z^{-\theta}) = \sum_{j,q,k,p} \alpha^{\alpha\beta} S_{\alpha^{\pm}p,1}(\theta, -\theta, z^{-\theta}) \sum_{l,r,f,h} \alpha^{\alpha^{\pm}p,l} S_{\alpha^{\pm}p,h,1}(z^{-\theta}) \sum_{i,q,l,p} \alpha^{\alpha^{\pm}p,i} S_{\alpha^{\pm}p,i}(z^{-\theta}) \sum_{q,l,p} \alpha^{\alpha^{\pm}p,q} S_{\alpha^{\pm}p,q}(z^{-\theta}) \sum_{p,m,r,r} \alpha^{\alpha\beta} S_{\alpha^{\pm}p,m}(z^{-\theta}) \sum_{p,m,r,r} \alpha^{\alpha\beta} S_{\alpha^{\pm}p,m}(z^{-\theta})$$

où les flèches indiquent les sommations d'indices :

Il s'agit donc d'une équation de la forme : $A_1PC - CB_1A$

posent L_1, L_2, L_3 les espaces de charges des particules 1, 2, 3

$$\lambda = S(\theta_2 - \theta_3) \in L_2 \otimes L_3 \otimes L_2^* \otimes L_3^*$$

$$B = S(\theta_1, -\theta_3) \in L_1 \otimes L_3 \otimes L_1^* \otimes L_3^*$$

$$c = s(\theta_1 - \theta_2) \in L_1 \otimes L_2 \otimes L_1^* \otimes L_2^*$$

Le produit a lieu dans l'espace total contenant chaque espace :

$L_1 \otimes L_2 \otimes L_3 \otimes L_1^* \otimes L_2^* \otimes L_3^*$ also in structure

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{L_2 \otimes L_3 \otimes L_2^* \otimes L_3^*}_{A} \otimes \underbrace{L_1 \otimes L_3 \otimes L_1^* \otimes L_3^*}_{B} \otimes \underbrace{L_1 \otimes L_2 \otimes L_1^* \otimes L_2^*}_{C} \\
 \underbrace{L_1 \otimes L_2 \otimes L_1^* \otimes L_2^*}_{C} \otimes \underbrace{L_1 \otimes L_3 \otimes L_1^* \otimes L_3^*}_{B} \otimes \underbrace{L_2 \otimes L_3 \otimes L_2^* \otimes L_3^*}_{A}
 \end{array}$$

Cette relation est identique à celle rencontrée en physique statistique dans la résolution des modèles à vertex.

les conditions suivantes :

$\sigma_2(\theta)$ est méromorphe de période $2i\pi$ en θ (la périodicité résulte de la définition de θ) ;

$$\sigma_2(\theta) \text{ vérifie les équations : } \sigma_2(in-\theta) = q_2(\theta) \quad \sigma_2^*(\theta) = \sigma_2(-\theta)$$

$$\text{et } \sigma_2(\theta) \sigma_2(-\theta) = -\frac{\theta^2}{2} + \lambda$$

La solution générale ayant ses singularités sur l'axe imaginaire seulement s'écrit

$$\sigma_2(\theta) = \prod_{k=1}^L \frac{\text{Sh} \theta + 1 \text{ Sh} \theta_k}{\text{Sh} \theta - 1 \text{ Sh} \theta_k} \sigma_2^{(0)}(\theta) \quad \text{où les } \theta_k \text{ sont réels}$$

$$\text{et } \sigma_2^{(0)}(\theta) = q(\theta) q(in-\theta) \quad \text{avec } q(\theta) = -\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-i\theta/2\pi) \Gamma(\frac{1}{2}-i\theta/2\pi)}{\Gamma(-i\theta/2\pi) \Gamma(\frac{1}{2}+i\theta/2\pi)}$$

$$\Delta = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{N-2}$$

(le seul paramètre permettant de distinguer les différents modèles $O(N)$ symétriques est N).

$\sigma_2^{(0)}$ est la solution minimale.

b) Modèle à symétrie $O(2)$ [3] [4] [5]

Dans ce cas particulier du modèle $O(N)$, la forme donnée pour la matrice S ne mène pas au même ensemble d'équations lorsqu'on écrit la factorisation. On obtient 3 autres équations dont l'une est la différence entre les deux premières équations du cas $N > 3$, mais dont aucune combinaison ne se ramène à la seconde. La résolution des équations de factorisation ne mène plus à des fonctions linéaires mais à des fonctions trigonométriques pour les quotients d'amplification de diffusion ; la solution s'obtient de façon identique au cas $N > 3$: $s = q_1 + q_2$, $q_1 = q_1^+ + q_1^-$, $q_2 = q_2^+ + q_2^-$

$$q_1(\theta) = -\frac{1}{\pi} \text{Sh} \left(\frac{\theta}{2} \right) R(\theta) R(in-\theta) = s(in-\theta)$$

$$q_2(\theta) = \frac{1}{\pi} \text{Sh} \left(\frac{\theta}{2} \right) R(\theta) R(in-\theta)$$

$$R(\theta) = \Gamma(1+i\frac{\theta}{2\pi}) \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2j+i\frac{\theta}{2\pi}) \Gamma(1+2j+i\frac{\theta}{2\pi})}{\Gamma((2j+i\frac{\theta}{2\pi})^2) \Gamma(1+(2j+i\frac{\theta}{2\pi})^2)}$$

Dans la solution minimale, une constante supplémentaire γ s'introduit, constante de couplage qui paramétrise différents modèles.

c) Modèle à symétrie $Z_2 \oplus Z_2$ [6]

On peut réduire la symétrie $O(2)$ au point que le groupe devienne fini, soit $Z_2 \oplus Z_2$. Une particule possède deux états de charge a et $\bar{a}$. Les généralisations du groupe ont pour actions respectives,

$$\left| \begin{array}{c} a \\ \bar{a} \end{array} \right| \longrightarrow \left| \begin{array}{c} \bar{a} \\ a \end{array} \right| \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{c} a \\ \bar{a} \end{array} \right| \longrightarrow \left| \begin{array}{c} a \\ -\bar{a} \end{array} \right|$$

La matrice S possède alors 4 amplitudes invariantes :

$$\begin{aligned} s &= S_{a_1, a_1} = S_{\bar{a}_1, \bar{a}_1} & s' &= S_{a_1, \bar{a}_1} = S_{\bar{a}_1, a_1} \\ s_1 &= S_{a_1, \bar{a}_1} = S_{\bar{a}_1, a_1} & s_2 &= S_{a_1, a_1} = S_{\bar{a}_1, \bar{a}_1} \end{aligned}$$

(les autres éléments sont nuls).

Elle est alors identique à la matrice de transfert microlocale du modèle à 8 vertex symétrique de physique statistique. La factorisation, identique à la relation $ABC = CBA$, conduit alors à la solution par uniformisation elliptique.

Les rapports des amplitudes invariantes sont des fonctions elliptiques de la rapidité θ . De plus les amplitudes prennent la forme (pour la solution minimale)

$$s(\theta) = \exp \left\{ 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sh}^2(2n(n-\gamma))}{\gamma^n} \frac{\text{Sh}^{2n} \theta \text{Sh}^{2n} (in-\theta)}{\text{Sh}^{4n\gamma} \text{ch}^{2n} \gamma} \right\}$$

Deux constantes γ et γ' , qui sont les deux périodes des fonctions elliptiques, paramétrisent les différents modèles. On récupère les modèles de symétrie $O(2)$, puis $O(N)$ en faisant dégénérer le modèle général $Z_2 \oplus Z_2$, c'est-à-dire en faisant tendre une puis deux périodes vers $1 \rightarrow \infty$.

d) Modèle à symétrie $U(N)$ [7] [8]

On peut aussi retrouver les matrices S dans le cas où les particules sont dans

la représentation irréductible de dimension N du groupe $U(N)$. Dans ce cas, la factorisation mène à des fonctions linéaires ou trigonométriques pour les rapports des amplitudes de diffusion.

Il existe aussi des matrices S correspondant au groupe fini R_N (modèle de Toda) [9].

3. Relations entre les modèles de matrice S et les modèles à vertex [6]

On peut établir un dictionnaire traduisant les propriétés des matrices S en celles des modèles à vertex :

matrice S	vertex
factorisation	relation triangle $ABC = CBA$
unitarité	relation $P^2 = I$
croisement	duellité

Le groupe de croisement ou duellité est un groupe d'invariance de forme de la

matrice S ou du vertex (c'est-à-dire qu'il échange différentes interactions dans une même famille). Dans les modèles à vertex, les relations sont considérées dans le projectif (surtout pour $P^2 = I$ qui ne contient donc pas la partie normalisante des relations d'unitarité) ; mais, calculer la fonction de partition du modèle à vertex est justement équivalent à normaliser les vertex, c'est-à-dire calculer la matrice S du modèle équivalent.

Dans les deux cas, les deux relations $ABC = CBA$ et $P^2 = I$ expriment les relations entre les générateurs des groupes de permutations, qui convergent alors tous les calculs essentiels (cf. annexe de Bethe pour les états propres de l'hamiltonien). Pour les particules, le groupe des permutations classifie les états asymptotiques (ou états de diffusion) ; on peut engendrer les états asymptotiques comme dans un espace de Fock

soit $|0\rangle$ le vide, état à 0 particule,

soit $A_i(\theta)$ l'opérateur qui transforme le vide en un état à une particule i

$| \theta_1 \rangle$. On obtient un état à N particules en faisant agir le produit de N tels opérateurs sur le vide : $| \theta_1, \dots, \theta_N \rangle = A_1(\theta_1) \dots A_N(\theta_N) | 0 \rangle$.

Un état est dit entrant (initial) si : $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N$

Un état est dit sortant (final) si : $\theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_N$

On obtient la matrice S de diffusion de N particules en réécrivant un état entrant sur la base des états sortants ; pour cela on utilise les relations de commutation des opérateurs $A_i(\theta)$, données par la matrice S à deux particules :

$$A_i(\theta) A_j(\theta') = \sum_{k,l} S_{ij,kl}(\theta, \theta') A_l(\theta') A_k(\theta)$$

La matrice S totale s'obtient donc comme produit de toutes les matrices S à 2 particules possibles. Les relations $ABC = CBA$ et $P^2 = I$ sur la matrice S à deux particules sont simplement les relations de cohérence de ces commutations et reviennent à dire que le produit défini est une bonne représentation du groupe des permutations (ne dépend pas de la façon de l'obtenir).

II. Théorie des champs - Modèles intégrables.

On va montrer comment les modèles de physique statistique solubles (dont sur réseau) donnent par un passage au continu des modèles de théorie des champs solubles (applicables aussi bien à la physique statistique qu'à la physique des particules) et plus précisément comment le facteur de solubilité des modèles de physique statistique (la relation $ABC = CBA$) fournit le facteur de solubilité des théories des champs (la paire de Lax)

1. Modèles sur réseau

a) modèle XYZ [11]

Le modèle à huit vertex asymétrique (modèle statistique bidimensionnel) correspond au modèle XYZ défini sur un espace discret de dimension 4.

Ce modèle admet pour ensemble complet d'observables une famille de opérateurs $S(\alpha, n)$ encore notée S_n^α ; c'est-à-dire qu'à chaque point du réseau spatial n (n

écrit Z) sont associés trois observables S_n^α $\alpha = 1, 2, 3$ dérivant complètement ce système physique. Selon la mécanique quantique, ces observables sont des opérateurs dans un espace de Hilbert représentant tous les états du système. Ces observables sont des spin, c'est-à-dire qu'elles vérifient les relations de commutation de l'algèbre $SU(2)$: $[S_n^\alpha, S_m^\beta] = 2i\delta_{\alpha\beta\gamma} S_{n+m}^\gamma$ ainsi que $\sum_{\alpha=1}^3 (S_n^\alpha)^2 = I$ (on pose aussi par commodité $S_n^0 = I$). Le but est de déterminer l'évolution dans le temps de ces observables. Cette évolution est engendrée par l'hamiltonien suivant (du modèle XYZ) :

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{n-1,n} \quad ; \quad H_{n-1,n} = \sum_{\alpha=1}^3 J_\alpha S_{n-1}^\alpha S_n^\alpha$$

$$\text{et } J_1 + J_2 + J_3 = 1 \quad ; \quad \text{dn}25 \quad ; \quad \text{cn}25$$

(le système est donc caractérisé par deux paramètres ξ et le module des fonctions elliptiques, qui déterminent les constantes de couplage J_1, J_2, J_3)

Selon la mécanique quantique, un état évolue selon le groupe à un paramètre engendré par l'hamiltonien H :

$$\frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle \quad \text{ou} \quad |\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle$$

La valeur moyenne d'une observable étant donnée par le produit scalaire suivant : $\langle 0 | \psi \rangle$, l'évolution des états physiques est équivalente à l'évolution des observables selon :

$$O(t) = e^{iHt} O(0) e^{-iHt} \quad \frac{dO}{dt} = i[H, O] \quad [10]$$

(on résoud donc un modèle soit en diagonalisant H , soit en déterminant l'évolution des observables). Les équations du mouvement du modèle XYZ s'en déduisent :

$$\frac{dS_n^\alpha}{dt} = i[H, S_n^\alpha] = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_n^\beta J_n^\gamma \quad ; \quad J_n^\gamma = \sum_{m=1}^3 S_{n-m}^\gamma$$

Ce sont des équations de champs non linéaires, en général difficiles à résoudre. On va montrer dans une première étape comment ce modèle XYZ est effectivement associé aux modèles à 0 vertex symétriques, qui, eux, sont solubles [12] [13]. Pour cela, on introduit l'ajout d'une matrice de transfert microlocal :

$$L_n(u) = \sum_{\alpha=0}^2 W_\alpha(u) S_n^{\alpha\alpha}$$

$$\text{avec } W_0(u) = 1, \quad W_1(u) = \frac{S_n^1(u)}{S_n^0(u)}, \quad W_2(u) = \frac{S_n^2(u)}{S_n^0(u)}, \quad W_3(u) = \frac{S_n^3(u)}{S_n^0(u)}$$

$L_n(u)$ est une matrice 2×2 (α^α) dont les coefficients sont des opérateurs locaux (combinaisons des champs S_n^α au même point) et dépendent d'un paramètre u . Cette matrice est celle introduite dans les modèles à vertex (avec une représentation explicite de S_n^α en matrices 2×2) et la paramétrisation en u introduite est la solution de la relation $ABC = \xi BA$. Ici la distinction faite entre S_n^α et α^α permet de distinguer deux sortes de relation $ABC = \xi BA$, toutes deux satisfaites (car elles ne dépendent que des relations algébriques satisfaites par S_n^α et α^α)

$$R(v-u) \begin{array}{c} L_n(v) \\ \diagdown \quad \diagup \\ L_n(u) \end{array} = \begin{array}{c} L_n(u) \\ \diagup \quad \diagdown \\ L_n(v) \end{array} R(v-u)$$

$$L_n(u) L_n(v) R(v-u) = R(v-u) L_n(v) L_n(u) \quad \text{où } R(u) = \sum_{\alpha=0}^2 W_\alpha(u) \sigma^\alpha \otimes \sigma^\alpha$$

$$\begin{array}{c} L_{n-1}(u) \\ \diagdown \quad \diagup \\ L_n(v) \end{array} R_{n-1n}(v-u) = \begin{array}{c} L_n(v) \\ \diagup \quad \diagdown \\ L_{n-1}(u) \end{array} R_{n-1n}(v-u)$$

$$L_{n-1}(u) L_n(v) R_{n-1n}(v-u) = R_{n-1n}(v-u) L_n(v) L_{n-1}(u) \quad \text{où } R_{n-1n}(u) = \sum_{\alpha=0}^2 W_\alpha(u) S_{n-1}^\alpha S_n^\alpha$$

La première relation mène à la commutativité des matrices de transfert :

$$T(u) = \text{Tr} \prod_{n=-\infty}^{\infty} L_n(u) \quad (T(u) \text{ est un opérateur sur l'espace de Hilbert des états}).$$

On dérive la seconde solution autour de $v = u$:

$$L_{n-1}(u) L_n(v) R_{n-1n}(v-u) + L_{n-1}(u) L_n(u) R_{n-1n}(0) = R_{n-1n}(0) L_n(u) L_{n-1}(u) + R_{n-1n}(0) L_n(u) L_{n-1}(u)$$

$L_{n-1}(u)$ est un opérateur remarquable : à l'aide des relations de commutations des champs S_n^α , on vérifie qu'il s'identifie à l'opérateur de permutation des

fonction n et $n-1$: $\frac{1}{2} R_{n-1n}(0) = \frac{1}{2} (1 + \sum_{\alpha=1}^3 S_{n-1n}^{\alpha} S_n^{\alpha}) = P_{n-1n}$
c'est-à-dire :

$$P_{n-1n} S_{n-1}^{\alpha} P_{n-1n} = S_n^{\alpha}$$

$$P_{n-1n} S_{n-1}^{\alpha} P_{n-1n} = S_n^{\alpha}$$

$$P_{n-1n} S_{n-1}^{\alpha} P_{n-1n} = S_n^{\alpha} \text{ et } n-1$$

On introduit l'opérateur défini par : $R_{n-1n} = \frac{1}{2} P_{n-1n} R_{n-1n}^{\dagger}(0) = \frac{1}{2} \text{Tr} P_{n-1n} R_{n-1n}^{\dagger}(0)$
(le second terme sert à normaliser H_{n-1n} , lui enlevant la partie proportionnelle à l'identité ; la somme est de la forme : $\sum_{\alpha=1}^3 J_{\alpha} S_{n-1}^{\alpha} S_n^{\alpha}$ et on vérifie bien que les J_{α} sont ceux définies en termes de fonctions elliptiques). La relation s'écrit

$$[H_{n-1n}, L_n(u)] = L_n(u) L_{n-1}^{\dagger}(u) - L_{n-1}^{\dagger}(u) L_n(u)$$

Donc à partir de la relation ABC = CBA, on a tiré un opérateur local

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{n-1n} \text{ qui commute avec la famille de matrices de transfert } T(u).$$

On va montrer maintenant comment l'évolution associée à l'hamiltonien ainsi

défini s'écrit comme les conditions de compatibilité d'un système linéaire, c'est-à-dire d'une paire de Lax.

b) Paire de Lax associée

On réécrit l'équation précédente sous la forme :

$$L_n \{ [H_{n-1n}, L_{n-1}] - L_{n-1}^{\dagger} \} = - \{ [H_{n-1n}, L_n] + L_n^{\dagger} \} L_{n-1}$$

On définit alors, en correspondance avec la matrice de transfert microlocale L_n

une matrice microlocale M_n par :

$$M_n L_{n-1} = L_{n-1n} L_{n-1} - L_{n-1} L_n^{\dagger}$$

$$\text{et } L_n M_n = -L_{n-1n} L_n - L_n^{\dagger}$$

M_n est une matrice 2×2 dont les coefficients sont des combinaisons linéaires des opérateurs locaux S_n^{α} et S_{n-1}^{α} , et dépendant du paramètre u . Les relations sont compatibles en vertu de la relation précédente et déterminent M_n (on

utilise tout autant comme produits de matrices 2×2 avec des produits opératoires pour les coefficients).

On obtient alors :

$$L_n [H, L_n] = L_{n-1n} [H_{n-1n}, L_n] = M_{n+1} L_n - L_n M_n$$

Les équations du mouvement (correspondant à l'évolution de S_n^{α} ou L_n)

s'écrit donc :

$$\frac{dL_n}{dt} = L_n [H, L_n] - M_{n+1} L_n - L_n M_n$$

Ces équations de champs non linéaires sont les équations de compatibilité du système linéaire, défini sur le vecteur ψ_n à deux composantes opératoires :

$$\begin{cases} \psi_{n+1} = L_n \psi_n \\ \frac{d\psi_n}{dt} = M_n \psi_n \end{cases}$$

Ce système est la paire de Lax sur réseau associée au modèle de théorie des champs XYZ.

2. Modèles continus.

a) modèle de Lax-Phranchitz [12]

On obtient différents modèles de théorie des champs continus par différents passages à la limite. Le modèle le plus général, modèle de Lax-Phranchitz, s'obtient par la limite :

$$x = n\delta \quad S_n^{\alpha}(x, t) = S_n^{\alpha}(t) \quad (S_{n+1}^{\alpha} = S_n^{\alpha}(x) + \delta S_n^{\alpha}(x) + \dots)$$

$$J_{\alpha} = 1 + \frac{1}{2} \delta^2$$

$$\delta \rightarrow 0.$$

S_x^{α} est un champ de spins défini sur un espace de dimension 1 :

$$[S_x^{\alpha}(x), S_y^{\beta}(y)] = 2i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S^{\gamma}(x) \delta(x-y) \text{ et } \sum_{\alpha=1}^3 (S^{\alpha}(x))^2 = 1$$

Ce champ évolue selon l'hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 (\partial_x S^{\alpha})^2 + (J_1 - J_2) (S^1)^2 + (J_2 - J_3) (S^2)^2 \right\}$$

Les équations du mouvement que l'on en déduit sont :

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial t} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\beta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} S^\gamma + j_\gamma S^\gamma \right)$$

que l'on obtient comme conditions de compatibilité :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = L^2 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} = M^2 \end{cases}$$

de la paire de Lax :

Il est un vecteur à 2 composantes opérateurs et L et M sont les matrices 2×2 à coefficients opérateurs suivants :

$$L(x, u) = -1 \sum_{\alpha=1}^3 w_\alpha(u) S^\alpha(x) \sigma^\alpha$$

$$M(x, u) = -21 \sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha(u) S^\alpha(x) \sigma^\alpha - 1 \sum_{\alpha\beta\gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} w_\alpha(u) S^\beta(x) \frac{\partial S^\gamma}{\partial x}(x) \sigma^\alpha$$

$$w_\alpha(u) = p \frac{\partial}{\partial x} V_\alpha(u, S) \Big|_{S=0}$$

b) modèle de Sine-Gordon

On obtient d'autres modèles de théorie des champs continus par dégénérescences du modèle de Landau-Lifschitz. Ainsi, en concentrant les oscillations du spin S^α près du plan $(2, j)$, on obtient le modèle de Sine-Gordon. S décrit la sphère de rayon R : $S_1 = -\frac{P}{R}$ $S_2 = \sqrt{1 - \frac{P^2}{R^2}} \sin \varphi$ $S_3 = \sqrt{1 - \frac{P^2}{R^2}} \cos \varphi$

$$R \rightarrow \infty \text{ avec } R(j_1 - j_2) \rightarrow \gamma \quad (j_1 < j_2 < j_3)$$

$$\begin{aligned} j_3 - j_1 / R &\rightarrow 1 \\ j_2 - j_1 / R &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

Les champs sont P et φ évoluant selon :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \gamma \sin 2\varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = P \end{cases}$$

(cela correspond à $p = \frac{\sqrt{R}}{2}$, et une dégénérescence des fonctions elliptiques en fonctions trigonométriques ; les périodes étant $k' = \frac{\sqrt{R}}{2} \rightarrow 0$ et $k \rightarrow 1$).

c) modèle de Schrödinger non linéaire

Dégénérant une fois de plus, on concentre les variations du spin autour du point $(0, 0, 1)$. Les nouveaux champs $\psi(x, t)$ et $\psi^*(x, t)$ sont obtenus par :

$$\psi(x, t) = \sqrt{R} e^{i\sqrt{R}t} (S_1 + iS_2)(x, t) \quad (t = \sqrt{R}t')$$

$$\text{avec } (j_1 = j_2 < j_3) \quad j_3 - j_1 + j_3 - j_2 = \sqrt{R}$$

$$R \rightarrow \infty \quad \text{les champs évoluent selon : } \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{3}{2} \psi^2 - \frac{\gamma}{2} |\psi|^2 \psi$$

(cela correspond à une dégénérescence supplémentaire des fonctions trigonométriques en fonctions linéaires).

3. Déformations isospectrales [14] [15] [16] [19] [20]

Les modèles continus obtenus sont connus comme étant complètement intégrables. La résolution de ces modèles à l'aide de la théorie des déformations isospectrales a fait l'objet de très vastes développements dont les quelques références mentionnées ci-dessus ont donné une idée de l'ampleur. On va ici donner le schéma rapide de la théorie afin de montrer comment la paire de Lax mise en évidence précédemment permet de résoudre ces modèles.

Un système est dit complètement intégrable (au sens de Liouville) lorsque il existe autant d'intégrales du mouvement que de degrés de liberté (ici l'infini mais en mécanique classique un nombre fini N) [17]. On montre alors que dans l'espace des phases le mouvement a lieu sur un tore de dimension N . On peut alors choisir de nouvelles variables canoniques ; certaines, dites angles, paramétrisent un tore et ont une évolution linéaire dans le temps ; leurs variables conjuguées, dites actions, paramétrisent la famille des tores possibles et sont équivariantes aux intégrales du mouvement (l'espace des phases est donc feuilleté en tores).

La paire de Lax permet justement de réaliser cette transformation canonique en variables de type angle-action pour des systèmes à nombre infini de degrés de

liberté. On va décrire rapidement brièvement [18] .

La première équation est considérée comme un problème de diffusion :

$$\frac{d^2}{dx^2} = L S^\alpha(x, u) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{est un vecteur à deux composantes} \\ \text{qui est à rapprocher de : } \frac{a^2}{2} = [V(x) + \lambda] \end{array} \right.$$

où $V(x)$ est le potentiel, la variable u la valeur propre (la dépendance de la matrice de transfert dans un paramètre continu est donc cruciale pour l'existence d'un problème de diffusion associé).

Les solutions de ce système différentiel forment un espace de dimension 2 .

On considère deux bases différentes de cet espace, définies par les comportements des solutions à $x = +\infty$ et $x = -\infty$ respectivement :

$$\begin{aligned} (\varphi_1, \varphi_2) \text{ telles que } \varphi_1(x) &\sim e^{\frac{1}{2}W(u)x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_2(x) \sim e^{-\frac{1}{2}W(u)x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ à } x = +\infty \\ (\varphi_1', \varphi_2') \text{ telles que } \varphi_1'(x) &\sim e^{-\frac{1}{2}W(u)x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_2'(x) \sim e^{\frac{1}{2}W(u)x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ à } x = -\infty \end{aligned}$$

La matrice de passage de la deuxième à la première base définit la matrice de transition : $T(u)$ (T représente les amplitudes de diffusion). Ici (modèle de Landau-Lifschitz) T a la forme : $T(u) = \begin{pmatrix} a(u) & -b(u) \\ b(u) & a(u) \end{pmatrix}$ où $a(u)$ est analytique dans le rectangle $|\operatorname{Re}(u)| < 2K$, $0 < \operatorname{Im}(u) < 2K'$ et possède un nombre fini de zéros ; ces zéros correspondent aux états liés du problème de diffusion dont les solutions correspondantes peuvent être normalisées selon :

$$\begin{aligned} \varphi(x, u) &\sim e^{-\frac{1}{2}W(u)x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & x = +\infty \\ &\sim C_j e^{\frac{1}{2}W(u)x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & x = -\infty \end{aligned}$$

Le problème de diffusion apparaît donc comme une transformation qui associe à un potentiel $S^\alpha(x)$ (et leurs variables conjuguées) un nouvel ensemble de variables, dites données de diffusion qui comportent : les amplitudes de diffusion $a(u)$, $b(u)$ et les états liés u_j avec leurs normalisations C_j ; mais cette transformation n'est pas encore canonique ; calculant les crochets de Poisson des nouvelles variables :

$$\{a(u), a(v)\} = \{b(u), b(v)\} = \{a(u), \bar{a}(v)\} = 0$$

$$\{b(u), b(v)\} = 2\pi i p \left| \frac{a(u)}{b(u)} \right|^2 b(u-v)$$

$$\{a(u), b(v)\} = -W_j(u-v) a(u)b(v) \quad \{a(u), b(v)\} = W_j(u-v) a(u)b(v)$$

$$\{u_j, c_k\} = p c_k \delta_{jk}$$

(remarque : la matrice de transition est la limite $b = \delta = 0$ de la matrice de transfert du modèle statistique ; les crochets de Poisson sont la même limite de la relation : $T(v)T(u) = R^{-1}(u-v)T(u)T(v)R(u-v)$) [21]

Les variables canoniques associées sont :

$$\begin{aligned} p(u) &= \frac{1}{\pi p} \ln |a(u)| & q(u) &= -\pi p b(u) \\ p_j &= u_j & q_j &= \frac{1}{p} \ln |c_j| \end{aligned}$$

L'évolution dans le temps de ces variables est donnée par la deuxième équation du système linéaire, réécrite sur la forme asymptotique des solutions :

$$\frac{d^2}{dt^2} = M S^\alpha(x, u) \quad \text{pour } x = \pm \infty$$

Cette évolution correspond à une déformation du problème de diffusion. On vérifie que $p(u)$, p_j restent constants et que $q(u)$, q_j évoluent linéairement. La déformation conserve donc le spectre (déformation isospectrale) et les variables $q(u)$, q_j , $p(u)$, p_j sont les variables de type angle-action du système (la fonction $\ln a(u)$ est la fonction génératrice des intégrales du mouvement $\ln a(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u^n$, où les A_n peuvent s'exprimer comme des intégrales du champ $S^\alpha(x)$).

On voit alors comment utiliser cette transformation pour résoudre les équations d'évolution du champ $S^\alpha(x)$, qui sont non linéaires ; on remplace la détermination directe par le détour suivant, qui ne fait intervenir que des problèmes linéaires :

$$\begin{array}{ccc} S^\alpha(x, 0) & \xrightarrow{\quad L \quad} & S^\alpha(x, t) \\ \text{pb. de diffusion} & & \text{pb. inverse} \\ & \xleftarrow{\quad M \quad} & \\ b(u, 0), c_j(0) a(u) u_j & & b(u, t), c_j(t) a(u) u_j \end{array}$$

Il reste pour achever la résolution à résoudre le problème inverse. Pour cela,

on commence par récupérer la solution du problème linéaire de diffusion à partir des données de diffusion (c'est-à-dire la fonction de Jost $\psi(x,u)$).

On l'obtient en remarquant que c'est une fonction analytique de la variable spectrale u , hors des pôles u_j et d'une courbe Γ sur cette courbe, la fonction de Jost admet une discontinuité donnée par la matrice de transition

$$\psi_+(x,u) = T(u) \psi_-(x,u)$$

On a donc un problème de Riemann à résoudre, ce qui conduit à une équation intégrale de type Fredholm (équation de Gelfand-Levitan). Un développement asymptotique de $\psi(x,u)$ dans la variable u possède $S'(x)$ comme un de ses coefficients.

Conclusion.

On a montré que la solubilité d'une grande classe de modèles de différents domaines de la physique est liée à l'existence d'un feuilletage de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ en courbes elliptiques.

On a vu comment cette propriété sous-tend les différents critères de solubilité dans les différentes approches de ces modèles : l'analyse de Bethe en physique statistique, la factorisation en matrices S , la paire de Lax en théorie des champs.

On peut noter en passant le lien avec les modèles résolus par les champs holonomes : le modèle d'Izergin s'obtient comme dégénérescence du modèle à vertex ; pour certaines valeurs ponctuelles de la constante de couplage, certains problèmes de transformation isospectrale sont aussi des problèmes de transformations isomonodromiques (Schrödinger non linéaire à ∞)

Références

- [1] CHEW, S-matrix, ed. Benjamin.
- [2] ZAKHAROV and ZAKHAROV, Nuclear Physics B 133 (1978), 525-535.
- [3] ZAKHAROV, Communications in math. physics 55 (1977), 183-186.
- [4] KAROWSKI, THUN, TRUONG, WEISZ, Physics Letters B 67 (1977), 321-322.
- [5] SCHROER, TRUONG, WEISZ, Physics Letters B 63 (1976), 422-424.
- [6] ZAKHAROV, Comm. math. Phys. 69 (1979), 165-178.
- [7] BERG, KAROWSKI, WEISZ, Nuclear Physics B 134 (1978), 125-132.
- [8] BERG, WEISZ, Comm. math. Phys. 67 (1978), 241-250.
- [9] ARNSHEIM, FATEEV, ZAKHAROV, Physics Letters B 67 (1979), 389-392.
- [10] BJORKEN, DRELL, Relativistic quantum fields, ed. Mac Graw-Hill.
- [11] LUTHER, Physical Review (1978)
- [12] SKLYANIN, On complete integrability of the Landau-Lifshitz equation, Loml preprint, USSR academy of sciences, Steklov mathematical institute, Leningrad department.
- [13] KULISH, SKLYANIN, Physics Letters 70 A (1979), 461-463.
- [14] SCOTT, CHU, McLAUGHLIN, The Soliton, proceedings of the IEEE (1973), 1413-1482.
- [15] DUBROVIN, MATVEEV, NOVIKOV, Russian Math. Surveys 31 (1976), 59-146.
- [16] ZAKHAROV, SHABAT, Funktsional Analysis 8 (1974), 226-235.
- [17] ARNOLD, Méthodes mathématiques de la mécanique classique, ed. de Moscou
- [18] ZAKHAROV, SHABAT, Soviet Physics JETP 34 (1972), 62-69.
- [19] ABLOWITZ, KAUP, NEWELL, SEGUR, Physical Review Letters 31 (1973), 125-127.
- [20] ZAKHAROV, MANAKOV, Soviet Physics JETP 47 (1978), 1017-1027.
- [21] THACKER, WILKINSON, The inverse scattering transform as an operator method in quantum field theory, Fermi-Lab preprint.