Projet scientifique pour l'ANR "Holonomix"

Programmes transdisciplinaires. Appel à projets générique 2014 (Défi de tous les savoirs).
Nom complet : **Holonomie, entre mathématiques, physique et informatique**

Table des matières

0.1 Résumé

Ce projet est dédié à l'étude des fonctions holonomes (l'importante classe des solutions d'équations différentielles linéaires) qui apparaissent dans de nombreux domaines (physique, informatique, théorie des nombres, analyse, algèbre, combinatoire). Il regroupe pour la première fois des chercheurs couvrant l'ensemble de ces aspects, afin de résoudre de nombreuses conjectures (asymptotique multivariée et lois limites, périodes de Kontsevich–Zagier, polyzêtas, Galois différentiel, formes modulaires, p-courbure, q-séries, marches aléatoires), nécessitant des compétences transverses, et de rendre effectifs des travaux de Flajolet, Zagier, Ramanujan ou Grothendieck. Nos progrès mathématiques auront des applications directes : étendre les logiciels libres que nous avons commencé à développer, pour fournir un outil unifié de manipulation des fonctions spéciales de la physique, en théorie des nombres, mais aussi l'étude de récurrences et donc l'analyse automatique d'algorithmes en moyenne.

0.2 Liste des participants

Les membres de ce projet sont répartis sur 15 établissements à travers la France : Paris et son bassin, et le sud au sens large (Bordeaux, Dijon, Grenoble, Limoges, Lyon, Marseille, Toulouse, Tours), avec 11 permanents en IdF et 9 permanents en province. Les compétences requises pour mener à bien notre projet correspondent à l'union des domaines d'expertise des participants, qui s'avèrent être parmi les meilleurs spécialistes mondiaux de leur domaine ; nous listons ci-dessous certaines de ces compétences, illustrant ainsi la parfaite complémentarité des membres du projet.
[Tous les participants étant rattachés au même partenaire (Paris 13), nous omettons cette colonne.]

prénom nom	statut et institution	implication (en mois)	spécialité
Boris Adamczewski	DR CNRS Univ Marseille	29 (60%)	suites P-automatiques
Cyril Banderier	CR CNRS Univ Paris Nord	41 (85%)	combinatoire analytique +porteur, coord. tâche 2,
Olivier Bodini	Prof Univ Paris Nord	34 (71%)	génération aléatoire
Alin Bostan	CR INRIA Saclay	29 (60%)	calcul formel
Mireille Bousquet-Mélou	DR CNRS Univ Bordeaux	19 (40%)	combinatoire énumérative
Gilles Christol	Prof ém. Univ PM Curie	29 (60%)	p-adique
Frédéric Chyzak	CR INRIA Saclay	29 (60%)	holonomie +coord. tâche 3
Thierry Combot	MdC Univ Bourgogne	41 (85%)	mécanique céleste
Éric Delaygue	MdC Univ Lyon 1	33 (69%)	fonctions hypergéométriques
Lucia di Vizio	DR CNRS Univ Versailles	34 (71%)	q-différences
Stéphane Fischler	MdC Univ Paris Sud	24 (50%)	périodes Kontsevitch–Zagier
Joris van der Hoeven	DR CNRS Polytechnique	24 (50%)	asymptotique, numérique
Jeremy Lovejoy	CR CNRS Univ D. Diderot	29 (60%)	q-séries
Jean-Marie Maillard	DR CNRS Univ PM Curie	29 (60%)	physique théorique +coord. tâche 1
Marc Mezzarobba	CR CNRS Univ PM Curie	12 (25%)	algorithmique numérique
Jean-Pierre Ramis	Prof ém. Univ Toulouse	12 (25%)	équations différentielles
Kilian Raschel	CR CNRS Univ Tours	29 (60%)	probabilités
Tanguy Rivoal	DR CNRS Univ Grenoble	29 (60%)	théorie des nombres +coord. tâche 4
Julien Roques	MdC Univ Grenoble	29 (60%)	fonctions spéciales
Jacques-Arthur Weil	MdC Univ Limoges	41 (85%)	Galois différentiel +coord. tâche 5

auxquels s'ajoutent nos doctorants et postdoctorants : Jeanne Douce, Nicolas Rolin, Alice Jacquot, Thomas Dreyfus, Axel Bacher, Louis Dumont, Pierre Lairez.

0.3 Évolutions de la proposition détaillée par rapport à la pré-proposition

Il n'y a pas de modification notoire entre notre préproposition et notre soumission finale, il nous est juste paru plus naturel de regrouper les questions relevant du "galois différentiel" en une tâche à part entière (incluant ainsi une partie de l'ancienne tâche "théorie des q-équations") et que les problèmes liés aux q-séries se fondaient plus naturellement dans la tâche "théorie des nombres" et la tâche "combinatoire". Par ailleurs, pour simplifier la gestion administrative, nous avons centralisé la gestion financière sur Paris 13, où nous avons déjà interagi (lors de la gestion du PEPS CNRS qui a servi de catalyseur à cette demande d'ANR) avec une équipe administrative efficace.

1 Contexte, positionnement et objectif de la proposition détaillée

1.1 Les fonctions holonomes, un objet universel

Les **fonctions holonomes** (l'importante classe des fonctions solutions d'équations différentielles, ou aux différences, linéaires et à coefficients polynomiaux) apparaissent au cœur de nombreux domaines : en physique, en théorie des nombres, en combinatoire, en informatique... Il est essentiel de **mieux comprendre les propriétés de ces fonctions fondamentales et des récurrences associées**, de **donner une expression de leurs coefficients** et **de déterminer leur comportement asymptotique**, mais il n'existe à ce jour pas d'approche répondant pleinement à ces trois challenges. Nous donnons ci-après cinq grands domaines d'applications, en listant pour chacun plusieurs objectifs, souvent ambitieux, dont les premiers pas sont amorcés dans nos travaux publiés, mais nécessitant la complémentarité des membres de ce projet pour être atteints.

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{i+j}{i}^2\binom{4n-2i-2j}{2n-2i} = (2n+1)\binom{2n}{n}^2$$

$$\int_0^{+\infty} x\, J_1(ax)\, I_1(ax)\, Y_0(x)\, K_0(x)\, dx = -\frac{\ln(1-a^4)}{2\pi a^2}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{e^{-px}T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = (-1)^n \pi\, I_n(p)$$

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j}\frac{q^{(i+j)^2+j^2}}{(q;q)_{n-i-j}(q;q)_i(q;q)_j} = \sum_{k=-n}^{n}\frac{(-1)^k q^{7/2k^2+1/2k}}{(q;q)_{n+k}(q;q)_{n-k}}$$

$$\zeta(3) = 1.2020569031595942853997381615114499907649862923404980\ldots$$

$$[z^n]\left\{y + 6\,y' + (-54+54\,z)y'' + (27-54\,z+27\,z^2)y''' = 0, y(0) = \mathrm{e}, y'(0) = \frac{-\mathrm{e}}{3}, y''(0) = \frac{-\mathrm{e}}{9}\right\}$$
$$\sim -1/3\,\frac{n^{-4/3}}{\Gamma(2/3)} - 1/6\,\frac{\sqrt{3}\Gamma(2/3)n^{-5/3}}{\pi} - 1/18\,\frac{n^{-7/3}}{\Gamma(2/3)} - \frac{19}{216}\,\frac{\sqrt{3}\Gamma(2/3)n^{-8/3}}{\pi} + O(n^{-3})$$

$$\text{Galois group}(\partial^7 - x\partial - \frac{1}{2}) = G_2 \subsetneq SO(7,\mathbb{C})$$

$${}_2F_1\Big([\frac{1}{12},\frac{5}{12}],[1];1728\,\frac{z}{(z+16)^3}\Big) = \Big(\frac{z+256}{16\,z+256}\Big)^{-1/4}\cdot\ {}_2F_1\Big([\frac{1}{12},\frac{5}{12}],[1];1728\,\frac{z^2}{(z+256)^3}\Big)$$

$$\text{(generalized) divide and conquer recurrences :}\quad \mu_n = \mu_{n/2} + \mu_{n-1} \Longrightarrow \mu_n = \Theta(n^{\ln n})$$

FIGURE 1.1 – Nos méthodes ont une grande généralité : les sommes, les intégrales, les polynômes orthogonaux, les q-séries sont autant d'objets qui tombent dans l'escarcelle de l'holonomie. Nos méthodes permettent, non pas au cas par cas, mais avec une approche unifiée et automatisable, de faire la **preuve d'identités** sur ces fonctions, d'étudier leurs **asymptotiques**, d'en donner des **valeurs numériques garanties**, de préciser les **propriétés structurelles** des objets correspondants. Étendre l'état de l'art nous oblige à **développer de nouvelles mathématiques, au carrefour de l'algèbre, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie des nombres et du calcul formel.** Au-delà du challenge mathématique, et de contribuer aux **super-calculatrices de demain**, nos travaux ont des **applications** directes en combinatoire, en informatique, en ingénierie et en physique.

1.2 Des objectifs ambitieux, au carrefour de nombreux domaines

Voici la liste de nos principales tâches, nous en détaillons la plupart des points plus en profondeur dans le chapitre 2 (programme scientifique) :

- En physique : fonctions spéciales, transitions de phase, modèles résolubles. La plupart des fonctions apparaissant en physique sont holonomes ; c'est la clef de l'évaluation rapide en multi-précision de ces "fonctions spéciales", du calcul de leurs transformées ou de leurs développements (voir [AAR99] ou notre librairie en ligne [BCD$^+$10]). Un premier objectif consiste à **gérer complètement les développements liés à des singularités irrégulières** [DMR07].
En physique statistique, de nombreux exposants critiques ont été conjecturés, sous l'hypothèse d'une certaine invariance conforme. Les transitions de phases physiques correspondent génériquement à des valeurs critiques où une fonction sous-jacente cesse d'être analytique. Il s'agit de comprendre comment des singularités confluent en fonction des paramètres du modèle : on est ici confronté au défi de **développer la théorie asymptotique des fonctions holonomes multivariées, ce qui permettra aussi l'obtention automatique de lois limites [BFSS01, FS09, PW13] et d'étudier des transitions de phase**.

Les modèles physiques permettant d'unifier les 4 forces fondamentales passent par des modèles dont la géométrie est gouvernée par une variété de Calabi–Yau. Ces variétés découlent de propriétés d'invariance conforme et vont par paire (on parle de "symétrie miroir"), ce qui a en retour des contreparties sur les équations de Picard–Fuchs associées, que nous étudierons en détail [BBC$^+$13, Del13]. Par ailleurs, des travaux récents [BBH$^+$11] invitent à étudier **pourquoi des intégrales n-uples issues de problèmes fondamentaux de physique (tel le modèle d'Ising) sont intrinsèquement liées à la théorie des courbes elliptiques, des formes modulaires, symétries miroirs et autres Calabi–Yau**. Au final, des considérations initialement très physiques (des modèles intégrables de mécanique statistique, de théorie des champs) se ramènent à des questions sur des objets ayant des propriétés arithmétiques et algébriques fascinantes, sur lesquelles nous avons une forte expertise.

- En informatique, en combinatoire, en théorie des probabilités. Comme illustré abondamment par les ouvrages de Knuth (*The Art of Computer Programming*) et de Flajolet & Sedgewick (*Analytic Combinatorics*), l'analyse fine de la plupart des algorithmes consiste à étudier des récurrences dont les séries génératrices associées sont holonomes. Notre objectif est ici est d'**engranger les progrès théoriques et techniques nécessaires pour établir leur comportement asymptotique, donnant ainsi automatiquement le coût en temps/mémoire d'un algorithme**.

De multiples structures combinatoires et de nombreux processus d'évolution tombent dans l'escarcelle des fonctions holonomes (permutations, arbres, listes, graphes, cartes, mots, automates, chemins, partitions, suites P-automatiques [BFSS01, BM06, AB14]). Par exemple, pour les marches (aléatoires ou déterministes), nos travaux ont abouti à d'intrigantes conjectures : le caractère holonome de la série génératrice serait relié à la finitude d'un certain groupe construit à partir de la liste des sauts autorisés (ce qui relie élégamment une propriété d'holonomie à une propriété de structure du modèle). La question de la décidabilité et du coût algorithmique du test de finitude de ce groupe reste fort ardue. Nous souhaitons aussi mieux comprendre le lien entre des solutions données par des "pullbacks" d'hypergéométriques et les paramétrisations de l'équation en termes de fonctions elliptiques de Weierstrass. Les modèles de marches dans un quart de plan sont toujours l'objet d'une vive activité [KR12, BRS14], motivée par des applications en théorie des files d'attente, en finance, en analyse complexe, en biologie des populations. Nous avons comme objectif d'**étudier des modèles de marches aléatoires plus complexes**, souvent issus de la physique : marches en dimension > 2, ou sur réseau autre que $\mathbb{Z}^d$, ou ayant des sauts plus grands que un, ou pour des confinements à des "chambres de Weyl".

En combinatoire, de nombreux objets fondamentaux (comme des permutations et des cartes) sont régis par des équations fonctionnelles similaires à celle des marches contraintes (équations fonctionnelles pour lesquelles on a besoin de variables “catalytiques”) [BMJ06]. Pour ces problèmes, on a pour objectif de **décider la nature holonome (ou non) des séries génératrices**. Ceci joue un rôle clef, tant pour l'énumération que pour l'étude asymptotique, ainsi que pour la génération aléatoire de ces objets via la méthode de Boltzmann [BBJ13].

En informatique, le problème fondateur de l'analyse d'algorithmes en moyenne (*Linear probing hashing*, par Knuth) donne lieu à des équations aux q-différences, dont la dynamique est liée à des objets aussi fondamentaux que le mouvement brownien ou des processus de fragmentations. Nous conjecturons que **ces équations suivent une loi d'Airy (comme tout paramètre additif de grammaire avec attribut, au sens de Knuth)** [BL14].

Des travaux récents [GL14] ont montré que les polynômes de Jones associés à des nœuds menaient à de nouvelles identités de q-séries, conjecturales. Sur les q-séries de manière générale, nous visons à automatiser ces identités. De même, on peut espérer réparer la conjecture de Nahm sur la modularité de séries q-hypergéométriques dont on sait qu'elle est vraie dans certains cas (Zagier) mais fausse en général [VZ11]. Dans tous ces contextes, il serait clairement intéressant de **pouvoir décider, à l'aide du calcul formel, si l'on a ou pas une forme (mock) modulaire**. Ce dernier permettrait également de gérer l'introduction d'une variable catalytique dans des partitions contraintes [ALL02], idée qui permet d'obtenir des systèmes d'équations aux q-différences et nous souhaitons alors développer une approche permettant d'en tirer une équation de type “produit infini”, ce qui au final **fournit des identités dans le monde des formes modulaires**.

- En calcul formel et numérique. Comme illustré par l'ouvrage *A=B* de Petkovšek, Wilf et Zeilberger, les fonctions holonomes sont la clef pour la **preuve automatique d'identités** (calcul d'intégrales, de sommes finies ou infinies, de transformées, de développements...). Cela passe par de l'algèbre et ce projet développera une synergie entre D-modules, algèbres de Ore, Galois différentiel et asymptotique, et visera à **trouver des alternatives efficaces à des algorithmes connus pour avoir des complexités élevées**.

Toute fonction algébrique est trivialement D-finie, mais décider si une fonction D-finie est algébrique est très complexe. Beukers et Rodriguez-Villegas ont donné un exemple de fonction très simple (hypergéométrique généralisée) ayant un haut degré d'algébricité : la suite entière $(30n)!n!/((15n)!(10n)!(6n)!)$ qui apparaît dans les travaux de Chebyshev sur la distribution des nombres premiers a une série génératrice algébrique de degré 483840 ; les approches classiques par *guess and prove* sont donc ici inenvisageables (la limite de l'état de l'art étant sans doute atteint par le résultat de Bostan et Kauers sur l'algébricité des marches de Gessel [BK10]). Ainsi, **savoir si une solution d'équation différentielle est en fait algébrique, ou si elle est “décomposable” en des tours de briques de base plus simples, trouver l'équation minimale, sont autant de challenges**, et il convient d'identifier les bons outils (mathématiques) et les bonnes structures (informatiques) pour arriver à les manipuler.

Les coefficients de fonctions algébriques sont exprimables comme sommes imbriquées de binomiaux. Une conjecture de Zeilberger affirme que toute fonction holonome admettrait aussi une telle formule close. La théorie des G-functions [FR14] impose des restrictions à une telle affirmation, mais de nombreux exemples issus de la combinatoire, des probabilités, de la théorie des nombres et de la physique suggèrent qu'une variante de cette conjecture est vraie. Nous souhaitons donc inverser l'algorithme de Zeilberger, c'est-à-dire, **connaissant une récurrence, écrire sa solution sous la forme $\sum_k F(n,k)$** (où les $F(n,k)$ sont par exemple des binomiaux multipliés par une fraction rationnelle). Ce problème algorithmique subtil aurait notamment des conséquences sur des approximations rationnelles de la fonction zêta en les entiers (suite aux travaux de Beukers, Rivoal et al.). Ces sommes de binomiaux sont vraisemblablement liées à des calculs de “diagonales” et donc à l'étude des singularités de certaines courbes (travaux de Grothendieck, Dwork, Griffiths, Christol). La maîtrise de ces singularités permettra d'avoir des algorithmes optimaux d'extraction de diagonales [BLS13], dont nous avons déjà vu l'importance dans notre item “holonomie et physique”.

- En théorie des nombres, des questions sur la transcendance des constantes fondamentales des mathématiques font surgir des fonctions holonomes [Del13, FR14]. Nous visons à donner une expression des coefficients de fonctions holonomes, et de leur asymptotique : $f_n \sim KC^n n^\alpha \exp(cn^{1/r}) \ln(n)^b$ (K : constante de Stokes, C : constante de croissance, α : exposant critique, r : indice de ramification, b : indice de résonance). Nous préciserons l'ensemble des valeurs réalisables par K, C et α, ce qui fournit en retour de nouveaux critères de non holonomie. Kontsevich et Zagier ont introduit une nouvelle classe de nombres : les périodes (la classe des constantes définies par des intégrales itérées). Notre objectif est de **comparer l'ensemble des périodes de Kontsevich–Zagier à celui des valeurs de fonctions hypergéométriques/holonomes, et à l'ensemble des constantes de Stokes K**.

Des intégrales liées à des diagrammes de Feynman font apparaître des périodes appelées "polyzêtas" ou "valeurs zêta multiples" (MZV). Nous étudierons **comment certaines algèbres de Lie généralisent au monde non-commutatif des résultats du monde D-fini, et les identités entre polyzêtas qui en découlent** (les opérations de shuffle en théorie des langages codant certaines manipulations sur les intégrales).

Les q-séries illustrent également que l'holonomie est au carrefour de différents mondes très riches. Par exemple, les travaux du physicien McCoy relient des modèles physiques à des identités du type Rogers–Ramanujan[KMM95]. Nous souhaitons **comprendre pourquoi ces séries apparaissent, et automatiser les calculs afférents**, par exemple des avatars du "Master theorem" de Ramanujan, ou encore des formules impliquant des fonctions mock-thêta, ou des formes modulaires [Lov14]. Les comportements asymptotiques correspondants sont subtils, car les fonctions ont souvent une frontière naturelle ; la méthode du cercle, ou celle de Meinardus, qui fournissent des asymptotiques du type de la formule de Hardy–Ramanajan–Rademacher pour les partitions d'entiers restent à adapter dans un cadre plus générique. Leur automatisation est aussi un challenge (les séries génératrices de Lambert, de Dirichlet, les transformées de Mellin sont alors omniprésents). Par ailleurs, Don Zagier et al. [DMZ14] ont montré de nouveaux liens, parfois conjecturaux, entre problèmes physiques et q-séries, et des dimensions de représentation de groupes finis sporadiques. Les q-séries ont souvent un sens analytique pour $|q| < 1$ ou $|q| > 1$, mais pas de sens sur tout $\mathbb{C}$. Ramanujan a joué de façon heuristique avec ce phénomène ; **comprendre rigoureusement comment sont altérées les identités lorsque l'on traverse le mur $|q| = 1$** serait un gros progrès (à lier aussi à la "dualité magique de Ramanujan") [FS09].

- En algèbre et analyse (théorie de Galois différentielle, q-différences). On peut associer un groupe (dit de Galois différentiel) aux solutions d'une équation différentielle linéaire. Notre objectif est d'**étudier le lien entre algèbre et analyse pour ces groupes de Galois différentiels**. En effet, autant ce groupe de Galois peut aider à résoudre des questions asymptotiques, autant l'étude asymptotique peut aider à trouver le groupe (ce sont deux pistes prometteuses à ce jour insuffisamment exploitées, esquissées par l'approche de van der Hoeven utilisant des théorèmes de densité de Schlesinger–Ramis pour des calculs effectifs, ou des approches par désingularitions).

Stokes a montré qu'une solution d'une équation différentielle peut avoir des comportements asymptotiques différents sur différents secteurs du plan complexe. Il existe des matrices "de changement de base" qui permettent de passer d'un comportement à l'autre (voir la fonction d'Airy, ubiquitaire en optique, mécanique quantique, et... en probabilités et combinatoire [3]). L'algorithme de Frobenius appliqué à des équations aux q-différences permet une approximation uniforme de la monodromie de l'équation différentielle associée (celle où l'opérateur $f(x) \mapsto f(qx)$ est remplacé par l'opérateur $f(x) \mapsto \frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}$, qui donne à la limite $q \to 1$ la dérivée classique). Combiné avec le travail en cours de Thomas Dreyfus (un de nos doctorants) sur les solutions méromorphes d'équations aux q-différences, cela permettra de **d'obtenir les matrices de Stokes des équations *aux q-différences*, et donc, à la limite, un algorithme numérique pour les équations *différentielles***. Nous avons en outre des pistes pour une conjecture de Grothendieck liée à la p-courbure [DV02], que nous avons réussi à démontrer dans le cas aux q-différences.

1.3 Une équipe solide, au plus près de la recherche mondiale

Ce projet regroupe **20 membres permanents**, avec une moyenne d'âge de 42 ans. Ce sont tous des chercheurs très actifs au niveau international (représentant un ensemble de plus de **650 publications**), et ont notamment obtenu divers **prix scientifiques** : Prix de l'Académie des sciences (1982, 2001, 2002, 2009, 2013) pour J.-P. Ramis, T. Rivoal, M. Bousquet-Mélou, C. Banderier, O. Bodini, prix de Jacques Neveu 2010 pour K. Rashel, prix de thèse de l'École polytechnique 1998, 2004 et 2012 et de l'Association française d'informatique fondamentale en 2004 pour F. Chyzak, A. Bostan, M. Mezzarobba, médaille d'argent du CNRS 2014 pour M. Bousquet-Mélou.

Les compétences requises pour mener à bien notre projet correspondent à l'union des domaines d'expertise des participants, qui s'avèrent être parmi les meilleurs spécialistes mondiaux de leur domaine ; nous listons en page 1 certaines de ces compétences, illustrant ainsi la **parfaite complémentarité des membres du projet**. Les références bibliographiques à la fin de cette proposition ANR montrent que **nous interagissons avec les meilleurs experts mondiaux** des domaines concernés (Yves André, George Andrews, Fritz Beukers, Hsien-Kuei Hwang, Michael Drmota, Anthony Guttmann, Mark Van Hoeij, Manuel Kauers, Christian Krattenthaler, Barry McCoy, Bernard Malgrange, Peter Paule, Michael Singer, Harold Tracy, Doron Zeilberger, Wadim Zudilin, . . ., pour n'en citer que quelques-uns). Nous sommes par ailleurs impliqués dans la plupart des **conférences majeures** des domaines couverts par Holonomix : Analysis of Algorithms (AofA), Formal power series and algebraic combinatorics (FPSAC), International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC), Journées arithmétiques, ... Les participants de ce projet sont répartis sur 15 établissements, la moitié sont sur Paris (Univ. Paris 6, 7, 11, 13, Versailles, Polytechnique, INRIA Saclay), et l'autre moitié est en province (Bordeaux, Dijon, Grenoble, Limoges, Lyon, Marseille, Toulouse, Tours). Un tiers des participants de ce projet est lié au GDR IM (informatique mathématique), un tiers est issu de la théorie des nombres, tandis que le tiers restant via de l'algèbre, l'analyse, de la théorie des probabilités, de la physique. Notre projet contribuera ainsi à une forte **synergie et à une structuration plus large incluant informaticiens, physiciens et mathématiciens**. Nous avons d'ailleurs des contacts internationaux, notamment avec l'Autriche, pour **initier une telle interface au niveau européen**.

1.4 Un atout : une complémentarité disciplinaire

Ce projet ANR fait suite à un projet CNRS "PEPS" 2012-2013 ("Projets Exploratoires Premier Soutien") qui regroupait des informaticiens (calcul formel) et des mathématiciens (théorie des nombres), et dont le **succès, en termes de publications, de synergie et d'échanges de connaissances**, nous a convaincus que nous étions prêts pour un changement d'échelle en incluant des collègues d'autres disciplines. En effet, nos rencontres ont permis d'atteindre un langage commun sur les structures mathématiques cachées derrière nos problèmes respectifs, et de montrer que notre complémentarité permettait de **jolies avancées**, tout en requérant de plus une exploration de domaines voisins. Suite à ce projet PEPS, de nombreux articles sont en préparation et nous savons d'ores et déjà que plusieurs de nos nouveaux objectifs nécessitent la complémentarité thématique que nous apportons via ce projet ANR (analyse, asymptotique, algèbre, géométrie algébrique, combinatoire, physique, calcul formel). Dans ce but, notre projet regroupe des personnes d'**horizons différents, couvrant l'ensemble des compétences requises**. Cela reflète d'ailleurs fort bien le **caractère transversal de la notion d'holonomie**. Ce projet permettra en passant de structurer un ensemble de chercheurs, parfois isolés thématiquement, couvrant bien le territoire français (de Grenoble à Bordeaux, de Paris à Toulouse avec un barycentre en IDF) et financera missions, invitations d'experts étrangers, des ateliers, un séminaire régulier, 4 conférences, des stagiaires, une thèse et deux postdoctorats.

1.5 Une vision effective, une visée algorithmique

Nous évoquons nos retombées en développement logiciel en section 3.3.

2 Programme scientifique

Nous détaillons maintenant les cinq tâches principales de projet : holonomie et physique, holonomie et combinatoire, holonomie et calcul formel, holonomie et théorie des nombres, holonomie et théorie de Galois différentielle. Chaque tâche implique directement 8 à 9 participants (membres permanents) du projet, et contient 3 à 4 grandes sous-tâches ambitieuses, qui s'avèrent en fait reliées à d'autres tâches du projet. Comme nombre de nos objectifs sont ambitieux, nous donnons aussi de multiples sous-objectifs sur lesquels nous sommes plus assurés d'obtenir d'importantes avancées (comme illustrés par les résultats préliminaires donnés dans notre bibliographie).

2.1 Tâche #1 : holonomie et physique

Participants : Cyril Banderier, Olivier Bodini, Alin Bostan, Mireille Bousquet-Mélou, Gilles Christol, Thierry Combot, Jean-Marie Maillard (coordinateur de tâche), Jean-Pierre Ramis, Julien Roques.

2.1.1 Fonctions spéciales, phénomène de Stokes, transitions de phase

La plupart des fonctions apparaissant en physique sont holonomes ; c'est la clef de l'évaluation rapide en multi-précision de ces "fonctions spéciales", du calcul de leurs transformées ou de leurs développements [BCD+10, SB13]. Un premier objectif consiste à **gérer complètement ces fonctions, notamment les développements liés à des singularités irrégulières** [DMR07].

Airy functions of first and second kind, Anger function, inverse cosine, inverse cotangent, inverse hyperbolic cotangent, inverse cosecant, inverse secant, inverse sine, inverse tangent, inverse (hyperbolic) cosine/cotangent/cosecant/secant/sine/tangent, Bessel functions of first and second kind (modified or not), Chebyshev functions of first and second kind, hyperbolic cosine integral, cosine integral, cosine, hyperbolic cosine, Coulomb function, Whittaker's parabolic function, parabolic cylinder function, differentiated Airy functions of first and second kind, Dawson integral, dilogarithm, exponential integral, complete and incomplete elliptic integrals of first and second kind (complementary or not) , error function, complementary error function, iterated integral of complementary error function, imaginary error function, exponential, Gegenbauer ultraspherical function, Hermite function, Jacobi function, Kummer function, Laguerre function, associated Legendre functions of first and second kind, logarithm, Lommel function, (hyperbolic) sine integral, (hyperbolic) sine, shifted sine integral, Struve function, Weber function, Whittaker function.
(+Fourier transforms, Hankel transforms, Hilbert transforms, Laplace transforms, Mellin transforms, and their inverses.)

FIGURE 2.1 – En physique, en mécanique, la dynamique des processus est une source naturelle d'équations différentielles fondamentales. Leurs solutions sont les fonctions spéciales, et c'est l'une des grandes raisons de l'universalité de l'holonomie. Nos travaux et nos librairies traitent la plupart des identités liées aux fonctions listées ci-dessous. Il demeure néanmoins des verrous analytiques et algorithmiques. Une partie de notre projet est dédiée à oter ces verrous, grâce à une interaction entre plusieurs disciplines (algèbre, analyse, calcul formel).

En physique statistique, de nombreux exposants critiques ont été conjecturés, sous l'hypothèse d'une certaine invariance conforme. Nous souhaitons ici revisiter ces cas via des concepts typiques de l'holonomie, la globale nilpotence ou la théorie des G-fonctions, qui peut expliquer les cas où les exposants critiques sont rationnels (et ce en tous les points singuliers), dès lors que l'on a des séries à coefficients entiers et de rayon non nul. Dans certains cas, les séries ne sont pas à coefficients entiers (coefficients codant des moyennes) ou encore les séries ne sont pas holonomes et la théorie des G-fonctions ne s'applique donc pas (les exposants critiques sont alors par exemple des algébriques quadratiques, conformément aux formules KPZ). Pour attaquer ces cas retors, nous utiliserons l'indice Gevrey (transformations de Borel non entières) pour lever le verrou du rayon de convergence nul (ou des approches p-adiques qui peuvent aider dans les cas de coefficients rationnels). Nous exploiterons ensuite le fait que des modèles non-holonomes (polyominos, marches auto-évitantes, structures croissantes) peuvent être encadrés par deux séries holonomes ou algébrico-différentielles (mais ayant un développement de Hakuhara–Turrittin, de type psi-séries [CFCHM14]), prouvant ainsi des asymptotiques fines, et fournissant éventuellement le même exposant critique.

Les transitions de phases physiques correspondent génériquement à des valeurs critiques où une fonction sous-jacente cesse d'être analytique. Pour les modèles encodés par une fonction de partition (une série génératrice) bivariée $F(z, u)$, il s'agit de comprendre comment des singularités confluent en fonction des paramètres du modèle (typiquement, au voisinage de $u = 1$) : on est ici confronté au défi de **développer la théorie asymptotique des fonctions holonomes multivariées, ce qui permettra aussi l'obtention automatique de lois limites [FS09] et d'étudier des transitions de phase**. Les singularités ne sont plus des points, mais des surfaces, et la "géométrie" du problème joue donc un rôle dans les méthodes analytiques correspondantes (résidus multivariées, etc). Le cas de 2 points cols coalescents fait par exemple surgir la fonction d'Airy [BFSS01], et nous souhaitons suivre cette approche pour étudier des coalescence plus compliquées, et des schémas compositions fonctionelles triples, chacun critique (chaque fonction est singulière en la valeur atteinte par l'autre fonction en son rayon de convergence). **En analyse complexe**, ce projet se heurte aux limites de l'état de l'art et amorce une compréhension effective des calculs de résidus multivariés, et permet l'étude de fonctions holonomes multivariées. Signalons que, déjà dans le cadre de fonctions rationnelles en deux variables, c'est un sujet complexe, objet de travaux récents [PW13].

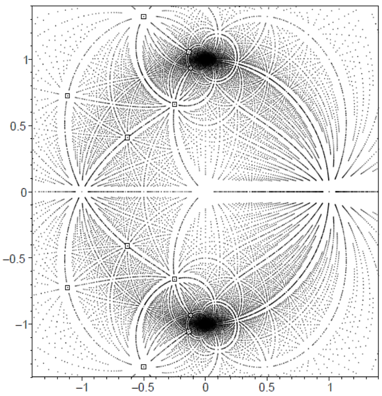
2.1.2 De la théorie des cordes à la théorie des nombres

Les modèles physiques permettant d'unifier les 4 forces fondamentales (l'interaction nucléaire forte, l'interaction électromagnétique, l'interaction nucléaire faible et la gravitation) passent par 5 modèles de théorie des supercordes, conjecturalement unifiés via la théorie M d'Edgar Witten, au prix de supposer que nous vivons dans un espace ayant bien plus de dimensions que les 4 dimensions usuelles (auxquelles il faut alors ajouter quelques degrés de libertés, plus 6 dimensions "enroulées" dont la géométrie est gouvernée par une variété de Calabi–Yau). Ces variétés découlent de propriétés d'holomorphie et vont par paire (on parle de "symétrie miroir"), ce qui a en retour des conséquences fortes sur les équations de Picard–Fuchs associées, et c'est à ce niveau que notre projet Holonomix intervient : d'une part nos études préliminaires de tables Batyrev, von Straten, Almquvist, Eckendorf, Zudilin [AESZ10] montre que contrairement à ce qui était jusqu'ici cru, ces équations ne sont pas toujours d'ordre 4 ; d'autre part certaines propriétés arithmétiques de ces séries sont intimement liés à la preuve d'irrationalité de $\zeta(3)$, Par ailleurs, les coefficients de séries associées à ces équations correspondent aux *instantons numbers*, que nous étudierons en détail dans notre tâche "théorie des nombres" [BBH$^+$11, Del13].

2.1.3 Modèle d'Ising, intégrales n-uples et diagonales de fractions rationnelles

Nous avons montré que des intégrales n-uples de la physique (modèle d'Ising, lattice Green functions, *etc.*) sont intimement reliés à des diagonales de fonctions rationnelles [BBH$^+$11]. Si l'on considère les opérateurs d'ordre minimaux annulant ces diagonales, un phénomène remarquable apparaît : ils se factorisent avec des facteurs qui ont tous la propriété d'être homomorphes à leurs adjoints, et donc les groupes de Galois différentiels correspondants sont inclus dans les groupes orthogonaux ou symplectiques. Nous souhaitons expliquer ce qui ce cache derrière ce phénomène.

Un certain nombre de questions se posent permettant de faire le partage des eaux en les propriétés et structures mathématiques (voire "géométrique") et celles relevant de la physique. Les facteurs précédents semblent, dans le cadre de la physique, annuler eux-mêmes des diagonales de fonctions rationnelles : s'agit-il d'une propriété mathématique générale ou s'agit-il d'une propriété relevant de la physique (i.e. quelle est alors la contrainte que la nature "impose" à ces systèmes pour qu'ils aient cette propriété) ? Par ailleurs, génériquement, les diagonales de fonctions rationnelles ne conduisent pas automatiquement à des opérateurs homomorphes à leurs adjoints (même dans des extensions algébriques quelconques, voir l'exemple hypergéométrique simple ${}_3F_2([1/3, 1/3, 1/3], [1, 1], 3^5 \cdot x))$. En revanche, les diagonales de fonctions rationnelles qui émergent de la physique, semblent avoir cette propriété de dualité associée à des groupes de Galois différentiels "spéciaux". Peut-on caractériser les diagonales de fonctions rationnelles ou les intégrales n-uples correspondant à des diagonales de fonctions rationnelles qui ont cette propriété de dualité ? Une étude systématique d'un grand nombre d'exemples d'opérateurs annulant des diagonales de fonctions rationnelles devrait permettre, dans un premier temps, de fournir des réponses expérimentales à ces deux types de questions, fournissant ainsi une compréhension mathématique profonde d'un grand nombre de problèmes importants de physique théorique (car relevant in fine d'un phénomène intégrabilité au sens large). En retour, on peut penser que ces résultats permettront d'effectuer quelques progrès sur la conjecture Christol, par exemple sur la question restant pendante depuis plusieurs décennies, de savoir si l'exemple hypergéométrique très simple ${}_3F_2([1/9, 4/9, 5/9], [1/3, 1], 3^6 \cdot x)$ est, oui ou non, une diagonale de fonction rationnelle, alors que l'opérateur correspondant n'a pas cette propriété de dualité.



Les études holonomiques que nous proposons posent, tout naturellement, la question du partage des eaux avec le monde non-holonome. Par exemple, une quantité éminemment physique comme la **susceptibilité magnétique du modèle d'Ising est une fonction non-holonome, mais qui se décompose de façon fructueuse en une somme infinie de fonctions holonomes** (chaque sommant est en effet une intégrales n-uples, diagonale de fonction rationnelle). Cette fonction présente une frontière naturelle (liée aux points singuliers dont l'union est représentée dans l'image ci-contre) et les conséquences sont très loin d'avoir été tirées sur ce modèle phare de la physique théorique.

De même, la théorie des déformations (conservant la monodromie) de systèmes Fuchsiens est liée de bien des manières à ces études de systèmes holonomes. Des fonctions holonomes peuvent être solutions d'équations non-linéaires de Painlevé, des transcendantes de Painlevé comme les fonctions tau, devenant holonomes. Rappelons qu'une équation non-linéaire ayant la propriété de Painlevé, à savoir l'équation de Chazy III, est l'exemple le plus simple d'une équation non-linéaire d'ordre trois, ayant une frontière naturelle. Tous ces liens entre l'holonome et le non-linéaire correspondent à des questions importantes pour la physique.

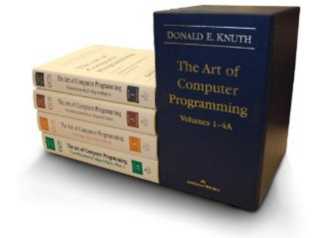
Nos travaux expliquerons ainsi **pourquoi des intégrales n-uples issues de problèmes fondamentaux de physique (tel le modèle d'Ising) sont intrinsèquement liées à la théorie des courbes elliptiques, des fomes modulaires, symétries miroirs et autres Calabi–Yau**.

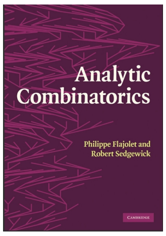
Au final, des considérations initialement très physiques (des modèles intégrables de mécanique statistique, de théorie des champs) se ramènent à des questions sur des objets ayant des propriétés arithmétiques et algébriques fascinantes, sur lesquelles nous avons une forte expertise.

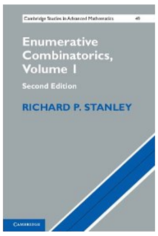
2.2 Tâche #2 : holonomie et combinatoire

Participants : Boris Adamczewski, Cyril Banderier (coordinateur de tâche), Olivier Bodini, Alin Bostan, Mireille Bousquet-Mélou, Jeremy Lovejoy, Kilian Raschel.

2.2.1 Analyse d'algorithmes et de structures combinatoires





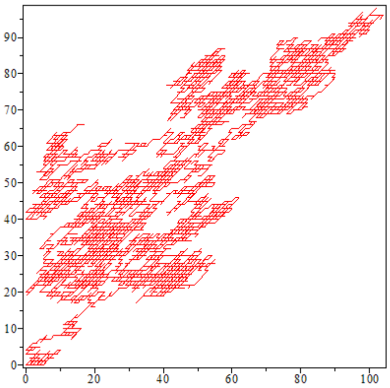


En informatique, Knuth a montré que la création d'algorithmes efficaces repose souvent sur une analyse fine des structures mathématiques sous-jacentes, dont l'analyse revient essentiellement à étudier des récurrences. Flajolet et Sedgewick ont développé une méthode unifiée (via des séries génératrices et de l'analyse complexe) pour étudier celles-ci. Les séries dont les coefficients vérifient une récurrence sont appelées "holonomes", et Stanley a montré l'importance de cette classe en combinatoire. Dans cette section "Analyse d'algorithmes et de structures combinatoires", l'état de l'art est ainsi fort bien résumé par les ouvrages ci-contres, et nous nous proposons de rebondir sur les pages laissées blanches par ces grands auteurs, via notre étude systématique d'objets holonomes.

Commençons avec un joli exemple de la philosophie de Knuth : la **génération aléatoire uniforme de structures combinatoires** (arbres, chemins, pavages, mots, partitions, permutations, graphes, cartes, ...) qui a des applications importantes en ingénierie (white box testing), en probabilités (inférence de lois limites), en informatique (analyse en moyenne d'algorithmes). Pendant des décennies, les meilleures méthodes avaient un coût quadratique (et atteignaient ainsi la génération d'ojets de taille 100 ou 1000), et ce fut une révolution lorsque Flajolet et al. ont introduit la "méthode de Boltzmann" qui permet, via un usage astucieux des séries génératrices, d'engendrer les structures de base en temps quasi-linéaire (ce qui permet ainsi de désormais générer des structures de taille 10^6). Nous avons contribué à étendre cette approche à des opérateurs liés à des "dérivées" (pointage, shuffle). Il demeure toutefois à développer la **méthode de Boltzmann pour les systèmes holonomes** (D-finis : systèmes d'équations différentielles, éventuellement multivariées) et à en faire l'analyse de complexité. Cela a des applications directes (arbres croissants, modèles d'urnes, ...), ainsi que pour tout objet ayant une série algébrique, puisque celle-ci est forcément holonome ! Nous avons ainsi obtenu le générateur aléatoire pour les arbres (unaires-)binaires le plus efficace à ce jour [BBJ13] et nous désirons étendre notre approche sur la génération aléatoire random-bit-optimal à d'autres arbres (ne serait-ce que pour les arbres (1-2-3)-aires, le problème est bien plus difficile car le singularité dominante n'est plus rationnelle, ce qui posent des problèmes pour simuler les lois avec un **nombre de bits minimal**) et à d'autres structures, mais se pose alors un problème de non-positivé des coefficients dans les équations différentielles correspondantes.

Ceci est l'une des raisons qui nous amène à notre **étude des fonctions $\mathbb{N}$-algébriques, $\mathbb{N}$-holonomes.** Une fonction algébrique $Y_1(z)$ est dite $\mathbb{N}$-algébrique si elle est solution d'un système $\{Y_i = P_i(z, Y_1, \ldots, Y_m)\}_{i=1..m}$ où les polynômes P_i sont à coefficients dans $\mathbb{N}$. Cela correspond à l'importante classe des fonctions comptant le nombre de mots engendrés par une grammaire context-free et cette classe joue un grand rôle en combinatoire [BM06]. Une fonction D-finie est dite $\mathbb{N}$-D-finie si elle est solution d'un système $Y_i = P_i(z, Y, Y')$ où les polynômes P_i sont à coefficients dans $\mathbb{N}$ (n.b. : toute équation holonome peut se ramener à un tel système d'ordre 1, seule la positivité des coefficients est une restriction). L'introduction de cette nouvelle classe est motivée par le fait que décider (ce qui est un grand problème ouvert) si une fonction est $\mathbb{N}$-algébrique, ou $\mathbb{N}$-holonome a des répercussions importantes : cela donne des renseignements structuraux forts, et permet d'engendrer les objets sous-jacents en temps linéaire ! Nous souhaitons aussi étudier les asymptotiques (rayons de convergence, exposants critiques...) des fonctions de ces classes, en généralisant notre démonstration de la conjecture de Flajolet (les exposants critiques sont des nombres dyadiques) [BD14]. Un grand problème ouvert sur les récurrences (même dans le cas de récurrences linéaires à coefficients constants) est le problème de Pisot : est-ce que la suite a_n vaut zéro pour un certain n ? Dans [AB12], nous avons étendu le théorème de Skolem–Lerch–Mahler (l'ensemble des tels n sont dans une union finie de progressions arithmétiques) aux fonctions algébriques, et nous en étudierons diverses extensions holonomes. Ces problèmes ont des liens avec de nombreux problèmes NP-hard et nous souhaitons utiliser nos résultats asymptotiques pour obtenir des bornes effectives. Nous regardons des questions de clôture liées : ($\mathbb{N}$-)holonomie de $|a_n|$, encadrements de a_n (seule une borne sup large est due à Pólya), etc. Une étude de cette question modulo p (en la couplant à une formule donnant les coefficients d'algébriques sous forme de sommes emboîtées de binomiaux [BD14]) pourrait permettre de généraliser le théorème de Christol–Rauzy–Kamae–Mendès France sur les suites p-automatiques, et d'expliquer de nombreuses propriétés mod p^r des récurrences associées.

2.2.2 Holonomie et marches aléatoires



En théorie des probabilités, deux **files d'attente évoluant en parallèle peuvent se modéliser par des chemins dans le quart de plan**. Ci-contre, une génération aléatoire d'une marche de Gessel (sauts autorisés=NE,SO,E,O), qui est l'archétype de modèles 2D difficiles, mais aux propriétés miraculeuses. Le type d'**équation fonctionnelle associée est ubiquitaire en combinatoire**. Nos approches mélangeant propriétés holonomes, calcul formel, combinatoire, théorie des groupes, probabilités et analyse complexe ouvrent la porte à une approche **traitant de façon unifiée** de très larges classes de **marches aléatoires 2D ou 3D** : énumération, asymptotique, temps locaux, hauteur/largeur typiques, lois limites, étude fine du temps passé dans une région, contraintes de zone interdite (plan fendu, etc.).

Rappelons qu'en combinatoire, l'étude des marches a typiquement pour but de compter des marches évoluant selon certaines règles et restant dans un domaine fixé. Jusqu'à présent, la littérature s'est concentrée au cas de la dimension 2, avec des marches contraintes à rester dans le quart de plan tout en se déplaçant uniquement aux plus proches voisins. Afin d'avoir un comptage efficace des chemins (formules explicites, algorithmes) et d'étudier leur asymptotique, leur comportement universel, un outil clef est la série génératrice des nombres de marches (contenant l'information des nombres de marches se terminant en tout point fixé après un nombre quelconque d'étapes). Il est alors crucial de savoir si elle possède certaines propriétés, comme celle d'être une fonction holonome [BMM10]. Un des buts de notre projet est de considérer ce problème avec beaucoup plus de généralité : **nous étudierons les marches en dimension>2 ou admettant d'autres sauts que ceux aux seuls plus proches voisins**. Plus spécifiquement, dans le cas des marches à petits sauts dans un quart de plan, des travaux récents ont montré que la série génératrice est **holonome si et seulement si un certain groupe d'automorphismes est fini**. Ce constat est d'autant plus remarquable qu'il relie une propriété algébrique du modèle à la nature de la série génératrice. Ce parallèle subsiste-t-il en plus grande dimension ? Nous aborderons ce problème par un mélange d'analyse complexe et d'approches algébriques et combinatoires [BBMKM14, FR12, KR12].

Nous commencerons par mieux comprendre ce qu'est ce groupe (pourquoi, en dimension 2, n'intervient-il que pour la contrainte du quart de plan, et non pour celle du demi-plan ?), et aussi par mieux cerner son influence sur les formules énumératives et sur le comportement asymptotique de la marche. Nous souhaitons de plus classifier les modèles de marches dans les orthants (généralisation du quadrant en dimension supérieure) par la nature de la série génératrice. Un objectif particulièrement ambitieux serait d'obtenir une classification en terme d'holonomie des modèles de marches (contraintes de rester dans des secteurs) en dimension quelconque.

2.2.3 Holonomie et q-séries

La théorie des noeuds est utile en mathématiques (e.g. en topologie ou pour les systèmes dynamiques), en physique pour le fonctionnement d'une famille d'ordinateurs quantiques (ligne d'univers des anyons), en biologie via l'action topoisomérases sur la structure topologique de l'ADN.

V  $= \sqrt{t}\,(1+t^2)$

V  $= \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + 1 - t + t^2$

En théorie des nœuds, le polynôme de Jones V est un précieux invariant topologique, aidant à identifier des nœuds et capable de gérer les symétries dans un miroir (en fait, c'est un polynôme de Laurent en $\sqrt{t}$). **Le polynôme de Jones coloré est une *série* holonome** vérifiant une équation de q-récurrence, dont la limite en $q = 1$ permet de retrouver (conjecturalement) les invariants classiques.

Des travaux récents de Garoufalidis & Lê [GL14] et d'Armond & Dasbach [AO11] sur le polynôme de Jones coloré débouchent sur l'**apparition surprenante de nombreuses identités de q-séries**. On retrouve ainsi des identités classiques (idendités d'Andrews–Gordon), mais aussi des identités plus intriguantes comme

$$\sum_{a,b,c\geq 0} \frac{(-1)^a q^{a(3a+1)/2+ab+ac+bc+b+c}}{(q)_a (q)_b (q)_n (q)_{a+b} (q)_{a+c}} = \frac{1}{(q)_\infty^2}\,, \tag{2.1}$$

où nous employons la notation usuelle

$$(a)_n := (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}).$$

Ces travaux posent de nombreuses questions, et nous escomptons deux types de résultats importants : premièrement, nous nous attacherons à **démontrer ces idendités de la théorie des nœuds**. Notre approche se basera sur des idendités de séries hypergéométriques et des transformations de la hiérarchie q-hypergéométrique. Deuxièmement, dans de multiples cas, les techniques de théorie des nœuds aboutissent à une somme multiple comme celle dans le membre gauche de (2.1), mais ne fournissent pas de membre droit. Par exemple, pour le nœud alternant 8_5, la queue du polynôme de Jones coloré est

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{a,b,c,d,e,f,g,h\geq 0\\ a+f\geq b}} (-1)^{b+f} \frac{q^{2a+3a^2-\frac{b}{2}-2ab+\frac{3b^2}{2}+c+ac+d+ad}}{(q)_a(q)_b(q)_c(q)_d(q)_e(q)_f(q)_g(q)_h}\\ \times \frac{q^{cd+e+ae+de+\frac{3f}{2}+4af-4bf+ef+\frac{5f^2}{2}+g+ag-bg+eg+fg+h+ah-bh+fh+gh}}{(q)_{a+c}(q)_{a+d}(q)_{a+e}(q)_{a-b+f}(q)_{a-b+e+f}(q)_{a-b+f+g}(q)_{a-b+f+h}}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Ainsi, non seulement il n'y a pas encore d'identité modulaire détectée, mais, car de tels phénomènes ne peuvent pas surgir par hasard, il se pose alors de plus la question de savoir si le membre droit est une **forme modulaire, mock modulaire**, ou une autre variante. Ceci est en fait relié à une profonde conjecture de Nahm qui vise à prédire qu'une série du type (2.1) ou (2.2) est modulaire, en se basant sur la structure du groupe de Bloch [VZ11]. Nous nous évertuerons donc à identifier un membre droit lorsque cela est possible, et à comprendre pourquoi et quand ces multisommes sont modulaires ou mock modulaires. Au-delà de prouver et classifier ces identités de théorie des nœuds, nous avons de plus une piste algorithmique pour prédire la (mock) modularité, et même de produire des candidats explicites, en nous basant sur une analyse fine de l'asymptotique des coefficients de Fourier associés. Nous étudierons aussi une relation entre le polynôme de Jones coloré et la géométrique hyperbolique : la "conjecture du volume", qui relie ce polynome au volume du nœud, et qui repose en fait sur des développements asymptotiques résurgents (et le fait que des constantes de Stokes soient non nulles), le tout étant lié à la théorie perturbative de Chern–Simons et au groupe de Grothendieck–Teichmuller. On le voit encore avec ce point de recherche, la **transdisciplinarité du projet est manifeste et la complémentarité des participants est un atout important**, et notre budget prévoit à cet effet aussi l'invitation de collègues étrangers.

2.3 Tâche #3 : holonomie et calcul formel

Participants : Alin Bostan, Frédéric Chyzak (coordinateur de tâche), Thierry Combot, Éric Delaygue, Joris van der Hoeven, Marc Mezzarobba, Kilian Raschel, Tanguy Rivoal, Jacques-Arthur Weil.

FIGURE 2.2 – Les ouvrages ci-dessous sont parmis les plus vendus de l'histoire des mathématiques (car touchant un public large de mathématiciens, physiciens, informaticiens, ingénieurs, . . .Tous relèvent en grande part de la théorie de l'holonomie. Tous contiennent des tables, des formules, et ont connu des rééditions corrigeant les inévitables erreurs que contiennent de telles bibles. Notre approche permet d'automatiser les calculs, et de désormais produire ces tables automatiquement. Nous avons une collaboration avec le NIST (National Institute of Standard and Technologies) sur ce sujet. Ces calculs reposent à leur tour sur des avancées mathématiques récentes, et toujours en développement. Notre projet contribuera de façon majeure à cette aventure.

2.3.1 Des calculs symboliques efficaces pour les fonctions holonomes

Nous avons pour objectif de développer des algorithmes rapides permettant de manipuler les fonctions spéciales de façon symboloque, qu'elles soient univariées ou avec paramètres, et d'en extraire automatiquement de multiples informations algebriques at analytiques, dont notamment leur asymptotique. Le cœur de notre recherche portera sur les sommes et les intégrales (paramétrisées). Ces opérations ont de larges applications, que ce soit pour le calcul de transformées intégrales (Laplace, Fourier, Mellin), ou pour la résolution de problèmes combinatoires exprimées via des intégrales (extraction de coefficient via des avatars de la formule de Cauchy, calcul de diagonales). Les algorithmes que nous développerons à cette fin travailleront au niveau des systèmes linéaires d'équations différentielles, et des récurrences.

Intégration et sommation de fonctions spéciales. Nous développerons des algortihmes rapides pour une méthode générale d'intégration de fonction spéciales (le *creative telescoping*), et nous les rendrons efficaces pour des entrées plus générales, liées à des fonctions spéciales. Notre stratégie est de commencer par des classes plus spécifiques (fonctions rationneles, puis algébriques, les fonctions hyperexponentielles, D-finies, les fonctions non-D-finies ; en 2 variables, puis avec un nombre quelconque de variables) ; nous isolerons aussi les problématiques analytiques (qui ne manquent pas de se poser dès lors que l'on a des sommes infinies, ou des intégrales divergentes) en considérant d'abord des types d'intégration avec un saveur plus purement algébrique (terme constant, résidus algénriques, diagonales de séries génératrices venant de la combinatoire). En particulier, nous nous attentons à étendre notre récente nouvelle approche [BCCL10] à des classes plus générales (algébriques avec radicaux emboîtés, par exemple). Nous considérons également des problèmes analogue de sommation.

Résolution d'équation différentielle linéaire, et de tels systèmes. Une sous-tâche du creative telescoping est de résoudre un système d'équations fonctionnelles en termes de solutions rationnelles [Bar99]. Afin d'accélérer cette résolution, une stratégie possible sera de fournir des algorithmes rapides de découplage, afin de ramener la résolution du système à la résolution d'une équation. Nous planifions aussi de regarder des représentations alternatives des solutions afin d'obtenir les complexités minimales.

Algèbre linéaire polynomiale. De nombres opérations algébriques sur les polynômes (dans le monde commutatif !) se réduisent à des multiplications de polynômes, ce qui mène à de l'algorihmique très efficace (transformée de Fourier rapide, etc.). Or l'opérateur annulant une fonction holonome est un polynôme différentiel, donc non commutatif, et nous avons justement récemment fait des progrès pour les opérations sur les polynômes (dans ce monde non commutatif !) : la multiplication d'opérateurs différentiels se réduit à une multiplication matricielle rapide. Nous planifions d'étendre ceci à d'autres opérations fondamentales (division, lcm, gcd). Nous regardons aussi avec soin des cas fréquents pour les applications : lorsque l'ordre de l'opérateur n'est pas du même ordre de grandeur que le degré des ses coefficients. (Il y a d'ailleurs tout un monde à explorer pour des opérateurs non minimaux, qui peuvent s'avérer bien plus creux que l'opérateur minimal). Nous nous attendons à des algorithmes améliorés pour le gcd matriciel, et pour l'intégration.

Applications aux mathématiques expérimentales. Le soin apporté à soigner la complexité des algorithmes mentionnés précédemment va nous permettre de largement dépasser l'état de l'art et d'attaquer des applications qui impliquent des équations d'ordre élevé ou de larges tailles. En combinatoire et théorie des probabilités, nous nous attendons à avancer sur la **classification of de structures combinatoires aussi fondamentales que les marches et les urnes** [FS09], notamment en déterminant si les séries génératrices associées sont rationelles, algébriques, ou D-finies. En physique, des problèmes dont la modélisation impliquent des intégrales de fonctions spéciales comprennent divers modèles fondamentaux de physique statistique, comme le **modèle d'Ising pour le ferromagnétisme**, ou des questions reliées aux systèmes hamiltoniens. La théorie des nombres est un autre riche champs d'application : nous mènerons une approche expérimentale pour la **certification automatique de l'intégralité des coefficients d'applications mirroir** issues de variétés de Calabi–Yau. Cela pourrait mener à la découverte de nouveaux opérateurs de Calabi–Yau operators et à la certification de certains conjecturés. Nous planifions également de découvrir algorithmiquement et de certifier des **récurrences menant aux bons approximants nécesssaires pour des preuves d'irrationnalité** (similairement à l'approche de Zagier rebondissant sur la preuve d'Apéry de l'irrationnalité de $\zeta(3)$). Il est à noté que dans tous ces domaines d'application, nous utiliserons des algorithmes généraux, comme nous l'avons fait dans [BBH+11, BK10, BCvHP12]. Afin de repousser au maximum les limites de ce qui est calculable, nous prévoyons également d'affûter/de spécialiser nos algorithmes pour chaque classe spécifique des domaines sus-mentionnés, vu leur importance.

2.3.2 Formes closes : algorithme de Wilf–Zeilberger inverse

L'algorithme de Wilf–Zeilberger permet, étant donné une suite connue comme somme d'un terme hypergéométrique (par exemple une somme de binomiaux comme les nombres d'Apéry) de déterminer une relation de récurrence satisfaite par cette suite. Plus précisément, cet algorithme fournit une paire constituée d'une relation de récurrence et d'un certificat rationnel. Ce dernier peut servir à l'utilisateur pour redémontrer la validité de la relation de récurrence sur la suite somme, mais est aussi la cause de lenteur principale des algorithmes.

Récemment, nous avons élaboré un algorithme déterminant une relation de récurrence sans calcul de certificat pour les coefficients d'intégrales à paramètres de fractions rationnelles [BLS13]. Notre projet est d'élaborer un algorithme inverse, *i.e.* étant donné une récurrence à coefficients polynomiaux sur $\mathbb{Q}$, de déterminer une forme close pour une solution de cette récurrence.

De nombreux résultats de la littérature de théorie de nombres et de combinatoire a permit de faire émerger la bonne classe de formes closes à laquelle il convient de se restreindre. L'étude des asymptotiques et des propriétés arithmétiques des suites de cette classe devrait permettre, étant donnée une équation, de ne retourner qu'un nombre fini de solutions possibles appartenant à cette classe. Les algorithmes classiques sur les opérateurs différentiels et celui de Bostan–Lairez–Salvy, permettraient ensuite de vérifier automatiquement si ces candidats sont effectivement solutions.

Importance pour la combinatoire. Cet algorithme inverse permettrait de **trouver et de démontrer automatiquement (en échappant ainsi au coûteux calcul de certificat) de nombreuses identités combinatoires** (e.g. les identités entre les nombres de Franel et d'Apéry).

Importance en physique et théorie des nombres. La recherche d'opérateurs différentiels provenant de la géométrie nécessite dans certains cas l'étude des propriétés arithmétiques des solutions de l'équation différentielle associée. Dans le domaine de la symétrie miroir, la recherche d'opérateurs de type Calabi-Yau s'effectue, en particulier, par l'étude de l'intégralité des coefficients de séries construites à partir de solutions et appelées « applications miroir ». À ce jour, la démonstration de l'intégralité de ces coefficients utilise l'existence d'une forme close hypergéométrique d'une solution globalement bornée. La détermination de formes closes pour les solutions d'opérateurs différentiels serait un premier pas pour démontrer qu'ils sont de type Calabi–Yau. Cela enrichirait les informations connues dans les tables d'opérateurs [AESZ10].

Un projet sur plusieurs échelles de temps

– sous 2 ans : L'estimation asymptotique des **sommes multiples de binomiaux** et leurs propriétés arithmétiques élémentaires permettent dans de nombreux cas de ne retourner qu'un nombre fini de représentations possibles. Un projet à court terme est de définir précisément la classe des sommes multiples de binomiaux et d'optimiser la recherche de solutions dans cette classe pour obtenir une complexité raisonnable de l'algorithme. Ceci permettra d'élaborer un premier algorithme de recherche et de démonstration d'identités combinatoires.

– sous 4 ans : Plus généralement, les **séries A-hypergéométriques (généralisation par Gel'fand, Kapranov et Zelevinsky des séries hypergéométriques en plusieurs variables)** et leurs spécialisations fournissent de nombreux exemples de séries génératrices classiques d'origine combinatoire ou arithmétiques. Une étude approfondie des asymptotiques et valuations p-adiques des coefficients de ces séries devrait permettre d'exhiber un algorithme inverse pour une classe de suites beaucoup plus large que celle des sommes multiples de binomiaux [Del13].

2.3.3 Des calculs numériques efficaces pour les fonctions holonomes

Valeurs holonomes effectives. Soit f une fonction holonome satisfaisant une équation différentielle linéaire $L(f) = 0$, où $L \in \bar{\mathbb{Q}}(x)[\partial]$, avec des conditions initiales en un point régulier de $\bar{\mathbb{Q}}$. Il y a des algorithmes fiables et efficaces pour l'évaluation numérique de f ; ils donnent n chiffres de l'évaluation en temps quasi-linéaire $n(\log n)^{O(1)}$. Les premiers algorithmes dans cette voie sont dus aux frères Chudnovsky en 1986 ; leur méthode a été redécouverte, améliorée et généralisée par van der Hoeven [vdH99, vdH01, vdH07b]. En particulier, les limites et les coefficients de développements asymptotiques de f en des singularités régulières et irrégulières se calculent avec des complexités en temps similaires. Ces algorithmes rapides ne sont que partiellement implantés pour l'instant ; un de nos objectifs est de produire des implantations rapides et robustes dans le système Mathemagix, en utilisant notamment nos implantations récentes de la multiplication rapide de matrices à coefficients entiers. Nous travaillerons aussi sur des bornes uniformes de complexité pour l'évaluation de fonctions holonomes au voisinage de singularités.

Calcul symbolique-numérique de groupes de Galois différentiels. Dans [vdH07a], nous avons montré comment ces algorithmes numériques permettent le calcul, combinant du symbolique et du numérique, du groupe de Galois différentiel : on le représente comme le plus petit groupe algébrique contenant un nombre fini de matrices (numériques) de monodromie (et éventuellement d'exponentielles et de matrices de Stokes dans le cas irrégulier). Cette approche peut s'appliquer à de nombreux problèmes proches comme la factorisation d'opérateurs différentiels [vdH07a], le calcul de solutions liouvilliennes, etc. Nous prévoyons d'implanter ces méthodes et de développer cette très prometteuse méthodologie symbolique-numérique.

On remarquera que tous nos projets sont en étroite collaboration avec les problématiques abordées dans les autres sections.

2.4 Tâche #4 : holonomie et théorie des nombres

Participants : Boris Adamczewski, Cyril Banderier, Gilles Christol, Éric Delaygue, Lucia di Vizio, Stéphane Fischler, Jeremy Lovejoy, Tanguy Rivoal (coordinateur de tâche), Julien Roques.

2.4.1 Périodes de Kontsevich–Zagier et valeurs de G-fonctions

Kontsevich et Zagier ont introduit l'importante classe des périodes, i.e. l'ensemble des nombres complexes qui peuvent s'écrire comme des diagonales itérées de fonctions rationnelles (et donc, sans perte ni gain de généralité, de fonctions algébriques), avec des contraintes sur le domaine d'intégration données par des inégalités algébriques à coefficients rationnels, par exemple :

$$\zeta(2) = \int_{0<t_1<t_2<1} \frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et} \qquad \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3-4}} = \frac{\Gamma(1/3)^3}{2^{7/3}\pi}.$$

Nous comptons étudier la nature arithmétique des constantes de connexion (ou de Stokes) de certaines classes de fonctions holonomes. Nous avons déjà entrepris ce travail pour les G-fonctions au sens de Siegel : les constantes de connexion sont alors des valeurs de G-fonctions [FR14], qui semblent intimement liées aux périodes de Kontsevich–Zagier. Nous sommes en train d'étudier les E-fonctions de Siegel, et plus généralement les séries Gevrey de type arithmétique définies par Yves André [And00]. Les valeurs aux rationnels de la fonction Gamma et de ses dérivées (par exemple la constante d'Euler) apparaissent alors dans les constantes de Stokes, en plus de valeurs de G-fonctions. L'objectif est d'étendre ce genre d'étude à des classes très larges de fonctions holonomes, et (idéalement) d'obtenir des résultats arithmétiques (irrationalité, transcendance) sur certaines de ces constantes. Par exemple, on ne sait toujours pas démontrer que la constante d'Euler est irrationnelle, ni que celle d'Apéry (i.e., la valeur en 3 de la fonction zêta de Riemann) est transcendante. Un outil majeur est la transformation de Laplace, dont nous développons une version formelle et explicite dans l'esprit de celle construite par Yves André à partir du calcul opérationnel.

2.4.2 Diagonales de fractions rationnelles

La diagonalisation est un procédé naturel permettant d'obtenir des séries formelles intéressantes à partir de séries formelles bien plus simples mais ayant un plus grand nombre de variables. En particulier, les diagonales de fractions rationnelles forment une classe de fonctions analytiques holonomes se situant au confluent de plusieurs thèmes : la combinatoire énumérative, la théorie des équations différentielles, l'arithmétique, la géométrie algébrique et l'informatique théorique.

En effet, de nombreux exemples de séries génératrices intervenant en combinatoire énumérative sont des diagonales de fractions rationnelles (voir par exemple le chapitre consacré dans le Stanley). En fait, d'après une conjecture de Christol [Chr90], toute série génératrice (donc à coefficients entiers) holonome dont le rayon de convergence est non nul devrait être une diagonale de fraction rationnelle. Aussi les diagonales de fractions rationnelles occupent-elles une place centrale en combinatoire énumérative. Par ailleurs, une classe de fonctions holonomes jouant un rôle particulièrement important en arithmétique est la classe des G-fonctions introduite par Siegel. La conjecture classique de Bombieri–Dwork (voir [Chr90]) prédit que les équations différentielles associées aux G-fonctions proviennent de la géométrie. Cette expression signifie que ce sont des solutions d'équations différentielles associées à la variation de périodes de familles de variétés algébriques (formellement, associées à des connexions de Gauss–Manin). La formule d'intégration sur un cycle évanescent de Deligne (voir [Del84]) permet d'exprimer les diagonales de fractions rationnelles à coefficients algébriques comme un calcul de résidus d'intégrales multiples. En formalisant cela en termes de groupes de cohomologie de de Rham, on obtient que les diagonales de fractions rationnelles sont des G-fonctions qui proviennent de la géométrie. À ce titre, elles forment une classe remarquable de G-fonctions dont les valeurs en des points algébriques sont des périodes au sens de Kontsevich et Zagier (voir [KZ01]).

Le théorème de Furstenberg–Deligne. Si toute série formelle algébrique (d'une variable) peut s'écrire comme la diagonale d'une fraction rationnelle de deux variables, les diagonales de fractions rationnelles sont généralement des fonctions transcendantes (par exemple, des intégrales elliptiques). Le théorème de Furstenberg–Deligne ([Del84]) est un résultat remarquable qui assure que la réduction modulo p d'une diagonale de fraction rationnelle à coefficients rationnels est une fonction algébrique pour presque tout nombre premier p. Ainsi ces fonctions souvent si difficiles à appréhender se "simplifient" modulo p.

Notons également que ce type de résultat a des conséquences combinatoires intéressantes. En effet, d'après un théorème de Christol, lorsque les réductions modulo p d'une série formelles à coefficients entiers sont algébriques, elles sont en fait p-automatiques. Cela implique certaines propriétés de congruence modulo p, ou plus généralement modulo p^r, pour les coefficients de la série formelle de départ. L'intérêt est alors de disposer d'une approche générale pour expliquer de nombreuses congruences observées ponctuellement. Les projets de recherches décrits sont tous liés d'une certaine manière à ce théorème.

Complexité modulo p et principe local–global. Notre compréhension de la façon dont peut évoluer la complexité (degré et hauteur) des réducitons modulo p d'une diagonale de fraction rationnelle à coefficients rationnels est très limitée. Mis à part un résultat de Deligne récemment étendu par Adamczewski et Bell [AB14] (qui montrent que ces deux quantités sont au plus polynomiales en p), rien ne semble connu sur cette question. Nous souhaiterions étudier plus en détail ce problème. Notons que le calcul efficace du degré d'algébricité des rédutions modulo p des diagonales de fractions rationnelles semblent également un problème algorithmique intéressant. Évidemment, une série algébrique $f(t)$ de degré d, à coefficents rationnels, a des réductions algébriques pour presque tout nombre premier p. De plus, le degré de $f_{|p}$ ne peut que décroître et est donc uniformément borné par d. On peut alors se demander si cette propriété est caractéristique des fonctions algébriques parmi les diagonales de fonctions rationnelles. Plus formellement, une conjecture de van der Poorten stipule que si la diagonale d'une fraction rationnelle a des réductions dont le degré est uniformément borné pour presque tous nombres premiers p, alors il s'agit d'une fonction algébrique. En d'autres termes, si la diagonale d'une fraction rationnelle est transcendante alors le degré de ses réductions devrait tendre vers l'infini avec p. Ce serait la première minoration globale obtenue pour le degré des réductions des diagonales de fonctions algébriques. Il s'agit probablement d'une question difficile liée notamment à une conjecture classique du domaine due à Grothendieck.

Liens avec les automates et généralisation. Comme mentionné précédemment, le théorème de Christol permet de reformuler le théorème de Furstenberg–Deligne de la façon suivante : la diagonale d'une fraction rationnelle est globalement automatique. Un de nos projets à long terme est de démontrer qu'une série holonome globalement bornée est globalement automatique, ce qui serait un premier pas vers la démonstration de la conjecture de Christol mentionnée précédemment. Ce résultat est déjà connu pour les séries hypergéométriques (Denef–Lipshitz) et, dans un futur proche, il semble possible de généraliser ce résultat aux solutions particulières de systèmes différentiels A-hypergéométriques appelées les Gamma-séries. Cette étude permettrait de mieux comprendre la structure des automates régissant le comportement des réductions modulo p^r de nombreuses suites classiques en combinatoire et théorie des nombres. En effet, les suites de sommes multiples de coefficients binomiaux sont les coefficients de Taylor de spécialisations de Gamma-séries. Ainsi, ce projet complèterait notre recherche systématique de formes closes pour les solutions d'équations différentielles utilisant des techniques du calcul formel.

Identités combinatoires. De nombreuses identités combinatoires s'expriment comme égalité de deux diagonales de fractions rationnelles. Nous souhaitons étudier ce phénomène sous le prisme de la formule d'intégration de Deligne afin d'étudier une version fonctionnelle d'une conjecture inaccessible de Kontsevich et Zagier concernant les relations algébriques entre les périodes. On peut ainsi se demander dans quelle mesure ce type d'égalités combinatoires proviendrait nécessairement d'opérations élémentaires (changement de variables, relations de Chasles, formule de Stokes,...) effectuées sur les formes intégrales des diagonales de fractions rationnelles. À l'inverse, l'utilisation de ces opérations offre une méthode théorique pour obtenir des égalités combinatoires complexes.

Indépendance algébrique de G-fonctions. Une approche classique pour étudier l'indépendance algébrique de fonctions holonomes est bien sûr la théorie de Galois différentielle. Dans certains cas, comme pour les séries hypergéométriques avec les travaux de Beukers–Heckmann, cette approche s'avère très efficace. Toutefois, même pour des fonctions satisfaisant à des équations différentielles assez simples, les différentes étapes à surmonter peuvent se révéler pour le moins laborieuses. Nous souhaitons **développer une approche totalement nouvelle pour démontrer des résultats généraux concernant l'indépendance algébrique de G-fonctions**. L'idée est de s'inspirer de la philosophie du théorème de Furstenberg–Deligne en utilisant la remarque suivante : de nombreuses G-fonctions satisfont à des équations aux différences simples modulo p pour une infinité de nombres premiers p. Cela devrait permettre l'obtention d'un théorème à la Kolchin modulo p, puis de remonter l'information à $\mathbb{Q}$. Ce principe permettrait de remplacer l'étude d'une équation différentielle complexe sur $\mathbb{Q}$, par celle d'une famille infinie d'equations aux différences nettement plus simples sur des corps finis.
Motivation arithmétique : Les valeurs des G-fonctions en des points algébriques sont liées (au moins conjecturalement) aux périodes de Kontsevich–Zagier. L'étude des relations algébriques entre ces nombres est l'un des objectifs principaux en transcendance. Malheureusement, on ne dispose que d'un nombre très faible de résultats dans cette direction et la plupart des conjectures naturelles semblent aujourd'hui hors d'atteinte. Une première étape, plus raisonnable mais déjà très délicate, est d'essayer de comprendre les relations algébriques pouvant exister au niveau fonctionnel, c'est-à-dire d'obtenir des résultats d'indépendance algébriques de G-fonctions.
Motivation combinatoire : On s'attend généralement à ce que la nature d'une série génératrice (algébrique/holonome, ...) reflète en partie celle de la famille d'objets combinatoires associée. Dans cette direction, de nombreux travaux portent sur la transcendance (et les moyens de l'obtenir) de séries génératrices. On peut par exemple penser aux travaux de Flajolet (étude asymptotique des coefficients) ou d'Allouche *et al.* (utilisant des congruences à la Lucas). Malheureusement, aucun de ces travaux ne semblent s'appliquer aux relations algébriques pouvant exister entre plusieurs séries génératrices (que l'on peut voir comme une façon algébrique de mesurer la différence de nature entre plusieurs familles d'objets combinatoire). Nos recherches pourraient ainsi ouvrir une nouvelle voie dans ce domaine. (Nous avons également amorcé une étude du grade de Hadamard [AMF11].)

2.4.3 Propriétés arithmétiques des séries holonomes et symétrie miroir

Au sein de la symétrie miroir, les applications miroir sont des séries (réciproques de l'exponentielle d'un quotient de fonctions holonomes) dont les coefficients sont conjecturalement liés à des invariants géométriques classiques de la théorie. étant donnée une équation différentielle à coefficients rationnels avec monodromie unipotente maximale à l'origine, déterminer si les coefficients de Taylor de l'application miroir associée sont tous entiers est un problème difficile. Néanmoins, ce problème est résolu pour les équations différentielles hypergéométriques (voir [Del13] et [DRR14]) et repose sur l'existence de congruences de Dwork pour les coefficients des séries holonomes solutions. Ces congruences (impliquant les congruences à la Lucas) traduisent une structure particulière des automates agissant sur les réductions modulo p des solutions. Ainsi l'étude de ces automates proposée dans les sujets précédents sera un premier pas vers la démonstration de l'existence de congruences à la Dwork et de l'intégralité des coefficients des applications miroir.

Structure de Frobenius. Une équation différentielle à coefficients sur $\mathbb{Q}$ peut être vue à coefficients sur $\mathbb{Q}_p$. L'existence d'une structure de Frobenius forte pour cette équation entraîne la p-automaticité d'une solution globalement bornée. Démontrer l'existence de structure de Frobenius et étudier leurs propriétés à l'aide de la théorie de Galois différentielle est un projet à long terme qui, outre son importance en tant que tel, offrirait une grande aide et de nouvelles perspectives pour les projets précédemment décrits.

Uniformisation adélique simultanée Dans [And96], Yves André a introduit la notion d'uniformisation adélique simultanée dans le cadre de son étude diophantienne des valeurs de G-fonctions. Étant donnée une G-fonction $F(z)$, il s'agit de déterminer une fonction $z(q)$ telle que $F(z(q))$ ait de bonnes propriétés de croissance archimédienne et p-adique (pour tout premier p).

Le défi est de donner un autre exemple que le cas où F est une fonction hypergéométrique de Gauss et où $z(q)$ est une fonction modulaire (de poids 0) construite à partir de F au moyen de sa fonction de Schwarz. En nous basant sur notre étude des applications miroir et des fonctions hypergéométriques [DRR14], nous souhaitons étudier les hypergéométriques de niveau supérieur, car alors l'analogue de $z(q)$ par la fonction de Schwarz est une application miroir.

2.4.4 Formes modulaires

Brown a défini récemment des valeurs modulaires multiples, liées aux périodes de formes modulaires, parmi lesquelles figurent notamment les valeurs zêta multiples (MZV) et les valeurs aux entiers de fonctions L de formes modulaires. Cette classe de nombres est liée à l'étude de motifs de Tate mixtes et du groupe de Galois absolu du corps des rationnels. Nous souhaitons ici, à long terme, adapter nos approches de [CFR08] et les outils qui existent sur les MZV à ces valeurs modulaires multiples : l'objectif est d'étudier les relations entre ces valeurs, voire d'obtenir sur ces nombres des résultats d'irrationalité, ou de transcendance (alors que presque rien n'est connu dans cette direction).

Certaines suites unimodales liées à des formes modulaires quantiques à la Zagier ont été récemment découvertes par Rhoades *et al.* [BOPR12]. D'autres suites unimodales sont quant à elles reliées à des fonctions thêta partielles, cf [LK14]. Dans ce projet, nous souhaitons étudier les subtilités combinatoires de suites unimodales et leur séries génétrices afin de comprendre quels suites mènent à tel type de séries. Zagier [DMZ14] a defini une forme modulaire quantique comme une fonction sur les rationnels dont l'obstruction à la modularité est "jolie". Il donné quelques examples, nombre d'entre eux sont en fait des q-séries, mais dénuée actuellement d'explications combinatoires. En plus d'amasser d'autres exemples, nous essayerons de déterminer si et comment ces formes modulaires quantiques transporte de l'information combinatoire.

2.5 Tâche 5 : Holonomie et théorie de Galois différentielle

Participants : Frédéric Chyzak, Thierry Combot, Éric Delaygue, Lucia di Vizio, Joris van der Hoeven, Jean-Pierre Ramis, Julien Roques, Jacques-Arthur Weil (coordinateur de tâche).

2.5.1 Groupes de Galois des équations différentielles linéaires

Le groupe de Galois différentiel est un groupe linéaire algébrique qui, étant donné une équation différentielle linéaire, encode les relations algébriques existant entre ses solutions et leurs dérivées. Il mesure ce que l'algèbre peut dire de la dynamique sous-jacente. Un objet similaire peut-être associé à une équation aux différences ou aux q-différences [DVRSZ03]. Ce groupe de Galois donne potentiellement de l'information sur la nature des solutions (formes closes), sur des mesures d'indépendance algébrique de leurs valeurs en des points rationnels, sur l'asymptotique, etc. Notre action consistera d'une part à rendre effectives ces potentialités et d'autre part à développer d'efficaces algorithmes. Cette branche des mathématiques s'est beaucoup développées dans les 30 dernières années ; elle a connu, dans la dernière décennie quelques applications importantes, par exemple à l'intégrabilité de systèmes dynamiques [MRRS07, AMW12] ou en physique mathématique [BBC$^+$13, BBH$^+$11]. Ces travaux ont, en retour, stimulé de nouvelles approches algorithmiques.

Il existe des algorithmes donnant de l'information sur les groupes de Galois différentiels, par exemple [vHW97] pour les invariants, [HRUW99] pour les solutions liouvilliennes. Il existe des algorithms généraux, mais aucun n'est pour l'instant implanté ([vdH07a]) ou efficace. Les idées récentes développées ci-dessous devraient mener à d'importants progrès.

Formes réduites d'équations différentielles linéaires. La connaissance du groupe de Galois permet non-seulement de représenter les solutions mais aussi de trouver une forme plus simple pour l'équation différentielle qu'elles satisfont. En développant la théorie des formes réduites de Kolchin-Kovacic, nous développons une nouvelle génération d'algorithmes déterminant le groupe de Galois différentiel (ou son algèbre de Lie) en transformant l'équation en une *forme réduite* [AMW12]. Ces méthodes sont particulièrement adaptées aux cas réductibles rencontrés dans les applications comme [MRRS07] ou [BBH+11].

Le programme sous-jacent est de spécifier la notion de plus simple façon de représenter un système différentiel linéaire (pour pouvoir lire facilement les propriétés de ses solutions), en rapport avec d'autres outils (réduction locale, désingularisation, etc). Cette approche par les formes réduites pourrait aussi ouvrir la voie à des résultats arithmétiques nouveaux, dans l'esprit de la conjecture de Grothendieck [DV02]. Cette recherche de formes plus ou moins canoniques sera aussi utilisée dans la détection de solutions pouvant s'exprimer à partir de fonctions hypergéométriques (résolutions en termes d'équations d'ordre moindre, pullback comme dans [vHW05]).

2.5.2 Le cas des équations aux différences.

Pour le cas d'équations aux différences, il y a moins de groupes de Galois possibles que dans le cas différentiel [HS99, HRUW99], ce qui permet d'espérer que leur détermination pourrait être ultimement plus efficace.

Solutions hypergeométriques. Le calcul de solutions hypergéométriques (semi-invariants linéaires du groupe de Galois) est algorithmique [Pet92] mais difficile car demandant pour l'instant un temps de calcul exponentiel dans le pire cas [CVH06]. Le calcul du groupe de Galois impose, de plus de déterminer les relations algébriques entre de telles solutions. Nous travaillons à l'élaboration de méthodes permettant de réaliser ces tâches en temps polynomial (en la dispersion et en le degré des coefficients).

Solutions sous forme close. Le phénomène ci-dessus gouverne aussi le calcul de solutions liouvilliennes ; ceci requiert de plus de calculer avec des opérateurs de taille beaucoup plus grande que l'opérateur de départ, ce que nous pensons pouvoir contourner [VHL10]. Ces récurrences résoluble ont une matrice de connection à l'infini dont les coefficients sont des valeurs de fonctions de Meijer-G. Ceci nous donnera une représentation explicite de l'asymptotique. Un projet plus ambitieux sera d'élaborer, avec tout ceci, un algorithme efficace (temps polynomial) de calcul du groupe de Galois aux différences.

2.5.3 Le cas des équations aux q-différences.

Théorie de Galois paramétrique des équations aux différences. Dans [DVH12], nous avons montré que la théorie de Galois paramétrique pour les équations aux différences (construite par Hardouin et Singer [HS08]) peut être descendue d'un corps différentiellement clos à un corps algébriquement clos. Cette approche peut s'appliquer à des déformations de q-séries pour étudier la dépendance différentielle en $x\partial x$ et $q\partial q$; par exemple, le groupe de Galois aux différences paramétrique (par rapport à une dérivation convenable) de la fonction thêta de Jacobi peut être vu comme un contrepoint Galoisien à l'équation de la chaleur. Nous prévoyons de généraliser ceci à une large classe de fonctions modulaires.

Le cas $|q| = 1$. Un but plus ambitieux est l'étude des singularités et solutions d'équations aux q-différences quand q est de norme un. C'est un programme vaste : rappelons les travaux de J.-C. Yoccoz sur une seule de ces équations (l'équation de conjugaison des difféomorphismes locaux). Toute classification un peu générale sera nécessairement compliquée. À horizon de 4 ans, nous pensons pouvoir étendre nos résultats analytiques [DV09, ADV04] à des travaux de Soibelman–Vologodsky et de Baranovsky–Ginzburg pour avancer sur ces questions.

Matrices de Stokes. L'algorithme de Frobenius pour les équations aux q-différences fournit une approximation uniforme de la monodromie de l'opérateur différentiel associé (où l'opérateur $f(x) \mapsto f(qx)$ est remplacé par $f(x) \mapsto \frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}$, dont la limite $q \to 1$ est la dérivée usuelle). En combinant ceci avec les travaux en cours de Thomas Dreyfus (un de nos anciens doctorants) sur les solutions méromorphes d'équations aux q-différences, ceci peut mener à de nouvelles méthodes d'obtention de matrices de Stokes d'équations aux q-différences ; par passage à la limite, ceci donnerait des matrices de Stokes numériques pour les équations différentielles.

2.6 Moyens demandés

Notre projet comporte **20 permanents** (11 membres en Île-de-France, et 9 membres en province, l'ensemble étant géré par l'univ. Paris 13, où nous avons déjà une équipe administrative et des services financiers efficaces), impliqués en moyenne à 60%, ainsi que 8 doctorants/postdocs. Nous demandons un budget de 399k€, répartis de la façon suivante :

- une **thèse** (financement durant 3 ans, oct. 2015-oct. 2018) : 94k€,
- **2 postdocs (de 12 mois chacun)** : 89k€,
- **18 stagiaires de 3 à 6 mois (4 en moyenne)** : 36k€
  (i.e. presque chaque participant pourra encadrer 1 stagiaire durant cette ANR),
- cofinancement de **conférences internationales** : 8k€
  (Limoges en 2015, Paris 13 en 2016, Grenoble en 2017, Orsay en 2018),
- cofinancement de 2 journées à l'IHÈS en 2015 et 2018 : 2k€,
- cofinancement de **trimestre au CIRM ou à l'IHP** (2017 ?) : 8k€,
- aide pour les rencontres annuelles ALEA et JNCF du GDR IM : 2k€
  (prise en charge du transport de 4 sympathisants du projet Holonomix par an),
- cofinancement de **2 ateliers par an** sur 4 ans et d'un **séminaire régulier** : 8k€,
- invitation de **chercheurs étrangers** (3 séjours de 15 jours par an) : 20k€,
- **missions** (1.25k€/an/participant) : 100 k€
  (soit 1.25k€/an/participant)
- dépense de **matériel** (livres, informatique, prestataires divers) : 17k€,
- **frais de fonctionnement** de 4% (Universités) : 15k€.

La localisation de la thèse sera décidée en fonction des résultats en 2015 des stages de M2, et des demandes alternatives de financement de thèse (universités, ÉNS, régions, état, programmes internationaux). Les 2 postdoctorants seront à cheval sur 2 sites, pour profiter au mieux de la pluridisciplinarité du projet. Il existe moins de filières financières permettant de financer des stagiaires que de filières finançant des doctorants, alors même que c'est désormais non seulement une obligation légale pour les stages de plus de 3 mois, mais également un critère qui retient l'attention des étudiants brillants, éventuellement à l'international, et que c'est surtout un excellent moyen pour récupérer/former de très bons étudiants en thèse, déjà impreignés de leur sujet de recherche. C'est pourquoi nous avons souhaité que presque chaque membre de notre ANR puisse avoir l'occasion (une fois sur les 4 ans de durée du projet) de financer un stagiaire sur les thématiques d'Holonomix. Nous avons une mine de problématiques qui s'y prêtent fort bien, et cela contribuera à former une nouvelle génération de chercheurs sur des thématiques fondamentales, ayant de surcroît de riches applications.

Un gros poste financier (100k€, soit 1.25k€ par an par participant) concerne les missions ; cette somme viendra en complément du soutien usuel de nos laboratoires respectifs, mais qui rechigneraient naturellement à financer des missions (ateliers, conférences internationales) où certains des participants à cette ANR n'auraient pas encore d'articles présentés, alors même que ce type d'apprentissage de nouveaux domaines est crucial dans un premier temps pour un projet pluridisciplinaire comme le nôtre. Ces missions s'ajouteront à nos nombreuses participations en tant qu'orateurs à des conférences internationales majeures, comme cela transparaît notamment via la liste de publications en fin de ce document.

Notre projet PEPS Holonomix a montré que les ateliers (réunions de type "groupe de travail") étaient un bon moyen de développer une culture, un langage commun, d'échanger nos connaissances et ainsi de résoudre ensemble des problèmes ouverts. Nous avons donc ici souhaité reprendre ce type de fonctionnement. Notons que nous souhaitons que notre budget aide ponctuellement quelques collègues sympathisants du projet, mais non inclus dans la liste des 20 permanents du projet, ainsi que quelques évènements annuels majeurs, aidant ainsi fortement à structurer la communauté maths-info-physique.

3 Stratégie de valorisation et impact global de la proposition

3.1 Une dynamique (inter)nationale, la formation d'une nouvelle génération

La dynamique apportée par notre projet "PEPS" 2012-2013 et son succès, autant en termes de publications que d'échanges de connaissances, nous a déjà montré que nous créions une intérêt dépassant le cercle initial de participants ; **les ateliers et les séminaires** que nous souhaitons organiser dans le cadre de cette ANR prolongerons cette dynamique et **animerons nos communautés autour de thèmes riches et prometteurs, ayant l'holonomie comme fil conducteur.** De plus, une part importante de notre budget est dédiée à **l'encadrement et la formation de jeunes chercheurs** (du M2 au postdoctorat), qui profiteront naturellement de cet environnement vivifiant. Nous avons amorcé des échanges (**projets binationaux**), notamment avec l'Allemagne, l'Autriche et Taiwan (impliquant aussi bien des chercheurs confirmés que des pré-postdocs), qui viendront renforcer le pôle de personnes (à l'international) souhaitant nous accompagner sur ce projet Holonomix. Les **conférences** que nous prévoyons de coorganiser seront le point d'orgue qui attirera un public encore plus large, avide du transfer de méthodes/problématiques qu'Holonomix offre, et nous envisageons à échéance 2020 un **projet européen** sur ces thématiques.

3.2 Conférences et vulgarisation scientifique

Dans notre budget, nous avons prévu une part importante pour les missions, car nous sommes confiants sur le fait d'aboutir à des résultats dignes d'être présentés dans les **grandes conférences internationales** (ISSAC, FPSAC, AofA, SODA, ...). Nous prévoyons également de participer à des conférences plus éloignées de nos displines d'origines (notamment pour propager nos approches effectives en physique et en théorie des nombres). Nous envisageons aussi une diffusion de ce savoir transdisciplinaire via un **séminaire régulier** et un **trimestre thématique** (au CIRM ou à l'IHP).

Par ailleurs, divers membres du projet ont une importante activité de **vulgarisation scientifique**, via les associations suivantes : Animaths, Math.en.jeans, Math pour Tous, Science Académie, Science Ouverte, Club CNRS sciences et citoyens, Société Mathématique de France, Université populaire de Bondy, Université pour tous de Bagneux, Palais de la découverte, mercredis du CIRM, Un texte un mathématicien (BNF), Mathematic Park (IHP), Cité des Sciences & de l'Industrie, et les rencontres annuelles : Rencontres CNRS-jeunes, Savante Banlieue, Fête de la science, Salon de la culture et des jeux mathématiques. Au delà des **exposés grands publics**, nous accueillons des **stages d'éveils scientifiques** d'élèves pré et post-bac, or une grande partie des mathématiques que nous regardons se prêtent à merveille à des sujets de tels stages. Nous œuvrerons aussi pour qu'une partie de nos travaux, quoiqu'au contact de mathématiques "en train de se faire", soient bientôt le sujet de TIPE en classes préparatoires et de **leçons originales pour l'agrégation**.

3.3 Logiciels libres et bases de données en ligne

Au-delà du "défi de tous les savoirs" que constituent nos objectifs théoriques, nous gardons en tête leurs applications concrètes pour nos concitoyens : nous souhaitons fournir des **librairies "clef en main"** [1] qui permettront à des milliers d'utilisateurs de manipuler directement des objets holonomes, sans avoir à connaître les théories complexes sous-jacentes... Ces utilisateurs sont es-

1. Fusionnant, et surtout étendant, nos packages existants : `http://algo.inria.fr/libraries/`, `http://www.mathemagix.org/`, `http://perso.ensil.unilim.fr/~cluzeau/PDS.html`...

FIGURE 3.1 – The On-line Encyclopedia of Integer Sequences est la version base de données sur internet du *Handbook of Integer Sequences* de Sloane, fortement augmentée car elle recense à ce jour plus 240 000 suites ! Des estimations suggèrent qu'environ 60% des entrées sont holonomes (pour beaucoup de suites, c'est conjectural). Ce site est une aide précieuse pour tout combinatoriste : de nombreux articles sont déjà nés ou ont été largement étayés grâce aux recoupements d'informations que les chercheurs font via ce site. Son créateur, Neil Sloane, dit souvent que s'il avait fallu imprimer autant de livres recensant les données du site qu'il y a d'utilisateurs du site, il n'y aurait plus de forêt au Canada ! Nous avons pour projet d'y intégrer des étiquettes (tags) à forte valeur ajoutée scientifique : algébraicité, holonomicité, algébrico-différentialité, les asymptotiques correspondantes, du code natif pour calculer les coefficients, et le coût de ce calcul. La base est actuellement en grande partie gérée et augmentée manuellement, et nous avons une approche pour y ajouter nos études mathématiques automatiquement, comme cela est déjà amorcé via notre site *Encyclopedia of Combinatorial Structures*, voir `http://algo.inria.fr/encyclopedia/`

sentiellement des mathématiciens, physiciens [2], informaticiens, ingénieurs, étudiants, professeurs [3]. Dans ses discussions avec Georges Andrews (le pape des fonctions spéciales et des q-séries), Doron Zeilberger (le pape de la preuve automatique d'identités) promeut souvent le credo provocateur (mais non dénué de vérité) que, d'ici un siècle, les progrès mathématiques sur les méthodes formelles auront été tels qu'on ne s'attaquera plus à ces preuves difficiles de formules entre fonctions spéciales, car celles-ci seront devenues aussi "triviales" pour la calculatrice que 1+1=2. Les mathématiciens se reconcentreront alors sur des problématiques où le génie humain reste irremplaçable, tout en ayant une force démultipliée par la nouvelle puissance de calcul apportée par les progrès théoriques du calcul formel. Les articles illustrant les prémices de cette ère se comptent déjà par centaines. Notre projet contribuera à cette (r)évolution, en y adjoignant aspects énumératifs, formels et asymptotiques, tentant ainsi de concrétiser un vieux rêve de Philippe Flajolet : rendre la théorie suffisamment mûre et effective pour automatiser toute la chaîne d'analyse d'un algorithme ou d'une structure combinatoire (*input* : sa description formelle, *output* : énumération, asymptotique, loi limite). Notons qu'une grande partie de ses travaux n'est pas encore implémentée, car il reste des barrières théoriques et des difficultés pratiques (asymptotique multivariée, interaction formel/numérique...), qui seront en partie levées par ce projet.

Aux chapitres 1 et 2, nous avons vu que **l'holonomie est utile partout**, qu'on peut **l'aborder avec des méthodes différentes**, et que c'est ainsi une pépite qui oblige à **développer de nouvelles mathématiques**, à **rendre effectives** les mathématiques de grands chercheurs comme Flajolet, Zagier, Ramanujan ou Grothendieck, le tout en ayant des applications fondamentales dans des domaines aussi divers que l'analyse d'algorithmes, la théorie des nombres, la théorie des probabilités ou la physique théorique. Si l'on ajoute à cela l'impact sur le traitement des fonctions spéciales, les différentes librairies que nous étendrons (Combstruct, Mgfun, NumGfun, OreAlgebra, Holonomix...) et **diffuserons en une librairie unifiée de logiciel libre** (Mathemagix, Sage), nous obtenons un projet ambitieux et couvrant un joli spectre, de la théorie aux applications.

2. Presque toutes les "fonctions spéciales" de la physique sont en fait des fonctions holonomes. Le *Handbook of Mathematical Functions*, l'un des ouvrages les plus vendus de l'histoire des mathématiques, contient d'ailleurs dans sa quasi-totalité des tables de valeurs et des formules sur ces fonctions !

3. Au delà du monde de la recherche, certains de nos packages sont déjà utilisés par les professeurs de classes préparatoires, et comme outils de résolutions d'une grande partie des problèmes d'entrée aux grandes écoles, mais aussi comme outil pour mieux appréhender les mathématiques sous-jacentes, ou les problèmes physiques correspondants.

4 Bibliographie

Caveat : pour des raisons de limitation stricte de ce document à 30 pages, certains articles sont cités plusieurs fois, alors que d'autres articles ultérieurs ou antérieurs du même auteur (ou d'autres chercheurs) sont absents mais auraient tout autant dû être cités.

[AAR99] George E. Andrews, Richard Askey, and Ranjan Roy. *Special functions*, volume 71 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. [Cité page 6.]

[AB12] Boris Adamczewski and Jason P. Bell. On vanishing coefficients of algebraic power series over fields of positive characteristic. *Invent. Math.*, 187(2) :343–393, 2012. [Cité page 14.]

[AB14] Boris Adamczewski and Jason Bell. Diagonalization and rationalization of algebraic Laurent series. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 2014. 49pp. [Cité pages 6, 20.]

[ADV04] Yves André and Lucia Di Vizio. q-difference equations and p-adic local monodromy. *Astérisque*, (296) :55–111, 2004. Analyse complexe, systèmes dynamiques, sommabilité des séries divergentes et théories galoisiennes. I. [Cité page 23.]

[AESZ10] Gert Almkvist, Christian van Enckevort, Duco van Straten, and Wadim Zudilin. Tables of Calabi–Yau equations. *arXiv 0507430*, 2010. 49pp. [Cité pages 11, 18.]

[ALL02] George E. Andrews, Richard P. Lewis, and Jeremy Lovejoy. Partitions with designated summands. *Acta Arith.*, 105(1) :51–66, 2002. [Cité page 7.]

[AMF11] Jean-Paul Allouche and Michel Mendès France. Hadamard grade of power series. *J. Number Theory*, 131(11) :2013–2022, 2011. [Cité page 21.]

[AMW12] Ainhoa Aparicio-Monforte and Jacques-Arthur Weil. A reduced form for linear differential systems and its application to integrability of hamiltonian systems. *Journal of Symbolic Computation*, 47(2) :192 – 213, 2012. [Cité pages 22, 23.]

[And96] Yves André. *G*-fonctions et transcendance. *J. Reine Angew. Math.*, 476 :95–125, 1996. [Cité page 21.]

[And00] Yves André. Séries Gevrey de type arithmétique. I. Théorèmes de pureté et de dualité & II. Transcendance sans transcendance. *Ann. of Math. (2)*, 151(2) :705–756, 2000. [Cité page 19.]

[AO11] Cody Armond and Dasbach Oliver. Rogers–Ramanujan type identities and the head and tail of the colored Jones polynomial. *arXiv 1106.3948*, 2011. [Cité page 15.]

[Bar99] Moulay A. Barkatou. On rational solutions of systems of linear differential equations. *J. Symbolic Comput.*, 28(4-5) :547–567, 1999. [Cité page 16.]

[BBC+13] Alin Bostan, Salah Boukraa, G. Christol, S. Hassani, and Jean-Marie Maillard. Ising n-fold integrals as diagonals of rational functions and integrality of series expansions. *J. Phys. A*, 46(18) :185202, 44, 2013. [Cité pages 6, 22.]

[BBH+11] Alin Bostan, Salah Boukraa, Saoud Hassani, Mark van Hoeij, Jean-Marie Maillard, Jacques-Arthur Weil, and Nadjah Zenine. The Ising model : from elliptic curves to modular forms and Calabi–Yau equations. *J. Phys. A*, 44(4) :045204, 44, 2011. [Cité pages 6, 11, 17, 22, 23.]

[BBJ13] Axel Bacher, Olivier Bodini, and Alice Jacquot. Exact-size sampling for Motzkin trees in linear time via Boltzmann samplers and holonomic specification. *SIAM SODA-ANALCO*, 2013. [Cité pages 7, 13.]

[BBMKM14] Alin Bostan, Mireille Bousquet-Mélou, Manuel Kauers, and Stephen Melczer. On lattice walks confined to the positive octant. *Preprint*, 2014. [Cité page 14.]

[BCCL10] Alin Bostan, Shaoshi Chen, Frédéric Chyzak, and Ziming Li. Complexity of creative telescoping for bivariate rational functions. In *ISSAC 2010*, pages 203–210. ACM, 2010. [Cité page 16.]

[BCD+10] Alexandre Benoit, Frédéric Chyzak, Alexis Darrasse, Stephan Gerhold, Marc Mezzarobba, and Bruno Salvy. The dynamic dictionary of mathematical functions (DDMF). *LNCS, Springer*, 2010. [Cité pages 6, 10.]

[BCvHP12] Alin Bostan, Frédéric Chyzak, Mark van Hoeij, and Lucien Pech. Explicit formula for the generating series of diagonal 3D rook paths. *Sém. Lothar. Combin.*, 66 :Art. B66a, 27, 2011/12. [Cité page 17.]

[BD14] Cyril Banderier and Michael Drmota. Coefficients of algebraic functions : formulae and asymptotics. *Combinatorics, Probability and Computations*, 2014. [Cité page 14.]

[BFSS01] Cyril Banderier, Philippe Flajolet, Gilles Schaeffer, and Michèle Soria. Random maps, coalescing saddles, singularity analysis, and Airy phenomena. *Random Structures Algorithms*, 19(3-4) :194–246, 2001. [Cité pages 6, 11.]

[BK10] Alin Bostan and Manuel Kauers. The complete generating function for Gessel walks is algebraic. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(9) :3063–3078, 2010. With an appendix by Mark van Hoeij. [Cité pages 7, 17.]

[BL14] Cyril Banderier and Guy Louchard. The Airy function in combinatorics. in *Philippe Flajolet's Collected Papers.*, 2014. [Cité page 7.]

[BLS13] Alin Bostan, Pierre Lairez, and Bruno Salvy. Creative telescoping for rational functions using the Griffiths–Dwork method. In *ISSAC 2013*, pages 93–100. ACM Press, 2013. [Cité pages 7, 17.]

[BM06] Mireille Bousquet-Mélou. Rational and algebraic series in combinatorial enumeration. In *International Congress of Mathematicians. Vol. III*, pages 789–826. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006. [Cité pages 6, 13.]

[BMJ06] Mireille Bousquet-Mélou and Arnaud Jehanne. Polynomial equations with one catalytic variable, algebraic series and map enumeration. *J. Combin. Theory Ser. B*, 96(5) :623–672, 2006. [Cité page 7.]

[BMM10] Mireille Bousquet-Mélou and Marni Mishna. Walks with small steps in the quarter plane. In *Algorithmic probability and combinatorics*, volume 520 of *Contemp. Math.*, pages 1–39. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010. [Cité page 14.]

[BOPR12] Jennifer Bryson, Ken Ono, Sarah Pitman, and Robert C. Rhoades. Unimodal sequences and quantum and mock modular forms. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 109(40) :16063–16067, 2012. [Cité page 22.]

[BRS14] Alin Bostan, Kilian Raschel, and Bruno Salvy. Non-D-finite excursions in the quarter plane. *J. Combin. Theory Ser. A*, 121 :45–63, 2014. [Cité page 6.]

[CFCHM14] Hua-Huai Chern, María-Inés Fernández-Camacho, Hsien-Kuei Hwang, and Conrado Martínez. Psi-series method for equality of random trees and quadratic convolution recurrences. *Random Structures Algorithms*, 44(1) :67–108, 2014. [Cité page 11.]

[CFR08] Jacky Cresson, Stéphane Fischler, and Tanguy Rivoal. Séries hypergéométriques multiples et polyzêtas. *Bull. Soc. Math. France*, 136(1) :97–145, 2008. [Cité page 22.]

[Chr90] Gilles Christol. Globally bounded solutions of differential equations. In *Analytic number theory*, volume 1434 of *LNM*, pages 45–64. Springer, 1990. [Cité page 19.]

[CVH06] Thomas Cluzeau and Mark Van Hoeij. Computing hypergeometric solutions of linear recurrence equations. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 17(2) :83–115, 2006. [Cité page 23.]

[Del84] Pierre Deligne. Intégration sur un cycle évanescent. *Invent. Math.*, 76(1) :129–143, 1984. [Cité pages 19, 20.]

[Del13] Éric Delaygue. A criterion for the integrality of the Taylor coefficients of mirror maps in several variables. *Adv. Math.*, 234 :414–452, 2013. [Cité pages 6, 8, 11, 18, 21.]

[DMR07] Pierre Deligne, Bernard Malgrange, and Jean-Pierre Ramis. *Singularités irrégulières*. Documents Mathématiques, 5. Société Mathématique de France, 2007. Correspondance et documents. [Cité pages 6, 10.]

[DMZ14] Atish Dabholkar, Sameer Murthy, and Don Zagier. Quantum black holes, wall crossing, and mock modular forms. *arXiv 1208.4074*, 2014. [Cité pages 8, 22.]

[DRR14] Éric Delaygue, Tanguy Rivoal, and Julien Roques. On Dwork's p-adic formal congruences theorem and hypergeometric mirror maps. *arXiv :1309.5902v1*, 2014. 80pp. [Cité pages 21, 22.]

[DV02] Lucia Di Vizio. Arithmetic theory of q-difference equations : the q-analogue of Grothendieck–Katz's conjecture on p-curvatures. *Invent. Math.*, 150(3) :517–578, 2002. [Cité pages 8, 23.]

[DV09] Lucia Di Vizio. Local analytic classification of q-difference equations with $|q| = 1$. *J. Noncommut. Geom.*, 3(1) :125–149, 2009. [Cité page 23.]

[DVH12] Lucia Di Vizio and Charlotte Hardouin. Grothendieck's conjecture on p-curvatures for q-difference equations. *arXiv :1205.1692*, 2012. [Cité page 23.]

[DVRSZ03] Lucia Di Vizio, Jean-Pierre Ramis, Jacques Sauloy, and Changgui Zhang. Équations aux q-différences. *Gaz. Math.*, (96) :20–49, 2003. [Cité page 22.]

[FR12] Guy Fayolle and Kilian Raschel. Some exact asymptotics in the counting of walks in the quarter plane. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AQ*, pages 109–124, 2012. (AofA 2012). [Cité page 14.]

[FR14] Stéphane Fischler and Tanguy Rivoal. On the values of G-functions. *Commentarii Math. Helv.*, 2014. [Cité pages 7, 8, 19.]

[FS09] Philippe Flajolet and Robert Sedgewick. *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. [Cité pages 6, 8, 11, 17.]

[GL14] Stavros Garoufalidis and Tu Quoc Thang Lê. Nahm sums, stability and the colored Jones polynomial. *Research in Mathematical Sciences*, 2014. [Cité pages 7, 15.]

[HRUW99] Mark Van Hoeij, Jean-François Ragot, Felix Ulmer, and Jacques-Arthur Weil. Liouvillian solutions of linear differential equations of order three and higher. *Journal of Symbolic Computation*, 28(4) :589–609, 1999. [Cité pages 22, 23.]

[HS99] Peter A. Hendricks and Michael F. Singer. Solving difference equations in finite terms. *J. Symbolic Comput.*, 27(3) :239–259, 1999. [Cité page 23.]

[HS08] Charlotte Hardouin and Michael F. Singer. Differential Galois theory of linear difference equations. *Mathematische Annalen*, 342(2) :333–377, 2008. [Cité page 23.]

[KMM95] Rinat Kedem, Barry M. McCoy, and Ezer Melzer. The sums of Rogers, Schur and Ramanujan and the Bose–Fermi correspondence in (1+1)-dimensional quantum field theory. In *Recent progress in statistical mechanics and quantum field theory*, pages 195–219. World Sci. Publ., 1995. [Cité page 8.]

[KR12] Irina Kurkova and Kilian Raschel. On the functions counting walks with small steps in the quarter plane. *Inst. Hautes Études Sci.*, 116 :69–114, 2012. [Cité pages 6, 14.]

[KZ01] Maxim Kontsevich and Don Zagier. Periods. In *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, pages 771–808. Springer, 2001. [Cité page 19.]

[LK14] Jeremy Lovejoy and Byungchan Kim. Ramanujan-type partial theta identities and rank differences for special unimodal sequences. *Annals of Combinatorics*, 2014. [Cité page 22.]

[Lov14] Jeremy Lovejoy. Bailey pairs and indefinite quadratic forms. *J. Math. Anal. Appl.*, 410(2) :1002–1013, 2014. [Cité page 8.]

[MRRS07] Juan J. Morales-Ruiz, Jean-Pierre Ramis, and Carles Simo. Integrability of Hamiltonian systems and differential Galois groups of higher variational equations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 40(6) :845–884, 2007. [Cité pages 22, 23.]

[Pet92] Marko Petkovšek. Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients. *J. Symbolic Comput.*, 14(2) :243–264, 1992. [Cité page 23.]

[PW13] Robin Pemantle and Mark C. Wilson. *Analytic combinatorics in several variables*, volume 140 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013. [Cité pages 6, 11.]

[SB13] Carsten Schneider and Johannes Blümlein. *Computer Algebra in Quantum Field Theory*. Monographs in Symbolic Computation, Springer, 2013. [Cité page 10.]

[vdH99] Joris van der Hoeven. Fast evaluation of holonomic functions. *Theoret. Comput. Sci.*, 210(1) :199–215, 1999. [Cité page 18.]

[vdH01] Joris van der Hoeven. Fast evaluation of holonomic functions near and in regular singularities. *J. Symbolic Comput.*, 31(6) :717–743, 2001. [Cité page 18.]

[vdH07a] Joris van der Hoeven. Around the numeric-symbolic computation of differential Galois groups. *J. Symbolic Comput.*, 42(1-2) :236–264, 2007. [Cité pages 18, 22.]

[vdH07b] Joris van der Hoeven. Efficient accelero-summation of holonomic functions. *J. Symbolic Comput.*, 42(4) :389–428, 2007. [Cité page 18.]

[VHL10] Mark Van Hoeij and Giles Levy. Liouvillian solutions of irreducible second order linear difference equations. In *ISSAC 2010*, pages 297–301. ACM, 2010. [Cité page 23.]

[vHW97] Mark van Hoeij and J.-A. Weil. An algorithm for computing invariants of differential Galois groups. *J. Pure and Applied Algebra*, 117 :353–379, 1997. [Cité page 22.]

[vHW05] Mark van Hoeij and Jacques-Arthur Weil. Solving second order differential equations with Klein's theorem. In *ISSAC 2005*. ACM, 2005. [Cité page 23.]

[VZ11] M. Vlasenko and S. Zwegers. Nahm's conjecture : asymptotic computations and counterexamples. *arXiv 1104.4008*, 2011. [Cité pages 7, 15.]