

- Note CEA-N-2332 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
Institut de Recherche Fondamentale
Département de Physique Générale
Service de Physique du Solide et de Résonance Magnétique

EQUATIONS FONCTIONNELLES EN MECANIQUE STATISTIQUE

par

Jean-Marie MAILLARD

- Mars 1983 -

NOTE CEA-N-2332 - Jean-Marie MAILLARD

EQUATIONS FONCTIONNELLES EN MECANIQUE STATISTIQUE

Sommaire. - Nous montrons l'importance du rôle joué par les relations linéaires sur les fonctions de corrélations (telles que la relation de Fisher par exemple) pour les modèles de mécanique statistique. Nous donnons des exemples de telles relations pour le modèle de Potts, le modèle à 8 vertex symétriques et examinons le lien entre ces relations linéaires et les relations de Perk. Nous discutons, de façon générale, du rôle joué par les équations fonctionnelles simples en mécanique statistique.

1983

42 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France.

NOTE CEA-N-2332 - Jean-Marie MAILLARD

FUNCTIONAL EQUATIONS IN STATISTICAL MECHANICS

Summary. - We note the prominent part played in statistical mechanics by linear relations on correlation functions (such as the Fisher relation for instance). We point some examples of such relations on the Potts model, the symmetric eight-vertex out and we analysed the relation between the linear relations on correlation functions and the Perk's relations. We discuss, in a general way, the role played in statistical mechanics by those kind of simple functional equations.

1983

42 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France.

SOMMAIRE

I.	INTRODUCTION	1
II.	LES RELATIONS LINÉAIRES SUR LES FONCTIONS DE CORRÉLATIONS	3
	a) Rappels sur les relations linéaires.....	3
	b) Une façon simple d'obtenir ces relations linéaires	5
	b.1 Application au modèle d'Ising sur réseau carré	7
	b.2 Application au modèle d'Ising sur réseau cubique.....	14
	b.3 Application au modèle d'Ising en champ	16
	b.4 Application au modèle à 8 vertex symétrique	18
	b.5 Généralisation de la relation de Fisher au modèle de Potts. 21	
	c) Les relations de Perk comme conséquence des relations linéaires et de relations non linéaires simples sur les fonctions de corrélations	25
III.	DISCUSSION.....	31
	a) Discussion sur les équations fonctionnelles en physique mathématique.....	31
	b) Conclusion	33
	RÉFÉRENCES	35

I. INTRODUCTION

Nous avons souligné dans une précédente Note CEA (S82-76) [1] l'importance de certaines relations fonctionnelles très simples portant en mécanique statistique sur des grandeurs telles que les fonctions de partition ou les fonctions de corrélation d'un grand nombre de modèles. Ces équations fonctionnelles étaient associées à la notion de relation d'inverse [2][3], Il a été montré [3][4] que de telles équations fonctionnelles apportaient des contraintes sévères sur les grandeurs auxquelles elles se rapportaient. Il existe également d'autres relations, qui ne découlent pas de la notion d'inverse, qui conduisent à des équations fonctionnelles simples ; ainsi, sur le modèle du "hard-hexagon", R.J. Baxter et P.A. Pearce ont obtenu [5] l'équation fonctionnelle suivante sur la fonction de partition

$$Z(u) \cdot Z(u+\lambda) = 1 + Z(u-2\lambda)$$

$$\text{avec } Z(u+5\lambda) = Z(u)$$

Cette équation est étonnamment semblable à l'équation portant sur les multiplicateurs de Stokes pour l'équation différentielle irrégulière

$$y'' - (x^3 + \lambda)y = 0 \quad [6]$$

D'autre part A. Voros, sur l'exemple de l'oscillateur anharmonique, a également obtenu des équations fonctionnelles tout à fait analogues et très simples sur certaines fonctions génératrices du spectre de ces problèmes [7]. Ainsi pour l'oscillateur quartique, il existe la relation suivante

$$4\Delta(\lambda) \Delta(j\lambda) \Delta(j^2\lambda) = \Delta(\lambda) + \Delta(j\lambda) + \Delta(j^2\lambda) + 1$$

où $\Delta(\lambda)$ est le déterminant de Fredholm

$$\Delta(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda/\lambda_n)$$

($\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est l'ensemble des valeurs propres de l'hamiltonien). Ces équations méritent une attention particulière en raison de leur simplicité et de leur élégance.

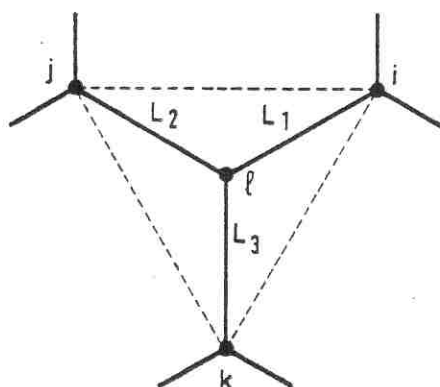
De façon générale, des identités plus compliquées que les précédentes, interviennent dans de nombreux domaines de la physique. Le plus souvent elles sont utilisées pour fermer une hiérarchie d'équations de façon à obtenir un ensemble fini d'équations que l'on peut manipuler plus facilement. Pour cette raison de telles relations sont souvent appelées relations de fermeture. On peut distinguer les relations de fermeture approchées et exactes. L'exemple le plus connu est sans doute l'approximation de superposition de Kirkwood en théorie des fluides classiques et son utilisation dans deux hiérarchies pour obtenir les équations intégrales de Kirkwood et de Born-Green pour la fonction de corrélation de paire [8]. De telles hiérarchies d'équations sur les fonctions de Green sur le modèle d'Ising existent [9] et on peut leur appliquer des relations de fermeture approchées [10]. Les identités exactes par contre sont plus rares : on en connaît sur les problèmes comme par exemple les systèmes classiques de particules en interaction entre plus proches voisins dans un potentiel extérieur arbitraire [1] ; on connaît des relations linéaires sur les fonctions de corrélations telles que par exemple la relation trouvée par Fisher [12] sur le modèle d'Ising sur réseau triangulaire. Il existe également d'autres relations, non linéaires celles-ci [13][14]. Des équations de ce type sont d'autant plus intéressantes qu'elles sont plus "fermées", c'est-à-dire qu'elles relient le nombre le plus limité possible de fonctions entre elles, et entre elles uniquement. En ce sens des équations non linéaires aux différences finies comme celles de B.M. McCoy et T.T. Wu [15] sur les fonctions de corrélations du modèle d'Ising sont remarquables à cet égard : elles forment bien un ensemble d'équations qui se referme sur lui-même. Ces propriétés de "bootstrap" sont tout particulièrement à rechercher, les exemples cités au début de cette introduction étant, en quelque sorte, des cas limites, ces relations reliant une fonction et elle-même pour d'autres valeurs des paramètres.

Dans cette note nous allons, pour l'essentiel, nous intéresser, du fait de leur caractère exact et de leur simplicité, aux relations linéaires sur les fonctions de corrélations en essayant de dégager certaines des contraintes qui en découlent.

II. LES RELATIONS LINÉAIRES SUR LES FONCTIONS DE CORRÉLATIONS

a) Rappels sur les relations linéaires

Abordons les équations linéaires sur les fonctions de corrélations avec l'exemple le plus simple : l'équation de Fisher. Pour ce faire nous considérons localement un modèle d'Ising sur un réseau hexagonal



Soit $P(\alpha, \beta, \gamma)$ la probabilité que les spins aux sites i, j, k aient les valeurs $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Soit également $P(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ la probabilité correspondant aux sites i, j, k et l . Nous pouvons écrire

$$P(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = P(\delta | \alpha, \beta, \gamma) \cdot P(\alpha, \beta, \gamma)$$

où $P(\delta | \alpha, \beta, \gamma)$ est la probabilité conditionnelle d'avoir pour le spin en l , la valeur δ sachant qu'aux sites i, j et k on a les valeurs α, β et γ .

Cette probabilité conditionnelle peut facilement être calculée :

$$\begin{aligned} P(\delta | \alpha, \beta, \gamma) &= \frac{e^{\delta(L_1 \cdot \alpha + L_2 \cdot \beta + L_3 \cdot \gamma)}}{2 \cosh(L_1 \cdot \alpha + L_2 \cdot \beta + L_3 \cdot \gamma)} \\ &= \frac{1}{2} [1 + \delta(w_1 \cdot \alpha + w_2 \cdot \beta + w_3 \gamma - w \cdot \alpha \beta \gamma)] \end{aligned}$$

où w_1, w_2, w_3, w sont des expressions de L_1, L_2 et L_3 .

En multipliant par $\gamma\delta$ nous avons

$$\gamma\delta \cdot P(\delta|\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2} [\gamma\delta + w_1 \cdot \alpha\gamma + w_2 \cdot \beta\gamma + w_3 - w\alpha\beta]$$

$$\Rightarrow \gamma\delta P(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{1}{2} [\gamma\delta + w_1 \cdot \alpha\gamma + w_2 \cdot \beta\gamma + w_3 - w\alpha\beta] P(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\Rightarrow \langle \sigma_k \sigma_\ell \rangle = w_1 \cdot \langle \sigma_i \sigma_k \rangle + w_2 \cdot \langle \sigma_j \sigma_k \rangle + w_3 - w \cdot \langle \sigma_i \sigma_j \rangle$$

Cette équation, qui est une relation linéaire entre fonctions de corrélations à deux points, premier et second voisins, sur le réseau carré, a été obtenu pour la première fois par M.E. Fisher [12] ; R.J. Baxter et I.G. Enting ont montré qu'à partir de cette équation, qui n'est rien d'autre que l'expression de la relation star-triangle sur les fonctions de corrélations, et de considérations basées là encore sur la relation star-triangle, on pouvait obtenir la fonction de partition du modèle d'Ising bidimensionnel [16].

Ceci ne doit pas nous étonner, nous avons déjà insisté sur la relation triangle comme critère de complète intégrabilité. En fait de telles relations linéaires ne demandent nullement pour exister une condition aussi forte que la complète intégrabilité (a fortiori la réduction à une théorie de fermions libres). En fait divers auteurs ont considérablement généralisé cette approche [17][18][19][20], exhibant sous certaines conditions des relations linéaires qui sont de la forme

$$\langle \sigma_X \rangle = (-1)^{|X \cap Y|} \cdot \langle \sigma_X \cdot \exp \sum_{Z \in \Lambda} \left[(-1)^{|X \cap Z| - 1} \right] K_Z \sigma_Z \rangle$$

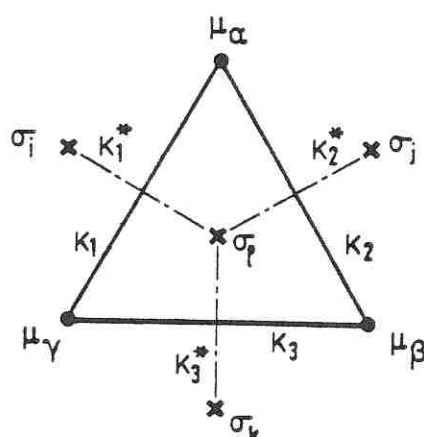
(on utilise les notations ensemblistes suivantes :

σ_A pour le produit $\prod_{a \in A} \sigma_a$ de tous les spins aux sites a appartenant à un ensemble A de telles sites ; l'hamiltonien de ce modèle d'Ising qui s'écrit $H = \sum_{A \in \Lambda} K_A \cdot \sigma_A$, peut contenir des interactions à un nombre quelconque de spins, des interactions avec un champ magnétique, les constantes de couplages pouvant varier de sites en sites (modèle inhomogène)). En fait la démonstration de telles identités utilise fort peu d'hypothèses : elle repose uniquement sur le fait que les spins sont des éléments de Z_2

et donc que $\sigma_X \cdot \sigma_Y = \sigma_{XY}$ où XY est la différence symétrique des deux ensembles X et Y : $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Sur ces ensembles, la différence symétrique joue le rôle d'une loi de groupe, chaque élément du groupe étant d'ordre 2. Nous ne reproduirons pas ici les démonstrations, pour obtenir ces identités linéaires. Celles-ci reposent sur cette loi de groupe et s'expriment dans un langage très "ensembliste". De plus ces notations ensemblistes sont assez incommodes à utiliser dans la pratique, aussi allons-nous obtenir ces équations d'une manière plus familière pour la mécanique statistique et qui, elle, est susceptible de s'appliquer à des spins appartenant à Z_p (modèle de Potts).

b) Une façon simple d'obtenir ces relations linéaires

Plaçons nous tout d'abord dans le cas le plus simple du modèle d'Ising ($\sigma \in Z_2$), où nous allons considérer simultanément le réseau triangulaire et son réseau dual, le réseau nid d'abeille, de façon locale :



Les spins $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$ valant ± 1 , nous avons l'identité algébrique facile à vérifier :

$$\mu_\alpha \mu_\gamma \cdot e^{K_1 \mu_\alpha \mu_\gamma} = \text{ch } 2K_1^* \cdot e^{K_1 \mu_\alpha \mu_\gamma} - \text{sh } 2K_1^* \cdot e^{-K_1 \mu_\alpha \mu_\gamma}$$

et de même pour $(\mu_\alpha, \mu_\beta, K_2)$ et $(\mu_\beta, \mu_\gamma, K_3)$. D'autre part nous avons l'identité suivante :

$$\mu_\alpha \mu_\gamma = (\mu_\alpha \mu_\beta) (\mu_\beta \mu_\gamma)$$

d'où en multipliant de part et d'autre de l'égalité par $e^{K_1^{\mu\alpha\mu\beta}}, e^{K_2^{\mu\alpha\mu\beta}}, e^{K_3^{\mu\beta\mu\gamma}}$, et en utilisant les identités algébriques précédentes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & (\text{ch } 2K_1^* \cdot e^{K_1^{\mu\alpha\mu\gamma}} - \text{sh } 2K_1^* \cdot e^{-K_1^{\mu\alpha\mu\gamma}}) \cdot e^{K_2^{\mu\alpha\mu\beta}} e^{K_3^{\mu\beta\mu\gamma}} \\ &= (\text{ch } 2K_2^* \cdot e^{K_2^{\mu\alpha\mu\beta}} - \text{sh } 2K_2^* \cdot e^{-K_2^{\mu\alpha\mu\beta}}) \\ & \quad \times (\text{ch } 2K_3^* \cdot e^{K_3^{\mu\beta\mu\gamma}} - \text{sh } 2K_3^* \cdot e^{-K_3^{\mu\beta\mu\gamma}}) \times e^{K_1^{\mu\alpha\mu\gamma}} \end{aligned}$$

Nous supposons maintenant que les spins $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$ font partie d'un modèle d'Ising sur un réseau triangulaire. L'hamiltonien de ce modèle peut être séparé en deux parties : une partie d'interaction de ces trois spins entre eux, et une partie d'interaction de ces trois spins avec le reste du réseau triangulaire que nous notons H_{int} . Reprenons la dernière identité algébrique en la multipliant par $e^{H_{\text{int}}}$. En sommant sur toutes les configurations des spins μ du réseau triangulaire, nous obtenons ainsi l'égalité :

$$\begin{aligned} & \text{ch } 2K_1^* \cdot Z - \text{sh } 2K_1^* \cdot Z(\alpha\gamma) \\ &= \text{ch } 2K_2^* \cdot \text{ch } 2K_3^* \cdot Z - \text{sh } 2K_2^* \cdot \text{ch } 2K_3^* \cdot Z(\alpha\beta) \\ & \quad - \text{sh } 2K_3^* \cdot \text{ch } 2K_2^* \cdot Z(\beta\gamma) + \text{sh } 2K_2^* \cdot \text{sh } 2K_3^* \cdot Z((\alpha\beta)(\beta\gamma)) \end{aligned}$$

où $Z(\alpha\beta)$ (resp $Z((\alpha\beta)(\beta\gamma))$) désigne la fonction de partition du modèle d'Ising ferromagnétique où une liaison, la liaison $(\alpha\beta)$, est antiferromagnétique (resp deux liaisons $(\alpha\beta)$ et $(\beta\gamma)$).

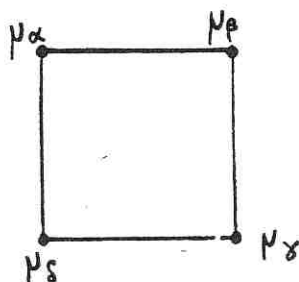
Effectuons, une transformation de dualité : nous passons alors sur le réseau nid d'abeille. Il est bien connu qu'une liaison négative donne par dualité une fonction de corrélation à deux points sur le réseau dual. Nous obtenons ainsi l'égalité finale :

$$\begin{aligned} & \text{ch } 2K_1^* - \text{sh } 2K_1^* \cdot \langle \sigma_i \sigma_\ell \rangle = \\ & \quad \text{ch } 2K_2^* \cdot \text{ch } 2K_3^* - \text{sh } 2K_2^* \text{ch } 2K_3^* \langle \sigma_j \sigma_\ell \rangle \\ & \quad = \text{sh } 2K_3^* \cdot \text{ch } 2K_2^* \langle \sigma_k \sigma_\ell \rangle + \text{sh } 2K_2^* \text{sh } 2K_3^* \langle \sigma_j \sigma_k \rangle \end{aligned}$$

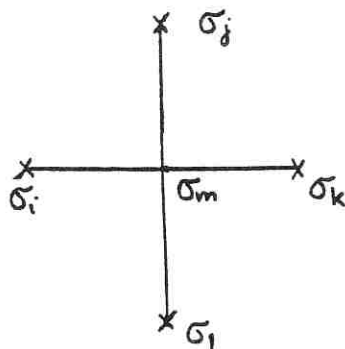
De manière analogue on obtient deux autres équations linéaires, où se ne sont plus (il) mais (jl) ou (kl) qui jouent un rôle privilégié. Ces trois équations permettent d'extraire $\langle \sigma_k \sigma_l \rangle$ en fonction de $\langle \sigma_i \sigma_k \rangle$, $\langle \sigma_j \sigma_k \rangle$ et $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$ et l'on retrouve ainsi la relation de Fisher.

b.1 Application au modèle d'Ising sur réseau carré

Considérons un autre exemple, le modèle d'Utiyama qui correspond à un modèle d'Ising où l'on périodifie le motif suivant



Le motif dual étant



Nous pouvons reprendre le raisonnement précédent, mutatis mutandis ; nous écrivons en l'occurrence les identités suivantes :

$$(\mu_\delta \mu_\alpha)(\mu_\alpha \mu_\beta) = (\mu_\beta \mu_\gamma)(\mu_\gamma \mu_\delta)$$

$$\text{ch } 2K_1^* \text{ ch } 2K_2^* \cdot Z - \text{sh } 2K_1^* \text{ ch } 2K_2^* Z(\alpha\delta)$$

$$= \text{sh } 2K_2^* \text{ ch } 2K_1^* Z(\alpha\beta) + \text{sh } 2K_1^* \text{ sh } 2K_2^* Z((\alpha\delta)(\alpha\beta))$$

$$= \text{ch } 2K_3^* \text{ ch } 2K_4^* \cdot Z - \text{sh } 2K_3^* \text{ ch } 2K_4^* Z(\beta\gamma)$$

$$= \text{sh } 2K_3^* \text{ ch } 2K_4^* Z(\gamma\delta) + \text{sh } 2K_3^* \text{ sh } 2K_4^* \cdot Z((\beta\gamma)(\gamma\delta))$$

d'où la relation :

$$\begin{aligned}
 & \text{ch } 2K_1^* \cdot \text{ch } 2K_2^* - \text{sh } 2K_1^* \cdot \text{ch } 2K_2^* \cdot \langle \sigma_i \sigma_m \rangle \\
 & - \text{sh } 2K_2^* \cdot \text{ch } 2K_1^* \cdot \langle \sigma_j \sigma_m \rangle + \text{sh } 2K_1^* \cdot \text{sh } 2K_2^* \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \\
 & = \text{ch } 2K_3^* \cdot \text{ch } 2K_4^* - \text{sh } 2K_3^* \cdot \text{ch } 2K_4^* \langle \sigma_m \sigma_k \rangle \\
 & - \text{sh } 2K_4^* \cdot \text{ch } 2K_3^* \langle \sigma_m \sigma_\ell \rangle + \text{sh } 2K_3^* \cdot \text{sh } 2K_4^* \langle \sigma_k \sigma_\ell \rangle
 \end{aligned} \tag{1}$$

Cette équation linéaire relie les fonctions de corrélations à deux points plus proches voisins et celles à deux points seconds plus proches voisins : cependant on remarque, du fait de la symétrie du réseau, l'égalité :

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \langle \sigma_k \sigma_\ell \rangle ;$$

il suffit donc d'avoir la relation $\text{sh } 2K_1^* \text{sh } 2K_2^* = \text{sh } 2K_3^* \text{sh } 2K_4^*$ (ou bien en passant une fois pour toute aux variables duales $\text{sh } 2K_1 \text{sh } 2K_2 = \text{sh } 2K_3 \text{sh } 2K_4$) pour que la relation linéaire ne relie plus que les fonctions à deux points plus proches voisins. Or cette condition est justement la condition pour que les matrices de transfert diagonales (qui engendrent la fonction de partition du modèle d'Utiyama) $T_1(K_1, K_2)$ et $T_2(K_3, K_4)$ représentées par la figure

commutent ! (On pourra par exemple se reporter à l'article de M.J. Stephen et L. Mittag ^[21]) Plaçons nous dans le cas particulier où

$$\operatorname{sh} 2K_1 \operatorname{sh} 2K_2 = \operatorname{sh} 2K_3 \operatorname{sh} 2K_4 = k \quad (2)$$

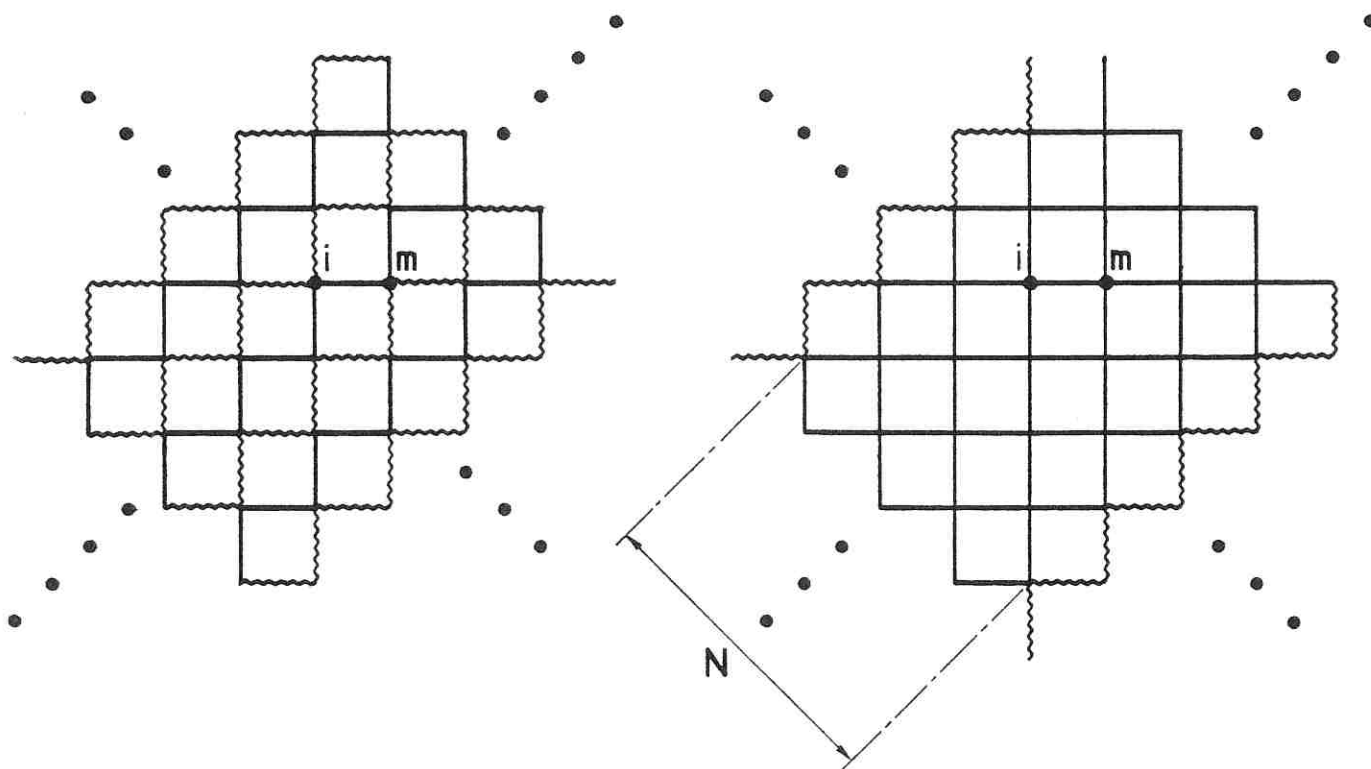
Considérons l'expression

$$\operatorname{ch} 2K_1 \operatorname{ch} 2K_2 - \operatorname{sh} 2K_1 \operatorname{ch} 2K_2 \langle \sigma_i \sigma_m \rangle = \operatorname{sh} 2K_2 \operatorname{ch} 2K_1 \langle \sigma_j \sigma_m \rangle.$$

Celle-ci est une fonction φ des quatre variables K_1, K_2, K_3, K_4 , ou encore, des deux variables $\operatorname{sh} 2K_1, \operatorname{sh} 2K_2, \operatorname{sh} 2K_3, \operatorname{sh} 2K_4$, et des deux variables d'anisotropie $v = \frac{\operatorname{sh} 2K_1}{\operatorname{sh} 2K_2}$ et $v' = \frac{\operatorname{sh} 2K_3}{\operatorname{sh} 2K_4}$; si nous nous plaçons dans le cas particulier où l'équation (2) est vérifiée, φ est alors une fonction des trois variables k, v et v' et la relation (1) s'écrit :

$$\varphi(k, v, v') = \varphi(k, v', v) \quad (3)$$

Utilisons maintenant le fait que T_1 et T_2 commutent lorsque la relation (2) est satisfaite. Cette commutation entre T_1 et T_2 implique l'égalité entre les deux figures suivantes



En effet en faisant commuter T_2 et T_1 , il est possible de rejeter les matrices de transfert T_2 aussi loin qu'on le désire des spins σ_i et σ_m , et de dégager ainsi une zone d'extension N , aussi grande qu'on le désire, autour de ces deux points. Il est alors clair que la fonction de corrélation $\langle \sigma_i \sigma_m \rangle$ ne dépend seulement que de K_1 et K_2 ou encore k et v (on remarquera que ce raisonnement ne peut s'appliquer qu'à des quantités locales, telles que les fonctions de corrélations, il ne saurait s'appliquer à une quantité globale telle que la fonction de partition qui, elle, dépend bien sûr de K_1, K_2, K_3 et K_4). De la même manière, nous voyons que $\langle \sigma_j \sigma_m \rangle$ ne dépend que de k et v , et donc, φ ne dépend que de k et v également. La relation (3) se réécrit alors

$$\varphi(k, v) = \varphi(k, v') ;$$

φ ne peut donc dépendre que de k ; sur le modèle d'Ising anisotrope sur réseau carré nous aurons par conséquent la propriété suivante :

$$\text{ch } 2K_1 \text{ ch } 2K_2 - \text{sh } 2K_1 \text{ sh } 2K_2 \langle \sigma_i \sigma_m \rangle - \text{sh } 2K_2 \text{ ch } 2K_1 \langle \sigma_j \sigma_m \rangle = f(k) \quad (4)$$

Vérifions cette propriété à l'aide des expressions exactes connues de la fonction de partition ; nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial K_1} \ln Z &= \langle \sigma_i \sigma_m \rangle \\ &= + \frac{2}{\pi} \coth 2K_1 \text{ ch } 2K_2 \text{ ch } 2K_2 \cdot \left[\Pi_1(\text{sh}^2 2K_1, k) - \frac{1}{\text{ch}^2 2K_1} \cdot K(k) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial K_2} \ln Z &= \langle \sigma_j \sigma_m \rangle \\ &= + \frac{2}{\pi} \coth 2K_2 \text{ ch } 2K_2 \text{ ch } 2K_1 \cdot \left[\Pi_1(\text{sh}^2 2K_2, k) - \frac{1}{\text{ch}^2 2K_2} \cdot K(k) \right] \end{aligned}$$

où

$$\Pi_1(v, k) = \int_0^{\pi/2} d\phi, (1 + v \sin^2 \phi)^{-1} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-1/2}$$

Π_1 est une intégrale elliptique de 3^{ème} espèce.

K est une intégrale elliptique de 1^{ère} espèce.

Nous avons donc pour φ l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & \text{ch } 2K_1 \text{ ch } 2K_2 - \text{ch } 2K_1 \text{ sh } 2K_2 \cdot \frac{2}{\pi} \coth K_2 \text{ ch } 2K_1 \text{ ch } 2K_2 \\ & \times \left[\Pi_1(\text{sh}^2 2K_2, k) - \frac{1}{\text{ch}^2 2K_2} \cdot K(k) \right] \\ & - \text{ch } 2K_2 \text{ sh } 2K_1 \cdot \frac{2}{\pi} \coth 2K_1 \text{ ch } 2K_1 \text{ ch } 2K_2 \\ & \times \left[\Pi_1(\text{sh}^2 2K_1, k) - \frac{1}{\text{ch}^2 2K_1} \cdot K(k) \right] \end{aligned}$$

Or nous avons l'égalité suivante sur Π_1 (voir par exemple [22])

$$\Pi_1(v, k) + \Pi_1\left(\frac{k^2}{v}, k\right) = K(k) + \frac{\pi}{2} \left[(1+v) \left(1 + \frac{k^2}{v} \right) \right]^{-1/2}. \quad (5)$$

En utilisant cette égalité dans l'expression précédente de φ , nous voyons que le terme $\text{ch } 2K_1 \text{ ch } 2K_2$ disparaît avec le terme $\frac{\pi}{2} [(1+v)(1 + \frac{k^2}{v})]^{-1/2}$ et les facteurs multiplicatifs qui lui sont associés, et l'on trouve finalement :

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{2}{\pi} (\text{ch } 2K_1 \text{ ch } 2K_2)^2 \cdot K(k) \cdot \left[1 - \frac{1}{\text{ch}^2 2K_1} - \frac{1}{\text{ch}^2 2K_2} \right] \\ &= -\frac{2}{\pi} \cdot K(k) \cdot (k^2 - 1) \end{aligned}$$

qui ne dépend effectivement que de k .

La relation (4) n'est en fait rien d'autre que la relation (17) de l'article de R.J. Baxter et I.G. Enting dans lequel les auteurs calculent (en utilisant la relation de Fisher et la relation triangle étoile) la fonction de partition du modèle d'Ising bidimensionnel [16]. Cette relation (17) joue d'ailleurs un rôle majeur dans ce calcul. Nous voyons donc que ces identités, loin d'avoir un simple intérêt esthétique, sont en fait des identités contraignantes. Nous avons vu d'autre part, dans le cas de la relation précédente, qu'elles ont rapport avec des identités de géométrie algébrique. non triviales telles que l'équation (5).

Essayons de préciser les contours de l'information contenue dans une relation telle que (4). Cette relation découle [16] de la relation triangle étoile (qui permet d'intégrrer complètement le modèle d'Ising bidimensionnel) mais elle est a priori moins contraignante. Regardons les contraintes qu'implique cette relation sur la diagrammatique résumée que nous avons introduit sur les fonctions de corrélation [3][4] :

$$\begin{array}{|} \hline t_2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \quad t_2 \cdot \frac{2t_1^2}{1-t_1^2} \quad \text{au total} \quad t_2 \cdot \frac{1+t_1^2}{1-t_1^2}$$

et à l'ordre suivant :

$$t_2^3 \frac{a + b t_1^2 + c t_1^4 + d t_1^6}{(1 - t_1^2)^3} = t_2^3 \cdot P(\text{ch } 2K_1)$$

où P est un polynôme de degré 3. (la relation d'inverse implique que $a = d$ et $b = c$, et l'on a de façon évidente $a = 0$).

$$\begin{array}{|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \quad t_1 \quad \begin{array}{|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \quad \frac{2t_1^2}{(1-t_1^2)^2} t_2^2$$

$$\begin{array}{|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \quad (-2) \left(\sum_{p \geq 1} p \cdot t_1^{2p+1} \right) \cdot t_2^2 = \frac{-2t_1^3}{(1-t_1^2)^2} \cdot t_2^2$$

à l'ordre suivant :

$$t_2^4 \cdot \frac{t_1 (a' + b' t_1^2 + c' t_1^4 + d' t_1^6)}{(1-t_1^2)^4} = t_2^4 \cdot \text{sh } 2K_1 \cdot Q(\text{ch } 2K_1)$$

où Q est un polynôme de degré 3.

La relation (4) se réécrit

$$\frac{1+t_2^2}{1-t_2^2} \cdot \text{ch } 2K_1 - \text{sh } 2K_1 \frac{1+t_2^2}{1-t_2^2} \cdot (t_1 + t_2^2 \text{sh } 2K_1 + t_2^4 \text{sh } 2K_1 \cdot Q(\text{ch } 2K_1) + \dots)$$

$$- \frac{2t_2}{1-t_2^2} \text{ch } 2K_1 \cdot (t_2 \cdot \text{ch } 2K_1 + t_2^3 \cdot P(\text{ch } 2K_1) + \dots)$$

$$= 1 + t_2^2 \cdot [2 \cdot \text{ch } 2K_1 - 2t_1 \text{sh } 2K_1 - \text{sh}^2 2K_1 - 2 \text{ch}^2 2K_1]$$

$$+ t_2^4 \cdot [2 \text{ch } 2K_1 - \text{sh}^2 2K_1 \cdot Q(\text{ch } 2K_1) - 2 \text{sh}^2 2K_1 - 2t_1 \text{sh } 2K_1 \\ - 2 \text{ch}^2 2K_1 - 2 \text{ch } 2K_1 \cdot P(\text{ch } 2K_1)] + \dots$$

$$= a_0 + a_2 \left(\frac{2t_2}{1-t_2^2} \right)^2 \cdot \text{sh}^2 2K_1 + a_4 \left(\frac{2t_2}{1-t_2^2} \right)^4 \text{sh}^4 2K_1 + \dots$$

$$+ \dots \text{ ce qui implique aux plus bas ordres } 4a_2 = -3 \text{ et}$$

$$- 4 \text{sh}^2 2K_1 - \text{sh}^2 2K_1 Q(\text{ch } 2K_1) - 2 \text{ch } 2K_1 P(\text{ch } 2K_1)$$

$$= 8 a_2 \text{sh}^2 2K_1 + 16 a_4 \text{sh}^4 2K_1 \quad (6)$$

Introduisons les coefficients des polynômes P et Q :

$$Q = \alpha + \beta \text{ch } 2K_1 + \gamma \text{ch}^2 2K_1 + \delta \text{ch}^3 2K_1$$

$$P = \alpha' + \beta' \text{ch } 2K_1 + \gamma' \text{ch}^2 2K_1 + \delta' \text{ch}^3 2K_1$$

La relation (6) se réécrit encore :

$$-4(\text{ch}^2 2K_1 - 1) - (\text{ch}^2 2K_1 - 1) (\alpha + \beta \text{ch } 2K_1 + \gamma \text{ch}^2 2K_1 + \delta \text{ch}^3 2K_1)$$

$$- 2 \text{ch } 2K_1 (\alpha' + \beta' \text{ch } 2K_1 + \gamma' \text{ch}^2 2K_1 + \delta' \text{ch}^3 2K_1)$$

$$= 8 a_2 (\text{ch}^2 2K_1 - 1) + 16 a_4 (\text{ch}^4 2K_1 - 2 \text{ch}^2 2K_1 + 1)$$

qui conduit aux relations :

$$4 + \alpha = 16 a_4 - 8 a_2, \beta = 2\alpha' = 0, \delta - \beta - 2\gamma' = 0,$$

$$-4 + \gamma - \alpha - 2\beta' = 8 a_2 - 32 a_4, -\gamma - 2\delta' = 16 a_4 \text{ et } \delta = 0$$

D'où deux relations permettant d'obtenir a_2 et a_4 à partir des coefficients de P et Q et les 4 relations suivantes :

$$0 = \beta' + \delta', \beta = 2\alpha', 2\gamma' = -\beta, \delta = 0$$

Comparons ces contraintes avec celles provenant de la relation d'inverse :

$$a = d, b = c \Rightarrow \begin{cases} \alpha' + \gamma' = 0 \\ \gamma' = 3\alpha' \end{cases} \Rightarrow \alpha' = \gamma' = 0$$

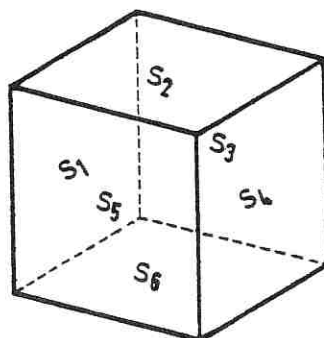
auxquels nous pouvons adjoindre la relation évidente $a = 0 \Leftrightarrow \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 0$.

Une relation telle que (4) est donc moins contraignante que la relation triangle (qui permet, elle, rappelons-le de calculer complètement les fonctions de corrélations $\langle \sigma_i \sigma_m \rangle$ et $\langle \sigma_j \sigma_m \rangle$), cependant elle impose des contraintes non triviales qui, à l'ordre t_2^4 , sont extrêmement proches des contraintes provenant de la réunion de la relation d'inverse et de la symétrie $t_1 \leftrightarrow t_2$. Elle impose, par ailleurs, des relations entre les développements de $\langle \sigma_i \sigma_m \rangle$ et de $\langle \sigma_j \sigma_m \rangle$. Signalons également que la généralisation au modèle de Potts de cette même relation linéaire sur les fonctions de corrélation du réseau carré à quatre paramètres (généralisation du modèle d'Utiyama) existe.

b.2. Application au modèle d'Ising sur réseau cubique

Les équations linéaires sur fonctions de corrélations existent pour des problèmes en dimension 3 ou plus : Considérons le modèle suivant défini sur le réseau cubique, en périodifiant le motif élémentaire auquel

est associé le poids de Boltzmann $e^{\sum_{i=1}^6 K_i S_i}$;

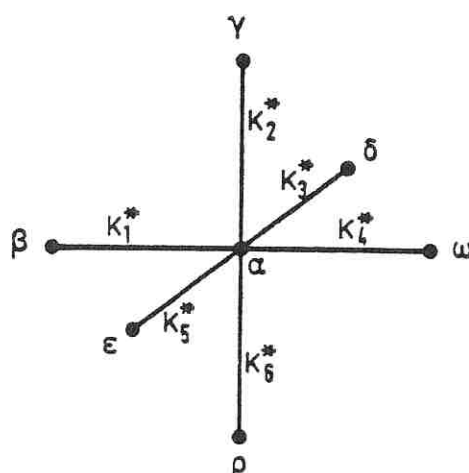


les S_i sont des variables d'Ising associées à chaque face du cube, les six S_i étant contraints, pour chaque cube élémentaire, par la condition $S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6 = 1$, condition que nous pouvons encore écrire en faisant intervenir une variable muette du type Ising α , en considérant le facteur

$$1 + S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6 = \sum_{\alpha=\pm 1} \prod_{i=1}^6 g(S_i, \alpha)$$

(Pour expliciter quelque peu la dualité, nous introduisons la fonction de deux variables du type Ising suivante : $g(\lambda, 1) = 1$, $g(\lambda, -1) = \lambda$ qui définit d'ailleurs une fonction symétrique, on peut voir en effet que $g(1, \mu) = 1$ et $g(-1, \mu) = \mu$; g est un caractère du groupe Z_2 .

Le motif dual de ce cube est le motif suivant (où β , γ , δ , ω , ρ , ϵ sont les variables associés aux cubes environnants notre cube initial) :



Là encore le raisonnement n'est que la généralisation immédiate des précédents ; nous écrivons en l'occurrence

$$S_1 S_2 S_3 = S_4 S_5 S_6$$

et utilisons l'identité

$$S_i \cdot e^{K_i S_i} = \text{ch } 2K_i^* \cdot e^{K_i S_i} - \text{sh } 2K_i^* \cdot e^{-K_i S_i}$$

Par dualité le terme $e^{-K_i S_i}$ donne

$$\begin{aligned} \sum_{S_i} e^{-K_i S_i} \cdot g(S_i, \alpha) g(S_i, \beta) &= e^{-K_i} + e^{K_i} \alpha \beta \\ &= \alpha \beta (e^{K_i} + e^{-K_i} \alpha \beta) = \frac{e^{K_i}}{\text{ch } K_i^*} \cdot \alpha \beta e^{K_i^* \alpha \beta} \end{aligned}$$

L'identité précédente va donc conduire à l'égalité suivante sur les fonctions de corrélation du modèle d'Ising tridimensionnel anisotrope :

$$\text{ch } 2K_1^* \text{ch } 2K_2^* \text{ch } 2K_3^* - \text{sh } 2K_1^* \text{ch } 2K_2^* \text{ch } 2K_3^* \langle \alpha \beta \rangle$$

$$- \text{sh } 2K_2^* \text{ch } 2K_1^* \text{ch } 2K_3^* \langle \alpha \gamma \rangle$$

$$- \text{sh } 2K_3^* \text{ch } 2K_1^* \text{ch } 2K_2^* \langle \alpha \delta \rangle$$

$$+ \text{sh } 2K_1^* \text{sh } 2K_2^* \text{ch } 2K_3^* \langle \beta \gamma \rangle$$

$$+ \text{sh } 2K_1^* \text{sh } 2K_3^* \text{ch } 2K_2^* \langle \beta \delta \rangle$$

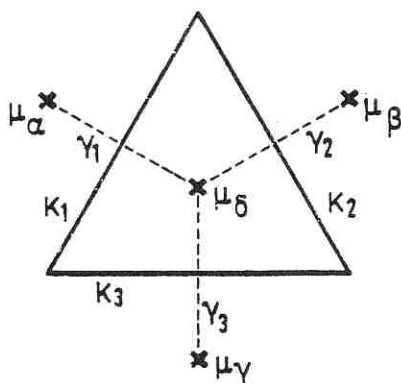
$$+ \text{sh } 2K_2^* \text{sh } 2K_3^* \text{ch } 2K_1^* \langle \gamma \delta \rangle$$

$$- \text{sh } 2K_1^* \text{sh } 2K_2^* \text{sh } 2K_3^* \langle \alpha \beta \gamma \delta \rangle$$

$$= \text{idem en changeant } K_1 \text{ ou } K_4, K_2 \text{ ou } K_6, K_3 \text{ en } K_5, \beta \text{ en } \omega, \gamma \text{ ou } \rho, \delta \text{ en } \varepsilon.$$

b.3. Application au modèle d'Ising en champ

Venons-en à l'exemple, à peine plus compliqué, du modèle d'Ising en champ magnétique ; nous considérons un motif élémentaire triangulaire, où, à chaque liaison, est associé une variable de liaison λ_i du type Ising.



Considérons l'expression suivante (nous avons repris la fonction g précédemment définie)

$$e^{K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2 + K_3 \lambda_3} \cdot e^{H(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\delta)} \\ \cdot g(\lambda_1, \mu_\alpha) g(\lambda_1, \mu_\delta) g(\lambda_2, \mu_\beta) g(\lambda_2, \mu_\delta) g(\lambda_3, \mu_\delta) g(\lambda_3, \mu_\gamma)$$

Si nous sommes sur les λ_i nous obtenons à des facteurs connus près

$$e^{K_1^* \mu_\alpha \mu_\delta + K_2^* \mu_\beta \mu_\delta + K_3^* \mu_\gamma \mu_\delta + H(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\delta)}$$

$$\left(\text{en effet } \sum_{\lambda_1} e^{K_1 \lambda_1} g(\lambda_1, \mu_\alpha) g(\lambda_1, \mu_\delta) = e^{K_1} + e^{-K_1} \mu_\alpha \mu_\delta = \frac{e^{K_1}}{\text{ch } K_1^*} \cdot e^{K_1^* \mu_\alpha \mu_\delta} \right)$$

On obtient donc le modèle d'Ising en champ magnétique sur réseau triangulaire. Par contre, si l'on somme sur la variable μ_δ , on obtient :

(les variables $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$ interviendront dans d'autres triangles élémentaires et donneront des résultats analogues)

$$e^{K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2 + K_3 \lambda_3 + H^* \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$$

$$\left(\text{en effet } \sum_{\mu_\delta} g(\lambda_1, \mu_\delta) g(\lambda_2, \mu_\delta) g(\lambda_3, \mu_\delta) e^{H \mu_\delta} = e^H + e^{-H} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \right. \\ \left. = \frac{e^H}{\text{ch } H^*} \cdot e^{H^* \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \right)$$

Nous considérons le modèle où les variables sont les variables de liaisons λ_i du type Ising, et où le poids de Boltzmann est donné par l'expression précédente. Le raisonnement est l'analogie de ce que l'on écrivait sans

champ ; on écrit par exemple la suite d'égalités :

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1)(\lambda_2) &= (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)(\lambda_3) \quad \text{d'où} \\
 (\text{ch } 2K_1^* \cdot e^{K_1\lambda_1} - \text{sh } 2K_1^* \cdot e^{-K_1\lambda_1})(\text{ch } 2K_2^* \cdot e^{K_2\lambda_2} - \text{sh } 2K_2^* \cdot e^{-K_2\lambda_2}) e^{K_3\lambda_3} \\
 &= (\text{ch } 2H e^{H\lambda_1\lambda_2\lambda_3} - \text{sh } 2H e^{-H\lambda_1\lambda_2\lambda_3})(\text{ch } 2K_2^* \cdot e^{K_3\lambda_3} - \text{sh } 2K_3^* \cdot e^{-K_3\lambda_3})
 \end{aligned}$$

De plus nous avons

$$\sum_{\lambda_1} e^{-K_1\lambda_1} g(\lambda_1, \mu_\alpha) g(\lambda_1, \mu_\beta) = e^{-K_2} + e^{K_1} \mu_\alpha \mu_\beta = \frac{e^{K_1}}{\text{ch } K_1} \mu_\alpha \mu_\beta e^{K_1^* \mu_\alpha \mu_\beta}$$

et

$$\sum_{\mu} g(\lambda_1, \mu) g(\lambda_2, \mu) g(\lambda_3, \mu) \cdot \mu \cdot e^{H\mu} = e^H - e^{-H} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{e^H}{\text{ch } H} \cdot e^{-H^* \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$$

d'où, par dualité, l'égalité suivante sur les fonctions de corrélations :

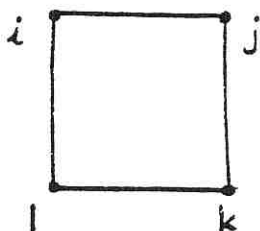
$$\begin{aligned}
 &\text{ch } 2K_1^* \cdot \text{ch } 2K_2^* - \text{sh } 2K_1^* \text{ch } 2K_2^* \langle \mu_\alpha \mu_\beta \rangle \\
 &- \text{sh } 2K_2^* \cdot \text{ch } 2K_1^* \langle \mu_\beta \mu_\delta \rangle + \text{sh } 2K_1^* \text{sh } 2K_2^* \langle \mu_\alpha \mu_\beta \rangle \\
 &= \text{ch } 2H \cdot \text{ch } 2K_3^* - \text{sh } 2H \text{ch } 2K_3^* \langle \mu_\delta \rangle \\
 &- \text{sh } 2K_3^* \cdot \text{ch } 2H \langle \mu_\delta \mu_\gamma \rangle + \text{sh } 2H \text{sh } 2K_3^* \langle \mu_\gamma \rangle
 \end{aligned}$$

On retrouve bien évidemment, pour $H = 0$, l'équation linéaire de Fisher.

b.4. Application au modèle à 8 vertex symétrique

On peut également généraliser ces idées dans le cas de modèles avec des interactions plus compliquées que celles entre plus proches voisins. Considérons par exemple pour fixer les idées, le modèle à 8 vertex symétrique. Nous regardons ce modèle comme deux modèles d'Ising

couplés :



$$i, j, k, l = \pm 1$$

$$W(i, j, k, l) = A \cdot e^{K_1 ik + K_2 jl + M ijkl}$$

$$= \frac{(1+ik)(1+jl)}{4} \cdot a + \frac{(1+ik)(1-jl)}{4} \cdot b \\ + \frac{(1-ik)(1+jl)}{4} \cdot c + \frac{(1-ik)(1-jl)}{4} \cdot d$$

expression que nous noterons symboliquement par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; la dualité sur ce modèle correspond aux transformations suivantes

$$a^* = \frac{1}{2} (a - b + c - d)$$

$$b^* = \frac{1}{2} (-a + b + c - d)$$

$$c^* = \frac{1}{2} (a + b + c + d)$$

$$d^* = \frac{1}{2} (-a - b + c + d)$$

Par dualité nous obtenons par exemple les transformations qui suivent sur les expressions symboliques précédentes :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} c^* & d^* \\ a^* & b^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -b^* & -d^* \\ -a^* & -c^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -d^* & -c^* \\ -b^* & -a^* \end{pmatrix}$$

De plus on vérifie facilement sur les expressions algébriques $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que l'on a ik , $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ que l'on peut toujours écrire comme une combinaison linéaire :

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -b & -d \\ -a & -c \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -d & -c \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

qui par dualité donnera la combinaison linéaire

$$\alpha \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a^* & -b^* \\ c^* & -d^* \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ -c^* & -d^* \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} a^* & -b^* \\ -c^* & d^* \end{pmatrix}$$

Si nous symbolisons par $\square$ (resp $\begin{smallmatrix} * \\ \square \end{smallmatrix}$) la précédente expression $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (resp $\begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}$) par $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$ l'expression (ik) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ et $\begin{smallmatrix} * \\ \square \end{smallmatrix}$ la même quantité mais pour les paramètres duaux $\begin{pmatrix} a^* & b^* \\ -c^* & -d^* \end{pmatrix}$ et aussi l'expression $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = (j\ell) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et enfin $\begin{smallmatrix} \square \\ * \end{smallmatrix}$ l'expression (ijkl) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ (et de même $\begin{smallmatrix} * \\ * \end{smallmatrix}$ pour les paramètres duaux), alors nous venons d'établir que le terme se transforme par dualité en la combinaison linéaire

$$\alpha \begin{smallmatrix} * \\ \square \end{smallmatrix} + \beta \begin{smallmatrix} * \\ \square \end{smallmatrix} + \gamma \begin{smallmatrix} * \\ \square \end{smallmatrix} + \delta \begin{smallmatrix} * \\ \square \end{smallmatrix}$$

Le raisonnement est ensuite complètement calqué sur celui que nous avons effectué dans le cas du simple modèle d'Ising. Nous utilisons le fait que les spins sont des spins d'Ising, et donc que $\sigma^2 = 1$ pour ces spins ; on a ainsi la relation algébrique suivante (avec des notations évidentes) pour un produit de quatre telles expressions :

Or chacun des quatre termes va donner par dualité une somme de quatre termes : l'identité précédente engendra donc, lorsque l'on développera, une somme de 16 termes qui devra être égale au terme. Donnons pour illustration un des 16 termes provenant du développement précédent :

Lorsque l'on sommera sur toutes les configurations de spins ces identités deviendront des relations exprimant qu'une certaine combinaison linéaire de 15 fonctions de corrélations, plus ou moins compliquées, est une

fonction connue.

b.5. Généralisation de la relation de Fisher au modèle de Potts

i) Tous les exemples précédents portaient sur des modèles d'Ising plus ou moins compliqués (variables appartenant à Z_2). Nous allons montrer que des équations linéaires tout à fait analogues existent également sur les fonctions de corrélation des modèles du type modèle de Potts (les variables appartiennent à Z_q) ; pour ce faire, nous regardons l'exemple le plus simple du modèle de Potts (scalaire) sur réseau triangulaire (avec en parallèle son réseau dual le réseau nid d'abeille). Examinons la dualité sur ce modèle, en particulier les relations concernant les fonctions de corrélations ; nous avons les relations suivantes

$$\sum_{\lambda \in Z_q} \delta_\lambda \cdot e^{K\delta_\lambda} \cdot \xi^{\lambda(\mu_\alpha - \mu_\beta)} = e^K$$

réciroquement

$$\sum_{\mu \in Z_q} e^K \cdot \xi^{\lambda \cdot \mu} = \begin{cases} q \cdot e^K & \text{si } \mu=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit dans tous les cas $q \delta_\lambda \cdot e^{K\delta_\lambda}$ (7)

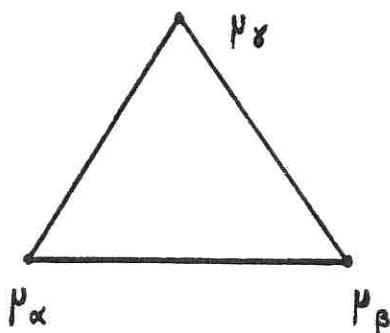
De plus nous pouvons toujours écrire l'identité algébrique

$$\delta_{\sigma_i \sigma_j} \cdot e^{K\delta_{\sigma_i \sigma_j}} = A \cdot e^{K\delta_{\sigma_i \sigma_j}} + B \cdot e^K \quad (8)$$

avec

$$A = \frac{-e^K}{1-e^K}, \quad B = \frac{1}{1-e^K}$$

Enfin pour tout triangle élémentaire



si nous notons $\alpha = \delta^{\mu_\alpha, \mu_\beta}$, $\beta = \delta^{\mu_\beta, \mu_\gamma}$, $\gamma = \delta^{\mu_\alpha, \mu_\gamma}$, nous voyons que le triplet non ordonné (α, β, γ) peut être égal à $(0, 0, 0)$ ou $(1, 0, 0)$ ou $(1, 1, 1)$, mais en aucun cas à $(1, 1, 0)$; (en effet cela signifierait que par exemple $\sigma_i = \sigma_j = \sigma_k$ mais que $\sigma_i \neq \sigma_k$). La somme $\Sigma = \alpha + \beta + \gamma$ peut donc prendre les valeurs 0, 1, 3 mais pas 2, ce que l'on peut encore écrire en disant que l'on a l'identité suivante :

$$\Sigma(\Sigma-1)(\Sigma-3) = 0 = \Sigma^3 - 4\Sigma^2 + 3\Sigma$$

De plus

$$\begin{aligned}\Sigma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) \\ &= \Sigma + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)\end{aligned}$$

en effet $\alpha^2 = \alpha$ car $\alpha = 0$ ou 1 (de même pour β et γ). On a également

$$\begin{aligned}\Sigma^3 &= \Sigma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) \Sigma \\ &= \Sigma^2 + 2(3\alpha\beta\gamma + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)) \\ &= \Sigma + 6(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) + 6\alpha\beta\gamma\end{aligned}$$

L'identité précédente s'écrit donc en conséquence $3\alpha\beta\gamma = (\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)$

(Dans le cas du modèle d'Ising en posant $\lambda_1 = \mu_\alpha \mu_\beta$, $\lambda_2 = \mu_\alpha \mu_\gamma$, $\lambda_3 = \mu_\beta \mu_\gamma$ nous avons :

$$\alpha = \frac{1+\lambda_1}{2}, \quad \beta = \frac{1+\lambda_2}{2}, \quad \gamma = \frac{1+\lambda_3}{2}$$

l'identité précédente s'écrit

$$\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 + 3\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 3 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (9)$$

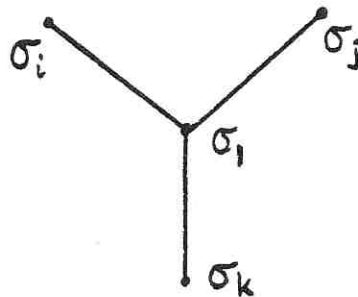
(identité qui est bien vérifiée par le modèle d'Ising qui vérifie une identité encore plus contraignante : $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$). De manière tout à fait analogue aux démonstrations précédentes sur le modèle d'Ising, cette identité (9) jointe à la relation (8) fournira une nouvelle identité. qui, par dualité, en utilisant (7), nous conduira à une relation linéaire exprimant qu'une certaine combinaison linéaire des fonctions de correla-

tions du réseau nid d'abeille

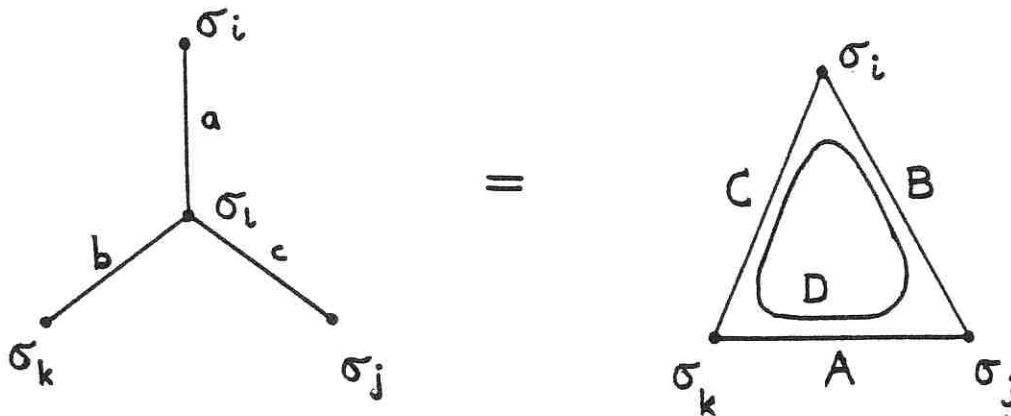
$$\langle \delta_{\sigma_i \sigma_\ell} \rangle, \langle \delta_{\sigma_\ell \sigma_k} \rangle, \langle \delta_{\sigma_j \sigma_\ell} \rangle, \langle \delta_{\sigma_i \sigma_\ell} \delta_{\sigma_\ell \sigma_k} \rangle,$$

$$\langle \delta_{\sigma_\ell \sigma_k} \cdot \delta_{\sigma_\ell \sigma_j} \rangle, \langle \delta_{\sigma_\ell \sigma_k} \cdot \delta_{\sigma_i \sigma_\ell} \rangle \text{ et}$$

$\langle \delta_{\sigma_i \sigma_\ell} \delta_{\sigma_\ell \sigma_k} \delta_{\sigma_j \sigma_\ell} \rangle$ est une expression connue. $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k$ sont représentés par la figure



ii) Dans le cas simple de la généralisation de l'équation de Fisher au modèle de Potts, celle ci peut être obtenue en utilisant simplement la relation triangle-étoile sur ces modèles. Dans le cas du modèle de Potts nous avons :



$$\sum_{\sigma_\ell \in \mathbb{Z}_q} a^{\delta_{\sigma_i, \sigma_\ell}} b^{\delta_{\sigma_j, \sigma_\ell}} c^{\delta_{\sigma_k, \sigma_\ell}} = \lambda A^{\delta_{\sigma_k \sigma_j}} B^{\delta_{\sigma_i \sigma_j}} C^{\delta_{\sigma_\ell \sigma_k}} D^{\delta_{\sigma_i \sigma_k} \delta_{\sigma_k \sigma_j}} \quad (10)$$

et les équations suivantes (pour $q \geq 3$)

$$\lambda B = ac + b + (q-2)$$

$$\lambda ABCD = abc + (q-1)$$

$$\lambda = a + b + c + (q-3)$$

et leur permutations.

En regardant λ, A, B, C, D comme des fonctions de a, b, c et en prenant la dérivée logarithmique partielle par rapport à a , on obtient une relation linéaire entre $\langle \delta_{\sigma_j, \sigma_l} \rangle, \langle \delta_{\sigma_j, \sigma_k} \rangle, \langle \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \rangle, \langle \delta_{\sigma_i, \sigma_k} \rangle$ et $\langle \delta_{\sigma_i, \sigma_k} \cdot \delta_{\sigma_k, \sigma_j} \rangle$.

En dérivant par rapport à b et c , on obtient deux autres relations analogues. Nous pouvons utiliser ces relations de différentes manières; nous pouvons, par exemple, regarder ces relations à la température critique, où l'on connaît les fonctions de corrélation entre plus proches voisins sur réseaux triangulaire ou hexagonale, pour déduire de cette manière la fonction à 3 points $\langle \delta_{\sigma_i, \sigma_k} \delta_{\sigma_k, \sigma_j} \rangle$ à la température critique ($D=1$).

Si l'on désire, dans cette relation triangle, ne pas avoir de terme d'interaction à 3 spins (i.e. $D=1$), on est conduit à écrire la relation :

$$abc + (q-1) = \frac{(ac+b+q-2)(bc+a+q-2)(ab+c+q-2)}{(a+b+c+q-3)^2}$$

Cette relation est équivalente à la réunion de la relation de criticité pour le réseau hexagonal

$$abc = (ab+bc+ca) + (a+b+c)(q-1) + (q^2-3q+1) \quad (11)$$

et des solutions dégénérées $a=1$ ou $b=1$ ou $c=1$. De plus on peut voir que si la condition (11) est satisfaite, on a alors les relations

$$A = \frac{a+q-1}{a-1}, \quad B = \frac{b+q-1}{b-1} \quad \text{et} \quad C = \frac{c+q-1}{c-1}$$

et la condition (11) peut se réécrire

$$ABC = A + B + C + (q-2)$$

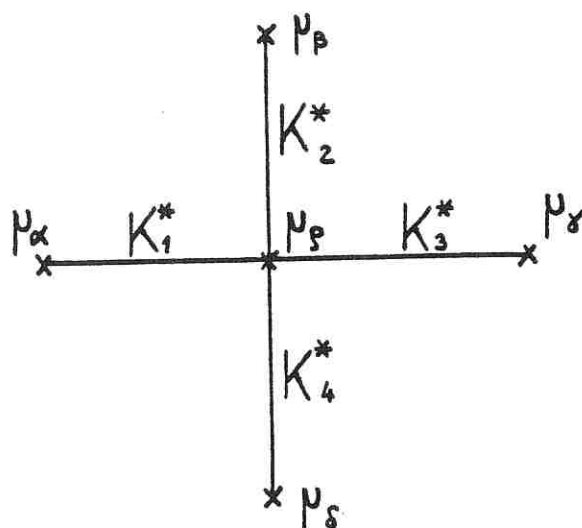
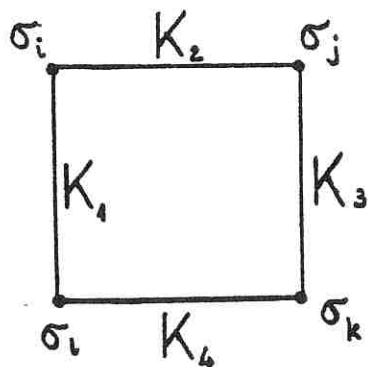
(condition de criticalité pour le réseau triangulaire),

Si l'on suppose maintenant que la relation (11) est satisfaite (c'est-à-dire que $D=1$), il est possible de trouver des relations linéaires entre les fonctions de corrélations entre plus proches voisins et seconds plus proches voisins sur le réseau hexagonal, ne faisant pas intervenir de fonctions de corrélation à trois spins.

c. Les relations de Perk et les relations linéaires sur les fonctions de corrélations

Revenons au modèle d'Ising sur réseau carré, et regardons comment il est parfois possible d'associer les équations linéaires précédentes à des identités non linéaires très simples, pour obtenir des relations non linéaires intéressantes :

i) Considérons un motif élémentaire du type Utiyama ainsi que son motif dual



A l'aide de raisonnements analogues aux précédents, on voit facilement que l'on a les relations suivantes :

$$\langle \mu_\alpha \mu_\gamma \rangle = \text{ch } 2K_1 \text{ ch } 2K_3 - \text{sh } 2K_1 \text{ ch } 2K_3 \langle \sigma_i \sigma_\ell \rangle$$

$$- \text{sh } 2K_3 \text{ ch } 2K_1 \langle \sigma_j \sigma_k \rangle + \text{sh } 2K_1 \text{ sh } 2K_3 \langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_\ell \rangle$$

$$\langle \mu_\alpha \mu_\rho \rangle \langle \mu_\rho \mu_\gamma \rangle = (\text{ch } 2K_1 - \text{sh } 2K_1 \langle \sigma_i \sigma_\ell \rangle) (\text{ch } 2K_3 - \text{sh } 2K_3 \langle \sigma_j \sigma_k \rangle)$$

$$= \text{ch } 2K_1 \text{ ch } 2K_3 - \text{sh } 2K_1 \text{ ch } 2K_3 \langle \sigma_i \sigma_\ell \rangle$$

$$- \text{sh } 2K_3 \text{ ch } 2K_1 \langle \sigma_j \sigma_k \rangle + \text{sh } 2K_1 \text{ sh } 2K_3 \langle \sigma_i \sigma_\ell \rangle \langle \sigma_j \sigma_k \rangle$$

D'où en faisant la différence de ces deux quantités :

$$\langle \mu_\alpha \mu_\gamma \rangle - \langle \mu_\alpha \mu_\rho \rangle \langle \mu_\rho \mu_\gamma \rangle =$$

$$\text{sh } 2K_1 \text{ sh } 2K_3 \cdot (\langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_\ell \rangle - \langle \sigma_i \sigma_\ell \rangle \langle \sigma_j \sigma_k \rangle)$$

Utilisons l'une des identités non linéaire de Boel et al [13][14]

$$\langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_\ell \rangle = \langle \sigma_i \sigma_\ell \rangle \langle \sigma_j \sigma_k \rangle$$

$$+ \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \langle \sigma_k \sigma_\ell \rangle = \langle \sigma_i \sigma_k \rangle \langle \sigma_j \sigma_\ell \rangle$$

En combinant ces deux relations on obtient donc :

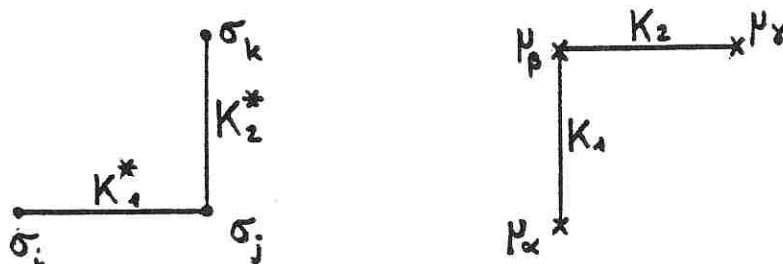
$$\langle \mu_\alpha \mu_\gamma \rangle - \langle \mu_\alpha \mu_\rho \rangle \langle \mu_\rho \mu_\gamma \rangle =$$

$$\text{sh } 2K_1 \text{ sh } 2K_3 \cdot (\langle \sigma_i \sigma_j \rangle \langle \sigma_k \sigma_\ell \rangle - \langle \sigma_i \sigma_k \rangle \langle \sigma_j \sigma_\ell \rangle)$$

Cette équation est une des plus simples des identités quadratiques, pour les fonctions de corrélations du modèle d'Ising, obtenues par J.H.H. Perk [23] (avec les notations de cet auteur on retrouve l'équation précédente en faisant $x_2^* = y_1^*$, x_1^* , x_2^* , y_1^* , y_2^* alignés).

Les identités de Perk sont des identités importantes puisqu'elles permettent de retrouver les équations non linéaires aux différences données par Mc Coy et T.T. Wu pour le modèle d'Ising homogène. Ces équations étant à leur tour intéressantes, car elles redonnent, dans la limite de scaling, les équations transcendantes, dites de Painlevé, qui régissent ainsi le comportement des fonctions de corrélation près du point critique.

ii) Considérons un autre exemple très simple également



nous avons les égalités

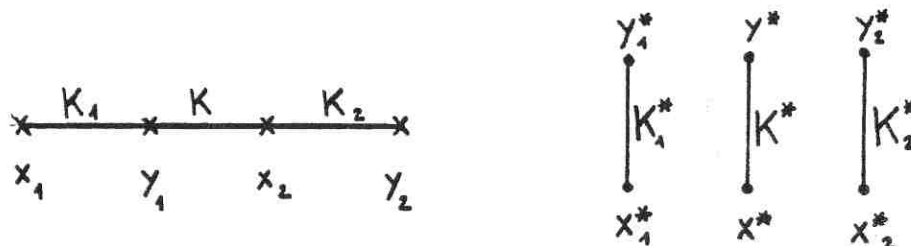
$$\begin{aligned}
 \langle \mu_\alpha \mu_\gamma \rangle &= \text{ch } 2K_1^* \text{ch } 2K_2^* - \text{sh } 2K_1^* \text{ch } 2K_2^* \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \\
 &\quad - \text{sh } 2K_2^* \text{ch } 2K_1^* \langle \sigma_j \sigma_k \rangle + \text{sh } 2K_1^* \text{sh } 2K_2^* \langle \sigma_i \sigma_k \rangle \\
 \langle \mu_\beta \mu_\gamma \rangle \langle \mu_\alpha \mu_\beta \rangle &= (\text{ch } 2K_1^* - \text{sh } 2K_1^* \langle \sigma_i \sigma_j \rangle) (\text{ch } 2K_2^* - \text{sh } 2K_2^* \langle \sigma_j \sigma_k \rangle) \\
 &= \text{ch } 2K_1^* \text{ch } 2K_2^* - \text{sh } 2K_1^* \text{ch } 2K_2^* \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \\
 &\quad - \text{sh } 2K_2^* \text{ch } 2K_1^* \langle \sigma_j \sigma_k \rangle + \text{sh } 2K_1^* \text{sh } 2K_2^* \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \langle \sigma_j \sigma_k \rangle
 \end{aligned}$$

d'où en faisant la différence de ces deux égalités

$$\begin{aligned}
 \langle \mu_\alpha \mu_\gamma \rangle - \langle \mu_\alpha \mu_\beta \rangle \langle \mu_\beta \mu_\gamma \rangle &= \\
 \text{sh } 2K_1^* \text{sh } 2K_2^* (\langle \sigma_i \sigma_k \rangle - \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \langle \sigma_j \sigma_k \rangle) &=
 \end{aligned}$$

qui, elle aussi, correspond à une des identités de J.H.H. Perk. (il faut considérer le cas $x_2^* = y_1^*$, $x_1^* y_1^*$ et $x_2^* y_2^*$ formant un angle droit).

iii) Considérons l'exemple immédiatement plus compliqué :



Pour plus de commodité dans l'écriture, nous adoptons les notations de Perk : par exemple $\langle x_1 x_2 \rangle$ désignera la fonction de corrélation à deux points, les deux points étant ici x_1 et x_2 . Introduisons aussi les notations $C_1 = \text{ch } 2K_1$, $S_1 = \text{sh } 2K_1$, $C = \text{ch } 2K$, $S = \text{sh } 2K$, $C_2 = \text{ch } 2K_2$, $S_2 = \text{sh } 2K_2$.

Les calculs précédents deviennent alors :

$$\langle x_1 x_2 \rangle = C_1 C - S_1 C \langle x_1^* y_1^* \rangle - S C_1 \langle x^* y^* \rangle + S S_1 \langle x_1^* y_1^* x^* y^* \rangle$$

$$\langle y_1 y_2 \rangle = C_2 C - C S_2 \langle x_2^* y_2^* \rangle - S C_2 \langle x^* y^* \rangle + S S_2 \langle x^* y^* x_2^* y_2^* \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle x_1 y_2 \rangle &= C_1 C C_2 - C C_2 S_1 \langle x_1^* y_1^* \rangle - C_1 C_2 S \langle x^* y^* \rangle - C C_1 S_2 \langle x_2^* y_2^* \rangle \\ &+ C_1 S S_2 \langle x^* y^* x_2^* y_2^* \rangle + S_1 C S_2 \langle x_1^* y_1^* x_2^* y_2^* \rangle + S_1 S C_2 \langle x_1^* y_1^* x^* y^* \rangle \\ &- S S_1 S_2 \langle x_1^* y_1^* x^* y^* x_2^* y_2^* \rangle \end{aligned}$$

$$\langle y_1 x_2 \rangle = C - S \langle x^* y^* \rangle$$

et nous avons l'égalité suivante qui s'en déduit :

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 \rangle \langle y_1 y_2 \rangle - \langle x_1 y_2 \rangle \langle y_1 x_2 \rangle &= \\ S_1 S_2 C C \langle x_1^* y_1^* \rangle \langle x_2^* y_2^* \rangle &+ \\ + S_1 S_2 S S \langle x_1^* y_1^* x^* y^* \rangle \langle x^* y^* x_2^* y_2^* \rangle &- \\ - S_1 S_2 S C \langle x_1^* y_1^* x^* y^* \rangle \langle x_2^* y_2^* \rangle &- \\ - S_1 S_2 S C \langle x_2^* y_2^* x^* y^* \rangle \langle x_1^* y_1^* \rangle &+ \\ + S_1 S_2 S C \langle x_1^* y_1^* x_2^* y_2^* \rangle \langle x^* y^* \rangle &- \\ - S_1 S_2 C C \langle x_1^* y_1^* x_2^* y_2^* \rangle &- \\ - S_1 S_2 S S \langle x_1^* y_1^* x^* y^* x_2^* y_2^* \rangle \langle x^* y^* \rangle & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + CSS_1 S_2 \langle x_1 y_1 x y x_2 y_2 \rangle \\
& = S_1 S_2 CC (\langle x_1^* y_1^* \rangle \langle x_2^* y_2^* \rangle - \langle x_1^* y_1^* x_2^* y_2^* \rangle) \\
& + S_1 S_2 SS (\langle x_1^* y_1^* x^* y^* \rangle \langle x^* y^* x_2^* y_2^* \rangle - \langle x_1^* y_1^* x^* y^* x_2^* y_2^* \rangle \langle x^* y^* \rangle) \\
& + S_1 S_2 SC (\langle x_2^* y_2^* x^* y^* \rangle \langle x_1^* y_1^* \rangle \langle x_1^* y_1^* x_2^* y_2^* \rangle \langle x^* y^* \rangle - \langle x_1^* y_1^* x^* y^* \rangle \langle x_2^* y_2^* \rangle + \langle x_1^* y_1^* x^* y^* x_2^* y_2^* \rangle)
\end{aligned}$$

(on vérifie en effet facilement que les termes en $C_1 S_2$ ou $C_2 S_1$ disparaissent).

En utilisant alors l'identité non linéaire suivante

$$\begin{aligned}
\langle x_1^* y_1^* x_2^* y_2^* \rangle & = \langle x_1^* y_1^* \rangle \langle x_2^* y_2^* \rangle \\
& + \langle x_1^* x_2^* \rangle \langle y_1^* y_2^* \rangle - \langle x_1^* y_2^* \rangle \langle x_2^* y_1^* \rangle
\end{aligned}$$

On obtient finalement que

$$\begin{aligned}
\langle x_1^* x_2^* \rangle \langle y_1^* y_2^* \rangle - \langle x_1^* y_2^* \rangle & = \\
S_1 S_2 (\langle x_1^* y_2^* \rangle \langle x_2^* y_1^* \rangle - \langle x_1^* x_2^* \rangle \langle y_1^* y_2^* \rangle) & + R \cdot S_1 S_2
\end{aligned}$$

où R est égal à

$$\begin{aligned}
S_2 \cdot (\langle x_1^* y_1^* x^* y^* \rangle \langle x^* y^* x_2^* y_2^* \rangle & + \langle x_1^* x_2^* \rangle \langle y_1^* y_2^* \rangle \\
- \langle x_1^* y_2^* \rangle \langle x_2^* y_1^* \rangle - \langle x_1^* y_1^* x^* y^* x_2^* y_2^* \rangle & \langle x^* y^* \rangle) \\
+ SC (\langle x_1^* y_1^* x_2^* y_2^* \rangle \langle x^* y^* \rangle - \langle x_1^* y_1^* x^* y^* \rangle & \langle x_2^* y_2^* \rangle \\
- \langle x_2^* y_2^* x^* y^* \rangle \langle x_1^* y_1^* \rangle + \langle x_1^* y_1^* x^* y^* x_2^* y_2^* \rangle) &
\end{aligned}$$

L'équation de Perk, correspondant à la configuration des points précédents, revient à écrire $R=0$. Nous voyons donc que, si les équations de Perk apparaissent bien, pour les plus simples d'entre elles, comme la combinaison de relations linéaires simples et de relations non linéaires à coefficients simples (valant +1 ou -1), ce n'est plus le cas pour les relations plus complexes. On remarque cependant que dans l'exemple précédent on obtient bien

l'équation de Perk pour $K=0$ (on a alors automatiquement $R=0$). Cette remarque persiste sur l'exemple plus général suivant



Si l'on introduit les notations suivantes

$$C_1 = \text{ch } 2K_1, S_1 = \text{sh } 2K_1, C_2 = \text{ch } 2K_2, S_2 = \text{sh } 2K_2$$

$$c_i = \text{ch } 2k_i, s_i = \text{sh } 2k_i,$$

on peut voir en reprenant les raisonnements précédents que les termes en $C_1(C_1 \dots C_n)^2 C_2$, $C_1(C_1 \dots C_n)^2 S_2$ et $S_1(C_1 \dots C_n)^2 C_2$ disparaissent, le terme $S_1(C_1 \dots C_n)^2 S_2$ est associé au terme de Perk que l'on cherche :

$$\langle x_1^* y_2^* \rangle \langle x_2^* y_1^* \rangle - \langle x_1^* x_2^* \rangle \langle y_1^* y_2^* \rangle$$

et tous les autres s'annulent si tous les k_i sont nuls. Bien sûr il resterait à démontrer que

$$\langle x_1 x_2 \rangle \langle y_1 y_2 \rangle - \langle x_1 y_2 \rangle \langle y_1 x_2 \rangle$$

$$= S_1 S_2 \{ \langle x_1^* y_2^* \rangle \langle x_2^* y_1^* \rangle - \langle x_1^* x_2^* \rangle \langle y_1^* y_2^* \rangle \}$$

est une quantité indépendante de chaque k_i , et ceci semble assez difficile à obtenir.

III. DISCUSSION

a) Discussion sur les équations fonctionnelles en physique mathématique

Dans cette note nous nous sommes attachés presque exclusivement aux relations linéaires sur les fonctions de corrélation. Cependant il est clair qu'au delà de ces dernières relations c'est le problème des équations fonctionnelles simples que l'on rencontre en physique mathématique qui est posé, comme par exemple celles que l'on rencontre sur le modèle d'hexagone dur :

Le modèle d'hexagone dur est un modèle intéressant de part les équations fonctionnelles qui y interviennent. En effet à côté des équations fonctionnelles, qui nous sont maintenant devenues familières, d'inverse et de symétrie de rotation de 90° , qui induisent très naturellement une solution minimale en produit infini en l'occurrence des quotients de la fonction elliptique

$$f(w) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n-1} w)(1 - q^n w^{-1}),$$

il a été démontré [5] que la fonction de partition vérifiait une équation fonctionnelle simple :

$$Z(u) \cdot Z(u+\lambda) = 1 + Z(u-2\lambda) \quad (13)$$

Il sortirait du cadre de cette note de reprendre cette démonstration ; disons simplement qu'elle provient également de raisonnements locaux sur les poids de Boltzmann et qu'elle fait intervenir certaines particularités du modèle (orthogonalité et indépendance dans le paramètre spectral des vecteurs propres à droite et à gauche d'une certaine matrice 2×2 , égalité de certains vecteurs colonnes et lignes d'autres matrices à ces vecteurs propres à droite et à gauche). Cette équation n'est plus du type "relation d'automorphie" comme les précédentes et il n'est plus naturel, au vue de cette équation, que la fonction de partition soit un produit infini eulérien comme nous le savons par ailleurs, Cette réunion singulière entre des propriétés multiplicatives et additives traduit en définitive les propriétés tout à fait particulières de ces produits eulériens (fonctions elliptiques). Ce point de vue est confirmé par l'utilisation qu'a fait R.J. Baxter des identités de Rogers-Ramanujan dans ce problème d'hexagone dur [24].

Il n'est pas inutile de s'interroger sur le rôle que jouent ces produits eulériens dans la physique mathématique : on les rencontre en mécanique statistique dans l'expression des fonctions de partition de différents modèles [4][25] mais également dans l'expression de grandeurs telles que la polarisation, ou l'aimantation, des modèles sur réseau [26][27]. A ce propos on peut citer l'article de G.S. Joyce [27] où il montre que la forme eulérienne de l'aimantation du modèle d'Ising avec interaction à 3 spins sur réseau triangulaire

$$(M = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{6n-3}) / (1 + q^{6n+3}))$$

revient à dire que M est solution d'une équation modulaire de Legendre de degré 3. Cette équation différentielle lui permet d'établir une relation de récurrence linéaire pour les coefficients du développement basse température de M . (L'apparition de relation de récurrence linéaire sur les coefficients de développement basse température pour l'aimantation est un phénomène que l'on peut remarquer par exemple pour le modèle d'Ising sur réseau carré, hexagonal, triangulaire, mais qui ne semble pas exister en dimension trois (voir footnote de la page 420 de la référence [29]).

On rencontre également ces produits eulériens dans la théorie combinatoire, notamment dans des problèmes dits d'énumérations binomiales [30] (où l'on considère des relations telles que

$$p_n(X+Y) = \sum_{j \geq 0} \binom{n}{j} p_j(X) \cdot p_{n-j}(Y)$$

Ces problèmes de combinatoire sont évidemment très proches des problèmes de mécanique statistique sur réseau [k]. On rencontre dans ces problèmes des relations d'automorphie telles que par exemple la relation (9.1) dans [30]. On peut également y rencontrer des identités de Rogers-Ramanujan.

De tels produits eulériens, et leur relations associées, apparaissent également dans la théorie des algèbres de Lie affine (cas particulier des algèbres de Kac-Moody), notamment, par exemple, lorsque l'on s'intéresse à la formule des caractères de Kac-Weyl (formule du dénominateur) [31][32]. En fait il est apparu ces dernières années, que les algèbres de Lie affine étaient reliées à de nombreux domaines de la physique mathématique : la combinatoire, nous l'avons dit (problèmes de partitions), les problèmes de singularités [33], les systèmes complètement intégrables [34], les

problèmes de mécanique, les problèmes de physique des particules, notamment les modèles duaux [35]. (Rappelons que, par exemple, la fonction $f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-1}$ apparaît dans la théorie des modèles duaux et des cordes [36]. Dans la théorie des boucles planaires on utilise $\Delta(x) = q \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \cdot q^n$, Δ est la fameuse forme modulaire qui satisfait $\Delta(-1/z) = z^{12} \cdot \Delta(z)$, le nombre 24 n'étant pas sans relation avec la très exotique dimension 26 des modèles duaux). Manifestement la théorie des algèbres de Lie affine et des formes modulaires semble jouer un rôle important en physique mathématique et ceci se traduit, la plupart du temps, par l'apparition sur de nombreux problèmes d'équations fonctionnelles, d'équations différentielles, ou bien encore de récurrence très simples.

Le caractère général des équations fonctionnelles telles que (13) semble renforcé par l'apparition d'équations analogues dans des problèmes a priori assez éloignés de la mécanique statistique, tels que l'oscillateur anharmonique [37] ou les équations différentielles ordinaires à singularités irrégulières [38] $y'' - (x^3 + \lambda)y = 0$, les multiplicateurs de Stokes satisfaisant l'équation fonctionnelle $f(\lambda) + f(\omega\lambda) f(\omega^{-1}\lambda) = 1$ où $\omega^5 = 1$. Il semble que ces dernières propriétés puissent être comprises dans le cadre de la théorie dite des fonctions resurgentes [39] ; la notion de fonction resurgente apparaissant dans des problèmes aussi différents que des équations différentielles simples telles que

$$f'(z) = P(1/z) + f(z) \cdot Q(1/z) + f^2(z) \cdot R(1/z)$$

où P, Q, R sont des polynômes, des équations fonctionnelles du type Abel ($f \circ g = 1 + f$, g est connu) qui apparaissent en théorie de l'itération.

b) Conclusion

Nous avons considéré divers exemples de relations linéaires et non linéaires portant sur les fonctions de corrélation. Nous avons notamment discuté la relation de Fisher et ses généralisations au modèle de Potts, nous avons indiqué comment une relation linéaire très simple sur le réseau carré était reliée à une identité non triviale de géométrie algébrique, nous avons montré l'existence d'une relation linéaire sur les

fonctions de corrélation du modèle à 8 vertex symétrique. Nous avons enfin indiqué certains liens entre les relations de Perk [23] et les relations linéaires précédentes. Nous pensons avoir montré que ces identités devaient être regardées comme des relations contraignantes sur les fonctions de corrélations et ce, dans tous les cas, et pas seulement dans les cas intégrables où, utilisant ces relations, on peut mener éventuellement les calculs jusqu'au bout [16]. Assurément dans tous les cas (intégrables ou non, bidimensionnels ou tridimensionnels...) ces relations fonctionnelles doivent être regardées comme un moyen pour obtenir des informations sur les fonctions de corrélations, informations qui sont trop rares comparativement à celles sur d'autres objets tels que, par exemple, les fonctions de partition. Cette importance des relations linéaires pour les fonctions de corrélation est fort bien illustrée dans un article récent [40].

Ces relations fonctionnelles, jointes à celles que nous avons exhibées dans d'autres exemples (relation d'inverse sur les fonctions de partition, ou les fonctions de corrélations [3][4]), posent le problème du caractère général de telles équations fonctionnelles simples.

Deux problèmes essentiellement sont posés :

- 1) Ces relations simples sont elles le reflet de structures universelles sous-jacentes.?
- 2) Comment exploiter au mieux de telles relations fonctionnelles ?

RÉFÉRENCES

- [1] J.M. Maillard, Note CEA S82-76 Relations d'inverse en mécanique statistique
- [2] M.T. Jaekel, J.M. Maillard, J. Phys. A 15 (1982) 1309
- [3] M.T. Jaekel, J.M. Maillard, soumis à J. Phys. A
- [4] M.T. Jaekel, J.M. Maillard, J. Phys. A15 (1982) 2241
- [5] R.J. Baxter, P.A. Pearce, J. Phys. A 15 (1982) 897-910
- [6] Y. Sibuya, R.H. Cameron, dans Symposium on Ordinary Differential Equations vol.312 Lecture Notes in Mathematics p.194
- [7] A. Voros, C.R. Acad. Sc. 293 (1981) I 709
- [8] A. Münster, Statistical Thermodynamics Vol.I (Springer Verlag 1969) p.331
- [9] C.S. Gardner, J. Math. Phys. 12, 1548 (1971)
- [10] Y.K. Toubin, V.K. Fedyanin, Teor. i Mat. Fiz. 24 (1975) 129-132
- [11] Z.W. Salsburg, R.W. Zwanzig, J.G. Kirkwood, J. Chem. Phys. 21 (1953) 1098
- [12] M.E. Fisher, Phys. Rev. 113 (1959) 969-81
- [13] R.J. Boel, P.W. Kasteleyn, Physica 93A (1978) 503
- [14] J. Groeneveld, R.J. Boel, P.W. Kasteleyn, Physica 93A (1978) 138
- [15] B.M. McCoy, T.T. Wu, Phys. Lett. 80A (1980) 159-162
- [16] R.J. Baxter, I.G. Enting, J. Phys. A 11 (1978) 2463-2473
- [17] B.G.S. Doman, D. ter Haar, Phys. Lett. 2 (1962) 15
- [18] H.B. Callen, Phys. Lett. 4 (1963) 161
- [19] H.J. Braskamp, Commun. Math. Phys. 18 (1970) 82
- [20] M. Suzuki, Phys. Lett. 19 (1965) 267
- [21] M.J. Stephen, L. Mittag, J. Math. Phys. 13 (1972) 1944
- [22] A. Cayley, An elementary treatise on Elliptic Functions Dauer Publication New-York 1961, p.120

- [23] J.H.H. Perk, Phys. Lett. 79A (1980) 3-5
- [24] R.J. Baxter, J. of Stat. Phys. 26 (1981) 427-452
- [25] R. Rammal, J.M. Maillard, J. Phys. A16 (1983) Q-state Potts model on ...
- [26] R.J. Baxter, M.S. Sykes, M.G. Watts, J. Phys. A8 (1975) 245
- [27] R.J. Baxter, M.S. Sykes, M.G. Watts, J. Phys. A9 (1976) L149
- [28] G.S. Joyce, Proc. R. Soc. Lond. A 345 (1975) 277-293
- [29] C. Domb, M.S. Green, Phase Transitions and Critical Phenomena Vol.3 Academic Press
- [30] G.E. Andrews, Studies in Applied Math. L4 (1971) 345-375
- [31] A.J. Feingold, J. Lepowsky, Adv. in Math. 29 (1978) 271-309
- [32] I.G. Mc Donald, Affine Lie Algebras and Modular Forms Seminaire Bourbaki 1980/81 n°577
- [33] P. Slodowy, Simple singularities and simple algebraic groups, Springer Lecture Notes 815 (1980)
- [34] M. Adler, P. van Moerbeke Completely integrable systems, Kac-Moody Lie algebras and curves Adv. in Math. 36 (1980) 1-44
- [35] I.B. Frenkel, V.G. Kac Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models Inv. Math. 62 (1980) 23-66
- [36] J. Sherk, Rev. Mod. Phys. 47 (1975) 123
- [37] A. Voros, J. Physique Lettres 43 (1982) L1-L4
- [38] T. Kimura, Symposium on Ordinary Differential Equations Lecture Notes in Mathematics 312 Springer Verlag
- [39] J. Ecalle, Les fonctions resurgentes (en trois parties) Publications Mathématiques d'Orsay (1980)
- [40] J.H. Barry, C.H. Munera, T. Tanaka, Physica 143 A (1982) 367-387

AUTRES REFERENCES QUE L'ON POURRA CONSULTER SUR LE SUJET :

- [a] E. Proveczki, Phys. Lett. 17 (1965) 267
- [b] R. Dekeyser, J. Rogiers, Physica 59 (1972) 23-28
- [c] J.H.H. Perk, Phys. Lett. 79A (1980) 1-2
- [d] B.M. McCoy, J.H.H. Perk, T.T. Wu, Phys. Rev. Lett. 46 (1981) 757
- [e] J.H.H. Perk, H.W. Capel, Physica 89A (1977) 265-303
- [f] J. Goldman, G.C. Rota, Studies in Applied Math. XLIX (1970) 239
- [g] S.G. Mohanty, Lattice path Counting and Applications 1979 ;
Academic Press
- [h] R.P. Stanley, Studies in Applied Math. L (1971) 259
- [i] J. Lepowsky, Advances in Math. 27 (1978) 230-234
- [j] E. Artin, The Gamma Function Athena Series 1964 Holt Rinehart and
Winston ed.
- [k] H.N.V. Temperley, E.H. Lieb, Proc. Roy. Soc. Lond. A322 (1971)
251-280 p.263
- [l] A.E. Arinshtein, V.A. Fateyev, A.B. Zamolodchikov, Phys. Lett. 87B
(1979) 389

Manuscrit reçu le 7 février 1983